



一维复动力系统简介

杨飞

江苏省南京市汉口路 22 号南京大学数学系, 南京 210093

E-mail: yangfei@nju.edu.cn

收稿日期: 2023-XX-XX; 接受日期: 2024-XX-XX; 网络出版日期: 2024-XX-XX

国家自然科学基金 (批准号: 12222107 和 12071210) 资助项目

摘要 复动力系统研究复解析函数的迭代理论. 本文将对一维复动力系统的历史, 基本理论和发展作一个简要的综述.

关键词 复动力系统 Julia 集 Fatou 集 Mandelbrot 集 双曲猜想 重整化 拟共形手术

MSC (2020) 主题分类 37F05, 37F10

1 复动力系统概述

动力系统是当代数学最前沿的领域之一. 它描述几何空间中点在一个固定规则下随时间变化的长期行为. 一般把 Poincaré 在 19 世纪末撰写的 3 卷书作为现代动力系统的开端: *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* (天体力学新方法) I, II, III (1892, 1893, 1899). 进入 20 世纪后, 动力系统朝着不同的方向发展, 其中主要分为离散与连续动力系统.

考虑一个从空间 X 到自身的映射 $f: X \rightarrow X$ 形成的离散动力系统. 人们主要关心初始点 $x_0 \in X$ 在 f 迭代 (iteration) 下的轨道:

$$x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1) = f^{\circ 2}(x_0), \dots, x_n = f(x_{n-1}) = f^{\circ n}(x_0), \dots,$$

当 n 趋于 ∞ 时的极限行为. 当 X 是一个复流形且 $f: X \rightarrow X$ 是一个全纯映射时, 上述离散动力系统即为一个复动力系统¹⁾.

复动力系统的萌芽可以追溯到 17 世纪. 因多数方程不存在求根公式而无法得到精确解, 所以寻找方程的近似解就显得尤为重要. 在计算实多项式 $g(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ ($a_n \neq 0, n \geq 2$) 的根时, Newton 考虑了如下有理函数:

$$f(x) = x - g(x)/g'(x),$$

1) 更准确地说, 此时的动力系统是一个复解析动力系统. 广义的复动力系统还包括某些实动力系统, 算术动力系统等.

并证明对于合适的初始点 $x_0 \in \mathbb{R}$, 迭代序列 $\{f^{on}(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ 收敛到 g 的一个根. 该方法被称为 Newton 迭代法²⁾. 1879 年, Cayley 建议用该方法求复多项式的根. 但他发现这个问题即使对于三次复多项式就非常困难: “*The case of the cubic equation appears to present considerable difficulty*” [167]. 从今天的视角来看, Cayley 在那时遇到困难是不可避免的, 因为他要解决的问题是计算一个三次有理函数的 Julia 集. 见图 1.

