微积分 I（第一层次）期中试卷 (2017.11.18)

一、用极限定义证明下列极限：(6分×2 = 12分)

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}+1}{2n-5}=0.$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-1}=\dfrac{3}{2}.$

二、计算下列极限：(6分×3 = 18分)

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{\sin x}}$;

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\pi-2\arctan x)$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-x^2\sin\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}.$

三、(10分) 设 $f(x)=\begin{cases} e^{\sin ax}-1, & x\geq 0 \\ b\ln(1+x), & x<0 \end{cases}$, 其中参数 a,b 都不为0. 如果 $f''(0)$ 存在，求 a,b.

四、(10分) 当 $x\to 0$ 时，以 x 为基准无穷小，求 $(\cos x-1)\ln(1+x)$ 的无穷小主部.

五、(10分) 求方程 $x^3+y^3-3axy=0\ (a>0)$ 所确定的隐函数 $y(x)$ 的二阶导数 y''.

六、(10分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，$f(0)=0, f(1)=1, f'(0)=1$, 证明：$\exists\,\eta\in(0,1)$, 使得 $f'(\eta)=\dfrac{f(\eta)}{\eta}$.

七、(10分) 求参数方程 $\begin{cases} x=4\cos\theta \\ y=1+\sin\theta \end{cases}\ (0\leq\theta<\pi)$ 所确定的曲线在 $x=2$ 处的切线和法线方程.

八、(10分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，$f'(x)=-xf(x), f(0)=1$, 证明：对任意的正整数 k,

$$\lim_{x\to+\infty}x^kf(x)=0.$$

九、(10分) 设 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, 其中 a,b,c,d 为常数且 $a\neq 0$. 证明方程 $f(x)=0$ 有三个不相等的实数根的必要条件是 $b^2-3ac>0$.

微积分 I（第一层次）期中试卷 (2018.11.17)

一、简答题：(5分×8 = 40 分)

1. 用极限的定义证明：$\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x^2-1}=\sqrt{3}$.
2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^4+4^n}$.
3. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{2}{x}}$.
4. 设 $y=x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$, 求 $\mathrm{d}y$.
5. 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty} n\Big((1+\dfrac{1}{n})^n-e\Big)$.
6. 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x\arcsin x}$.
7. 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\Big((1+\ln(1+x))^{2x}-1\Big)$.
8. 设 x 为基准无穷小，求 $\ln(1+x)-\arctan x$ 的主部.

二、(7分) 设 $f(x)=\dfrac{5x-1}{2x^2+x-1}$, 求 $f^{(n)}(x)$.

三、(7分) 证明方程 $\cos x-\dfrac{1}{x}=0$ 有无穷多个正根.

四、(7分) 设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=\arctan t, \\ 2y-ty^2+e^t=5a \end{cases}$ 所确定(其中 a 为常数)，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

五、(8分) 设 $f(x)=\arctan x-\arctan\dfrac{x-1}{x+1}$, 其中 $x>-1$.

(1) 证明：$f(x)$ 是常数函数；　(2) 求 $\arctan(2-\sqrt{3})$ 的值.

六、(8分) 设 $f(x)=\begin{cases} x^2+\ln(1+x^2), & x>0; \\ ax\sin x, & x\le 0, \end{cases}$ 且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导. 试求 a 的值以及 $f''(0)$.

七、(8分) 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}}$, 试确定 $f(x)$ 的间断点及其类型.

八、(8分) (1) 对任意的正整数 n, 证明 $\dfrac{1}{n+1}<\ln(1+\dfrac{1}{n})<\dfrac{1}{n}$;

(2) 令 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 极限存在.

九、(7分) 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，$f(0)=1, f(1)+2f(2)=3$. 试证明：$\exists\xi\in(0,2)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

微积分 I (第一层次)期中试卷 (2019.11.16)

一、计算下列各题（每题6分，共48分）

1. 用 $\varepsilon-\delta$ 语言证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1-\sin^3 x}=1$.

2. 用 $\varepsilon-N$ 语言证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{1+n^2}}=1$.

3. 求函数 $y=\sqrt{\dfrac{x+2}{x+5}\sin x}+(\arctan x)^{\tan x}$ 的一阶导数和微分。

4. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n$，其中 $a\geq 0$, $b\geq 0$.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 讨论函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的可微性.

6. 设 $x_1>0$, $x_{n+1}=\ln(1+x_n)$. 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

7. 设 $f(x)=x\ln(1+x)+\cos x+ax^2+bx+c=o(x^2)$，求 a, b, c 的值. 若以 x 为基准无穷小，求 $f(x)$ 关于 x 的无穷小阶数和无穷小主部。

8. 设函数 $y(x)$ 由如下参数方程定义: $\begin{cases}x=\arctan t,\\ y=\operatorname{arccot} t+\ln(1+t^2).\end{cases}$ 试求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

二、(10分）确定函数 $f(x)$ 的间断点，并说明是哪种类型的间断点。

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}, & x\neq 0, x\neq 1,\\ 0, & x=0,\\ \sin 1, & x=1.\end{cases}$$

三、(10分）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，且导函数 $f'(x)$ 严格单调递增. 若 $f(a)=f(b)$，证明对一切 $x\in(a,b)$, 有 $f(x)<f(a)=f(b)$.

四、(10分) 求由方程 $e^{x+y}-xy-e=0$ 确定的曲线在点 $(0,1)$ 处的切线和法线方程。

五、(12分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(x)\neq 0$, 又 $f(a)=1$, $f(b)=0$, 证明

(1) 存在 $\xi_1\in(a,b)$, 使得 $f(\xi_1)=\dfrac{4}{5}$;

(2) 存在 $\xi_2,\xi_3\in(a,b)$ $(\xi_2\neq\xi_3)$, 使得 $\dfrac{1}{f'(\xi_2)}+\dfrac{4}{f'(\xi_3)}=5(a-b)$.

六、(10分) 设 $f(x)=|x|^n g(x)$, 其中 n 为奇数，$g(x)$ 有 n 阶导数. 在什么条件下 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有 n 阶导数？

微积分 I (第一层次)期末试卷 2018.1.10

一、计算下列各题(6分× 3=18分)

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\displaystyle\int_0^x \frac{1}{t}\ln(1+xt)\mathrm{d}t}{x^2}$.

2. 求不定积分 $I_1=\displaystyle\int\cos(\ln x)\mathrm{d}x$.　　3. 求不定积分 $I_2=\displaystyle\int\frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x$.

二、计算下列各题(6分× 3=18分)

1. 求定积分 $I_3=\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x\ \ (a>0)$.

2. 求抛物线 $y^2=2px$ 及其在点 $\left(\dfrac{p}{2},p\right)$ 处的法线所围成的图形的面积.

3. 求曲线 $y=\ln(1-x^2)$ 上相应于 $0\le x\le\dfrac{1}{2}$ 的一段弧的弧长.

三、计算下列各题(6分× 3=18分)

1. 求广义积分 $I_4=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+9}$.

2. 设 $(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})$, $(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$, 求向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 γ.

3. 求点 $P(1,2,3)$ 到直线 $L:\begin{cases}x-y+z+5=0,\\5x-8y+4z+36=0\end{cases}$ 的距离.

四、(10分) 设 $x_0>0, x_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(2x_n+\dfrac{1}{x_n^2}\right)$, $n=0,1,2,\cdots$, 求证：数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限.

五、(10分) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

六、(10分) 讨论函数 $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2}$ 的定义域，单调区间，极值，凹凸区间，拐点，渐近线，并绘出草图.

七、(10分) 设直线 $L:\begin{cases}2x-y-2z+1=0\\x+y+4z-2=0\end{cases}$，平面 Π 的方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$, a,b,c 均不等于 0, 且 $b=c$, 平面 Π 过直线 L, 求平面 Π 的方程.

八、(6分，本题非商学院的学生做) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶连续可导，$f(0)=0, f(1)=0$, 且 $\forall\, x\in(0,1)$, 有 $f(x)\neq 0$. 求证：$\displaystyle\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x>4$.