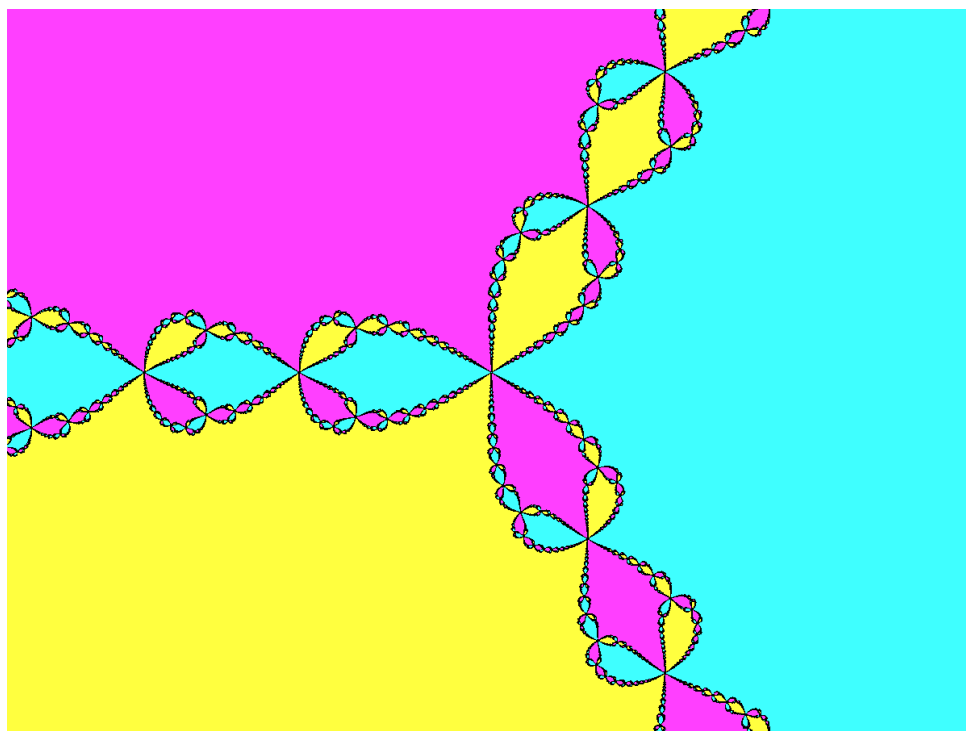


图 1 三次多项式 $g(z) = z^3 - 1$ 的 Newton 迭代法示意图. 三种不同的颜色 (青、紫、黄) 对应的集合 (均为不连通的开集) 表示当初始点 z_0 分别落在其中时, 由 Newton 迭代法 $f(z) = z - g(z)/g'(z)$ 定义的序列 $\{f^{on}(z_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ 分别收敛到 g 的三个根 $1, e^{2\pi i/3}, e^{4\pi i/3}$. 这 3 个集合具有相同的边界, 它是使得 g 的 Newton 迭代法失效的地方, 为 f 的 Julia 集.

Cayley 并不是第一个在 19 世纪 70 年代研究迭代的人. Schröder 在 1870–1871 年也考虑了用迭代法解方程, 同时他还对下面的 Schröder 方程作了研究³⁾:

$$\varphi(f(z)) = \lambda \varphi(z), \quad \text{其中 } f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \dots \text{ 且 } \lambda \neq 0.$$

1884 年, Koenigs 证明如果导数 (或称 “乘子”) $\lambda = f'(0)$ 满足 $|\lambda| \neq 1$, 则上述方程在不动点 0 的邻域内本质上只有唯一解 [411]. 之后, Leau 在 1897 年研究了 λ 是单位根的情形 [423]. 对于 $|\lambda| = 1$ 且 λ 不是单位根的研究则困难得多, 直到 Cremer 在 1928 年和 Siegel 在 1942 年才取得了重要进展 [199], [680].

2) 事实上 Newton 只考虑了方程 $g(x) = x^3 - 2x - 5$. 该迭代方法后来由 Raphson 在 1690 年作了系统的研究. 因而很多时候该方法也称为 Newton-Raphson 迭代法 (见 [58, §1.9]).

3) Böttcher 在 1904 年考虑了 $\lambda = 0$ 即 $f(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots$ ($a_n \neq 0, n \geq 2$) 的情形, 并证明了 $\varphi(f(z)) = (\varphi(z))^n$ 有解 [119].

Fatou 于 1906 年开始研究全纯函数的迭代 [298]. 他考虑的是 $z \mapsto z^2/(z^2 + 2)$ 并证明除了一个 Cantor 集外, 其余点的轨道都收敛到 0. 这引起了很多人的兴趣. 第一次世界大战后, Fatou 和 Julia 利用 Montel 正规族理论和有理函数迭代的深刻联系, 对一维复动力系统作了奠基性的工作 [299], [386]. 他们通过将复球面进行正规和非正规的划分, 引入了现在被称为 Fatou 集 (也称稳定集) 和 Julia 集 (也称不稳定集, 混沌集) 的研究对象.

在 Fatou 和 Julia 所在的那个时代, 他们就对这两个集合的拓扑结构都有了很好的理解. 比如, 他们知道 Julia 集上任何一点的邻域在函数迭代下最终会覆盖整个球面 (除了最多两个例外点), 也知道 Fatou 集的连通分支个数只能是 0, 1, 2 或 ∞ . 这也解释了为什么三次 Newton 映射的 Julia 集非常复杂: 因为它的 Fatou 集有无穷多个连通分支. 对于旋转域 (即共轭于无理旋转的周期 Fatou 分支), 尽管当时还没有具体的例子⁴⁾, 但 Fatou 坚信它们是存在的, 而 Julia 却认为不存在. 在写作风格上, Julia 偏公理化, 而 Fatou 的证明则是偏描述性的, 更注重思想的表达. 利用完全不同的方法, 他们均证明了有理函数的 Julia 集是斥性周期点的闭包这一重要结果.

尽管 Fatou 做出了更广泛且更本质的工作, 但因为 Julia 的另一个身份是负伤的战争英雄, 后者在 1918 年获得了由法国科学院颁发的“Grand Prix des Sciences Mathématiques (数学科学大奖)”⁵⁾. 当年的该奖项被用于表彰在复函数的迭代方面做出最杰出工作的数学家.

20 世纪初期, 除了前文提到的 Cremer, 在复动力系统领域做出重要工作的还有: Lattès, Ritt, Wolff, Denjoy 等 (见⁶⁾ [420], [627], [628], [751], [222]). 之后, 从 30 年代到 70 年代, 这个领域整体上沉寂了一段时间. 但在 1942 年, Siegel 在全纯函数的局部线性化问题 (一类特殊的 Schröder 函数方程) 上取得了重要进展 [680]. 1965 年, Broiln 研究了多项式 Julia 集的测度, 容量, 质量分布, 遍历等性质 [132]. Baker 从 50 年代开始就一直研究超越整函数的动力系统 (其发表文章列表可见 [623]).

70 年代后期, (一维) 复动力系统开始得到飞速发展. 这其中有几方面的原因:

(1) 双曲几何领域中 Kleinian 群的发展. 作用在 Riemann 球面上的 Kleinian 群是一个离散的分式线性变换群. 作为一个动力系统, 它将球面分解成两个互不相交的不变集: 极限集和不连续集, 其性质分别类似于有理函数迭代产生的 Julia 集和 Fatou 集. Ahlfors 和 Bers 等人对 Kleinian 群的研究, 使得 Sullivan 意识到类似的想法可以用来解决有理函数的迭代问题. 后者在 80 年代初证明了有理函数没有游荡域, 解决了 Fatou 在上世纪 20 年代提出的著名公开问题 [708]. 在同一论文中, 他提出了所谓的“Sullivan 字典”, 将有理函数迭代得到的各种动力系统对象与 Kleinian 群进行了列表对比. 这对复动力系统的研究起到了非常重要的推动作用.

(2) 新的数学工具的引入. 拟共形映射和 Teichmüller 理论最先被 Sullivan 引入复动力系统的研究, 前者在游荡域不存在定理的证明中起到本质作用 [708], 后者被用于研究有理函数的 Teichmüller 空间和周期 Fatou 分支的分类⁷⁾ [498]. 之后 Douady 和 Hubbard 借助拟共形映射系统地研究了二次多项式的动力系统 [256], 并提出了类多项式 (polynomial-like) 理论 [257], 这是研究重整化 (renormalization) 的基础. Shishikura 利用拟共形手术解决了 Fatou 的另一个著名公开问题: 通过有理函数的映射度 (degree) 给出了非斥性周期轨道数目的最好上界 [667]. Thurston 将三维流形中

4) 现在已经知道它们确实存在, 为 Siegel 盘和 Herman 环. 见 §7.

5) Montel 和 Lebesgue 非常同情 Fatou, 但 Picard 更支持 Julia. 见 [8].

6) Denjoy-Wolff 定理在周期 Fatou 分支的分类中起到非常关键的作用. Denjoy 的论文发表于 1926 年 1 月 25 日, 改进了 Wolff 于当年 1 月 18 日的结果. 有些文献中根据论文的发表时间也称之为 Wolff-Denjoy 定理.

7) 该工作的预印本出现在 1983 年, Sullivan 当时是唯一作者.

的“轨形” (orbifold) 概念引入复动力系统, 结合 Teichmüller 理论给出了临界有限有理函数的拓朴刻画⁸⁾ [258]. 另外, 拓扑学, 遍历论, 符号动力学, 分歧理论等的引入, 大大丰富了复动力系统的研究课题和方法. 但要说明的是, 经典的复分析理论仍是研究复动力系统的主要工具.

(3) 计算机水平的提高. 上世纪 80 年代, 人们在计算机上可以很容易画出全纯函数迭代产生的图形, 这为复动力系统的研究提供了可视化支撑. 这一时期“分形之父”Mandelbrot 和其他分形爱好者在计算机上画了包括 Mandelbrot 集, Julia 集, 倍周期分叉图, 严格自相似分形集等在的大量图形, 激发了学者研究复动力系统的兴趣. 当时这个问题被一些学者称为“计算机图形背后的数学” (mathematics behind computer graphics) [235]. 事实上, 基于图形来解决数学问题是一种非常重要的辅助研究手段.