九、(6分, 本题商学院的学生做) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上二阶可导, 且 $f''(x)>0$, 求证：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ge(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

微积分 I (第一层次)期末试卷 2019.1.2

一、计算下列各题(6分× 4=24分)

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3\ln\dfrac{x+1}{x-1}-2x^2\right)$.
2. $y=x^2\mathrm{e}^{3x}$, 求 $y^{(10)}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\sin(xt)\mathrm{d}t}{x^3}$.
4. 求与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行且过点 $(-3,2,5)$ 的直线方程.

二、计算下列各题(6分× 4=24分)

1. 求积分 $\displaystyle\int x\ln(2+x)\mathrm{d}x$.
2. 计算积分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x^5+x^3+x^2+x+\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.
3. 计算广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.
4. 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\le x<1,\\ 1, & 1\le x\le 2,\end{cases}$ 设 $F(x)=\displaystyle\int_1^x f(t)\mathrm{d}t\ (0\le x\le 2)$, 求 $F(x)$.

三、(10分) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\ln\frac{n+1}{n}}{n+1}+\dfrac{\ln\frac{n+2}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\ln\frac{2n}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

四、(10分) 求曲线 $y=\ln x$ 的一条切线，使得这条切线与原曲线以及直线 $x=1, x=\mathrm{e}^2$ 所围成的图形面积最小.

五、(12分) 讨论函数 $f(x)=\dfrac{x^4}{(x+1)^3}$ 的定义域，单调区间，极值，凹凸区间，拐点，渐近线，并绘出草图.

六、(12分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ $(a>0)$ 上具有二阶连续导数.

(1) 如果 $f''(x)>0$ $(x\in[-a,a])$, 证明：$\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x\ge 2af(0)$;

(2) 如果 $f(0)=0$, 证明：在 $[-a,a]$ 上至少存在一点 ζ, 使得 $a^3f''(\zeta)=3\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x$.

七、(8分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)\ge 0$, 满足 $f^2(x)\le 1+2\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, $x\in[0,1]$. 证明：$f(x)\le 1+x$, $x\in[0,1]$.

微积分(I)期末试卷 2019.12.30

一、求下列不定积分(6分× 3=18分)

1. $I_1 = \int \sqrt{1+3\cos^2 x}\cdot \sin(2x)\mathrm{d}x.$

2. $I_2 = \int (\arcsin x)^2 \mathrm{d}x.$

3. $I_3 = \int \frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x.$

二、计算下列各题(6分× 3=18分)

1. 求定积分 $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x.$

2. 求由 $y^2 = -4(x-1)$ 与 $y^2 = -2(x-2)$ 所围平面图形的面积.

3. 求心脏线 $\rho = a(1-\sin\theta)$ $(a>0)$ 的全长 s.

三、计算下列各题(6分× 3=18分)

1. 求广义积分 $I_5 = \int_0^{+\infty} \frac{1-x^2}{x^4+1}\mathrm{d}x.$

2. 已知三个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 满足 $|\boldsymbol{a}| = 2, |\boldsymbol{b}| = 3, |\boldsymbol{c}| = 4$, 且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$, 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

3. 设有两条直线 $L_1: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$, $L_2: \frac{x+2}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-2}$, 证明它们是异面直线.

四、(10分) 设 $f(x)$ 是连续函数，又 $g(x) = \int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = A$ (A 为常数)，求 $g'(x)$, 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

五、(10分) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)}}{n}$.

六、(10分) 讨论函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 的定义域，单调区间，极值，凹凸区间，拐点，渐近线，并作出图像.

七、(10分) 求一条直线 L, 使得 L 过点 $P(2,3,4)$, 且与平面 $\Pi: 2x+y-2z+7=0$ 平行，又与直线 $L_1: \frac{x+1}{-3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-5}{-1}$ 相交.

八、(6分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上具有连续的二阶导数，求证：$\exists\xi\in(a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f(\frac{b+a}{2}) + \frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\xi).$$