超越整函数的研究始于 1926 年的 Fatou [300]. 在 Sullivan 关于有理函数游荡域的工作之前, Baker 已于 70 年代证明了超越整函数可以有游荡域 [40]. 进入 80 年代, 随着 Misiurewicz 对指数映射的研究 [519], 超越整函数动力系统进入迅猛发展时期. 除了经典的有理函数和超越整函数迭代外, 复动力系统自上世纪 70 年代开始还细分成几个子方向发展. 物理学家 Feigenbaum, Coulet 和 Tresser 在研究区间映射的迭代时, 发现了著名的倍周期分叉现象. 为了得到数学理论上的解释, 这引发了大量关于区间映射和重整化的研究. Jakobson 建立的定理也是区间映射动力系统得到大量关注的原因之一 [376]. 另一方面, 作为研究圆周微分同胚动力系统的先驱, Herman 在 1979 年解决 Arnol'd 的猜想后, 找到了有理函数的最后一种周期 Fatou 分支: Herman 环 [354]. Devaney 和 Keen 在 80 年代后期开始研究复平面上超越亚纯函数的动力系统 [234].

高维复动力系统的研究可以追溯到 19 世纪末. 早在 1893 年, Poincaré 就开始研究 \mathbb{C}^n 到自身的全纯局部动力系统. 上世纪 80 年代, 随着 Hubbard 对 Hénon 映射的研究 [364] 以及 Ueda 的相关工作出现 [734], 高维复动力系统进入迅猛发展时期. Bedford, Fornæss, Sibony, Smillie, Ueda 等在 90 年代对高维复动力系统作了开创性的工作. 最近高维复动力系统领域的一个重要进展是: 多项式可以有游荡域 [22], 但其中的证明需要用到一维复动力系统的工具.

算术动力系统研究的是数域上自映射的轨道性质. 与复流形上的动力系统相比, 它更有数论的味道. 自上世纪 80 年代起算术动力系统开始得到发展, 其中的很多问题来源于算术几何. 它将动力系统, 数论, 代数几何等领域紧密地联系起来. 这其中的一个典型方向就是非阿域上的动力系统. Herman 和 Yoccoz 在 1983 年对 p -adic 情形下小除子问题的研究可以看做该方向的起点 [358]. 关于算术和非阿域动力系统的部分最新进展可参看 [217], [64], [63].

复动力系统自上世纪 80 年代蓬勃发展至今, 已有多位该领域的专家被邀请在国际数学家大会 (ICM) 上作报告. 他们是:

- V. I. Arnol'd (1983), J. E. Fornæss (1983), R. Mañé (1983), M. Misiurewicz (1983), A. Douady (1986), J.-P. Eckmann (1986, 2002), M. V. Jakobson (1986), D. Sullivan (1986), E. Bedford (1990), L. Carleson (1990), J. P. Ecalte (1990), C. T. McMullen (1990, 1998), M. Rees (1990, 2010), N. Sibony (1990), J.-C. Yoccoz (1990, 1994), J. Kahn (1994, 2014), M. Lyubich (1994, 2014), M. Shishikura (1994), M. Herman (1998), W. de Melo (1998), G. Świątek (1998), M. Benedicks (2002), A. Eremenko (2002), J. Smillie (2002), M. Bonk (2006), S. Smirnov (2006,

8) Orbifold 的另一个应用是证明次双曲有理函数 Julia 集的局部连通性 [256].

2010), X. Buff (2010), A. Chéritat (2010), A. Avila (2010, 2014), 沈维孝 (2014), S. van Strien (2014), L. DeMarco (2018), T.-C. Dinh (2018), F. Przytycki (2018), R. Dujardin (2022), J. H. Silverman (2022) 等.

其中 Yoccoz, McMullen, Smirnov, Avila 等分别获得了 1994, 1998, 2010, 2014 年的菲尔兹奖, Carleson 和 Sullivan 等分别获得了 2006, 2022 年的阿贝尔奖.

上世纪 80 年代到 90 年代初, 比较有影响力的复动力系统综述和讲义包括 [248], [707], [100], [256], [453], [279], [74] 等. 90 年代起, 共出现了三本经典的复解析动力系统专著: Beardon [58], Carleson 和 Gamelin [164], 以及 Milnor [511], 它们主要考虑有理函数的迭代. 有关超越函数迭代的参考书可见 [362], [524]. 关于复解析动力系统的专著还有 [701], [464] 等. McMullen 关于重整化的专著 [490] 是进入复动力系统领域的必读文献之一. 此外, [400], [492], [124], [366], [230], [231] 也是很好的参考文献. 还有一些专著涉及复动力系统的相关领域: 如一维实动力系统 (包括区间和圆周) [195], [499], [134], [297], [294]; 算术和非阿域动力系统 [682], [683], [62] 等. 高维复动力系统可参看 [306], [2], [242].

在杨乐院士的建议下, 国内的复动力系统从上世纪 80 年代后期开始发展. 当时的研究人员主要包括: 位于北京的李忠, 吕以鞏, 王跃飞, 伍胜健, 崔贵珍, 郑建华, 张广远, 方丽萍等; 位于上海的任福尧, 邱维元, 尹永成, 乔建永, 张文俊, 周维民, 龚志民等; 以及位于香港的杨重骏等. 本世纪初, 沈维孝, 李思敏, 张高飞等回国后, 使得复动力系统在合肥, 南京等地也得到了发展. 从上世纪 90 年代起在国外工作, 但一直和国内保持密切联系的华人复动力系统专家有: 谭蕾, 蒋云平, 范爱华, 胡骏等. 迄今为止共有以下 4 本复动力系统中文专著:

- 吕以鞏, 复解析动力系统, 科学出版社, 1995.
- 任福尧, 复解析动力系统, 复旦大学出版社, 1997.
- 郑建华, 亚纯函数动力系统, 清华大学出版社, 2006.
- 乔建永, 重整化变换的复动力学, 科学出版社, 2010.

关于复动力系统早期发展史 (1942 年⁹⁾之前的 Fatou-Julia 理论) 可参看数学史专著: [7], [24], [9]. 近百年来复动力系统的介绍可参看综述 [704], [8] 和 [607]. 除了上面提到的一系列专著, 还有以下值得参考的复动力系统论文集: [235], [227], [125], [418], [303], [720], [187], [168], 以及 [236], [359], [467], [623], [652], [112], [115], [538] 等.

复解析动力系统是复分析的一个子方向, 它与复分析的其它子方向有紧密的联系, 特别是拟共形映射与 Teichmüller 理论, 值分布理论, 正规族理论, 复微分方程等. 与其它学科也有很多交叉: 比如拓扑学, 遍历理论, 分形几何, 统计物理等. 复解析动力系统及相关问题集可参看: [95], [350] 等.

限于作者的研究水平和兴趣, 这篇综述将主要侧重于一维有理函数的动力系统. 在叙述有理函数动力系统的相关结果时, 也会适当提及超越整函数和超越亚纯函数的平行结果. 同时, 本文将在其中一节专门介绍超越函数的动力系统, 侧重于与有理函数动力系统的不同之处.

9) 注意 1942 年正是 Siegel 发表关于线性化问题里程碑工作的年份 [680]. 1942 年以后的复动力系统发展情况是一个好的数学史课题.

2 Julia 集的拓扑与几何

2.1 Fatou-Julia 基础理论

定义 (Fatou 集和 Julia 集) 对于有理函数 $f: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, 其 **Fatou 集** $F(f)$ 定义为 $\widehat{\mathbb{C}}$ 中所有使得迭代序列 $\{f^{on}\}_{n \in \mathbb{N}}$ 局部正规的点集, 其 **Julia 集** $J(f)$ 定义为 Fatou 集在 $\widehat{\mathbb{C}}$ 中的补集.

根据定义可知, Fatou 集是开集, Julia 集是闭集. 它们的连通分支分别称为 Fatou 分支和 Julia 分支. 次数大于 1 的有理函数 Julia 集是一个没有孤立点, 也没有内点 (除非为整个球面) 的非空完全不变紧集, 它是所有斥性周期点的闭包. 关于有理函数 Fatou 集和 Julia 集的基础理论¹⁰⁾, 可参考 [511], [164], [58], [490].

自上世纪初 Fatou 和 Julia 系统地研究全纯函数的迭代开始, 到 80 年代 Sullivan 证明游荡域不存在定理并给出周期 Fatou 分支分类为止, 有理函数在 Fatou 集上的动力系统已经完全清楚了 (见 [708], [498]):

定理 2.1 (Sullivan) 有理函数的 Fatou 分支都是最终周期的, 且周期 Fatou 分支必为以下 5 类之一: 超吸引域, 几何吸引域, 抛物域, Siegel 盘和 Herman 环.

超吸引域和几何吸引域统称为吸引域, 而 Siegel 盘和 Herman 环则统称为旋转域. Sullivan 最终周期性定理的证明基于拟共形形变, 周期 Fatou 分支的分类基于 Denjoy-Wolff 定理和万有覆盖. 特别地, 这 5 类周期 Fatou 分支都确实存在, 前 4 类可以由二次多项式 $z \mapsto \lambda z + z^2$ 实现 [119], [411], [423], [680], 而 Herman 环则可以在三次有理函数中找到 [354], [667].

假设有理函数的次数至少为 2. Fatou 证明了超吸引域, 几何吸引域和抛物域内必至少含有一个临界点, 而 Siegel 盘和 Herman 环的边界必落在临界点轨道的闭包中 [511, §§8-11]. 有理函数在临界点局部有强压缩性, 整体上因为覆盖 Riemann 球面多次而呈现出扩张性, 这导致非线性的有理函数呈现复杂而有趣的动力系统.

Fatou 在上世纪 20 年代猜测 d 次有理函数的非斥性周期轨道的数目可以由其临界点的个数 $2d - 2$ 控制. 利用全纯扰动, Fatou 自己可以将一半的中性周期轨道扰动为吸性, 于是证明了 d 次有理函数至多有 $6d - 6$ 个非斥性周期轨道 (见 [249], [164, §III.2]). Sullivan 在 1981 年证明了吸性循环和 Herman 环的个数之和不超过 $2d - 2$. 利用类多项式理论, Douady 在 1982 年证明了 d 次多项式至多有 $d - 1$ 个非斥性周期轨道 (见 [249], [164, §VI.1]). 终于在 1986 年, Shishikura 利用拟共形手术进行扰动, 在他的硕士论文中证明了 Fatou 的猜想. 事实上, 他证明了如下更强的结果 [667]:

定理 2.2 (Shishikura) 一个 d 次有理函数的吸性循环, 抛物循环, 无理中性循环, 以及 Herman 环循环的 2 倍之和, 不超过 $2d - 2$. 此外, Herman 环循环的个数不超过 $d - 2$.

此类上界估计现在称为 Fatou-Shishikura 不等式, 进一步的研究可见 [106].

对于有理函数, 周期 Fatou 分支的连通数只能是 1, 2 或 ∞ . 对于任意正整数 $n \geq 3$, Baker, Keen 和吕以攀 [47] 利用拟共形手术证明: 存在有理函数, 其含有一个预周期的 Fatou 分支且连通数恰好等于 n . 但这些有理函数的表达式是未知的. 之后 Shishikura 提出了如下问题 [58, p. 263]:

问题 1 (Shishikura) 对任意 $n \geq 3$, 能否找到一个具有显式表达式的有理函数, 其含有一个连通数等于 n 的 Fatou 分支? 这样的有理函数最低次数 $d(n)$ 是多少?

10) 有理函数 f 的 Julia 集在 80 年代以前记作 $F(f)$, 而 Fatou 集却记作 $J(f)$ 且那时没有正式的称呼, 有时称作“等度连续域”. Blanchard 在 1984 年引入了现在意义下的 Fatou 集和 Julia 集符号 (见 [100, p. 90], [607, p. 1]).

Beardon 对这个问题作了研究 [58, §11.7], 进一步的研究可见 [317], [162]. 特别地, Canela 证明了 $\liminf_{n \rightarrow \infty} d(n) \leq 6$. 但 $\limsup_{n \rightarrow \infty} d(n)$ 的值还不清楚.

在 Fatou 集上的动力系统清楚后, 需要研究 Julia 集上的动力系统. 这一般采用间接的方式, 将 Fatou 集上的动力系统连续 (或同胚) 地过渡到 Julia 集上 [511, §§17-19]. 为此, 需要首先研究 Julia 集及其子集的拓扑性质 (如连通性, 局部连通性, 淹没性等). 此外, 作为典型的分形集, Julia 集的几何性质 (维数, 面积等) 有助于揭示动力系统的复杂性.

对于超越整函数和含极点的超越亚纯函数, 除了上面的 5 类周期 Fatou 分支外, 还可能会出现 Baker 域 [299] 和游荡域 [40]. 有关基础理论可见 [74], [362] 以及 [524] 等相关章节. 超越整函数版本的 Fatou-Shishikura 不等式可见 [280], [69].

2.2 Julia 集的连通性

任何次数大于 1 的有理映射, 其 Julia 集要么连通, 要么有不可数多个连通分支. 对于多项式, Julia 集连通的充要条件是每个有限临界点的轨道有界. 当所有临界点的轨道均无界时, Julia 集是一个 Cantor 集 (同胚意义下) [164, §III.4]. 因此对于二次多项式, Julia 集要么连通, 要么为一个 Cantor 集. 尹永成和 Milnor 独立地证明这个结论对二次有理函数也成立 [774], [506].

Fatou 猜测当多项式的 Julia 集是一个 Cantor 集时, 临界点的轨道均无界. Broiln 在 1965 年构造了一个三次的多项式, 其有一个有界的临界轨道但 Julia 集为 Cantor 集, 从而否定了 Fatou 的猜想 [132]. 1992 年, Branner 和 Hubbard 利用他们发明的表格 (tableaux) 技巧, 证明了三次多项式的 Julia 集是一个 Cantor 集的充要条件是每个临界点所在的填充 Julia 集¹¹⁾分支是非周期的 [127]. 同时他们猜测这对一般的多项式也成立. Levin 和 van Strien 证明了当多项式具有实系数且仅有一个轨道有界的临界点时 Branner-Hubbard 猜想成立 [434], [435]. 之后, 邱维元和尹永成, Kozlovski 和 van Strien 独立地解决了 Branner-Hubbard 猜想 [599], [417] (部分结果可见 [723], [791]):

定理 2.3 (邱维元-尹永成, Kozlovski-van Strien) 对任意非线性多项式 f , 其填充 Julia 集 $K(f)$ 的一个连通分支为单点当且仅当其向前轨道不含周期临界分支. 特别地, 多项式的 Julia 集为 Cantor 集的充要条件是 $K(f)$ 的临界分支都是非周期的.

Branner-Hubbard 猜想的解决主要用到了组合工具 KSS 嵌套 [415] 和分析工具 Kahn-Lyubich 覆盖引理 [393]. 这两个工具在处理含持续回归临界点的问题中起到重要作用. 比如刚性, 双曲稠密性, Fatou 分支边界的局部连通性等问题.

对于以下情形, 有理函数的 Julia 集是连通的: 临界轨道均有界的多项式 (Fatou); 临界有限的有理函数 [488]; 多项式的 Newton 映射 [675]; 一类广义重整化变换函数 [587], [769] 等. 注意 Julia 集连通等价于每个 Fatou 分支单连通, 因此若有理函数含 Herman 环或非单连通的吸引域或抛物域, 则 Julia 集一定非连通. 关于一些其它特殊有理函数族 Julia 集连通性, 比如 McMullen 映射 Julia 集等的连通性可见 [239], [753], [762], 其中 Riemann-Hurwitz 公式在证明中起到主要作用.

超越亚纯函数 Julia 集的连通性可见¹²⁾ [243], [44], [51].

11) 多项式 f 的填充 Julia 集 (filled Julia set) 定义为 $K(f) := \{z \in \mathbb{C} : \{f^{o_n}(z)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ 有界}\}$, 其拓扑边界 $\partial K(f)$ 为 f 的 Julia 集.

12) 一个值得关注的问题是正弦函数族 $f_\lambda(z) = \lambda \sin(z)$ 的 Julia 集 $J(f_\lambda)$ 的连通性. Domínguez 和 Sienna 在 2002 年猜想 $J(f_\lambda)$ 连通当且仅当 $|\lambda| \geq 1$ [247]. 这个猜想目前还没有完全解决.

2.3 Julia 集的局部连通性

若次数大于 1 的有理函数 f 有一个不变的单连通 Fatou 分支 U , 则存在共形映射将 $f : U \rightarrow U$ 共轭到一个定义在单位圆盘 \mathbb{D} 上的有限 Blaschke 乘积 $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ [488]. 若 U 的边界 ∂U 局部连通 (特别地, 若为简单闭曲线), 那么通过 Carathéodory 定理可以将 g 在单位圆周上的动力系统半共轭 (或进一步, 共轭) 到 f 在 U 边界上的动力系统. 于是 Julia 集的子集 ∂U 上的动力系统便得到了很好地描述 [250]. 整个 Julia 集的局部连通性和每个 Fatou 分支边界的局部连通性的关系如下 (见 [747, p. 113]):

引理 2.4 (Whyburn) 复球面上的一个紧子集 X 局部连通当且仅当下列成立:

1. $\widehat{\mathbb{C}} \setminus X$ 的每个连通分支的边界局部连通;
2. 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, $\widehat{\mathbb{C}} \setminus X$ 仅有有限多个连通分支的球面直径大于 ε .

如果整个 Julia 集 $J(f)$ 局部连通, 那么 f 的每个 Fatou 分支单连通且边界局部连通, 其上的动力系统可以通过 Fatou 分支的动力系统连续延拓. 注意如果有理函数的 Julia 集不连通, 则它一定不是局部连通的.

对于 Julia 集的局部连通性, 主要有两种证明方法. 第一种方法是利用上述引理先证明每个 Fatou 分支边界局部连通, 然后再证明 Fatou 分支的直径趋向于 0 (对于多项式, 只需证明无界的那个 Fatou 分支的边界局部连通). 这需要有理函数在 Julia 集附近存在扩张度量或者有一定的扩张性, 其中经典的“压缩引理” (shrinking lemma) 对 Julia 集的局部连通性研究起到重要作用 (见 [722], [465, §12], [474], [677]). 利用上述原理, 有理函数的连通 Julia 集在以下情形被证明是局部连通的:

- 几何有限有理函数 [722], 这包括了双曲, 次双曲和临界有限有理函数以及几何有限多项式 [256] (也可参见 [164, §V.4]);
- 半双曲有理函数 [165], [776];
- 含有一个完全不变 Fatou 分支, 满足 Collet-Eckmann 条件¹³⁾或可和性条件且指标较小¹⁴⁾的有理函数 [337], [338];
- 弱双曲有理函数 [632].

因为局部连通是局部性质, 第二种证明 Julia 集局部连通性的方法是逐点分析: 对于 Julia 集上的每一点, 找一个连通的邻域基. 该方法的优点在于可以根据点的向前轨道的动力系统行为采取不同的分析办法. 这里的一个经典方法就是构造 Yoccoz 拼图 (见 [365], [507]).

定义 (Yoccoz 拼图) 考虑二次多项式 $f(z) = z^2 + c$, 其 Julia 集连通且包含两个斥性不动点, 其中一个斥性不动点 α 的组合旋转数为 q/p , 这里 p, q 为互素的正整数且 $p \geq 2$. 取 f 的一条等势线 γ , 则恰有 p 条外射线着陆在 α , 它们将 γ 围成的有界区域分割成一个深度为 0 的 **Yoccoz 拼图** (puzzle), 它由 p 个互不相交的拓扑圆盘 $P^{(i)}$ 组成, $i = 0, 1, \dots, p-1$, 称之为深度为 0 的拼图片 (puzzle pieces). 而称 $f^{-n}(P^{(i)})$ 的任意连通分支为深度为 n 的拼图片, 其中 $n \geq 1$. 这些深度为 n 的拼图片也是拓扑圆盘, 它们给了 $f^{-n}(\gamma)$ 所围有界区域的一个有限平铺 (finite tiling). 见图 2.

13) 称一个有理函数 f 是 Collet-Eckmann 的, 如果存在 $C > 0$ 和 $\lambda > 1$ 使得对于所有落在 Julia 集上且向前轨道与其它的临界点不交的临界点 c , 有 $|(f^{\circ n})'(f(c))| > C\lambda^n$ 对所有 $n \geq 0$ 成立.

14) 称一个有理函数 f 是满足可和性条件的, 如果存在指标 $\beta > 0$ 使得对于所有落在 Julia 集上且向前轨道与其它的临界点不交的临界点 c , 有 $\sum_{n=0}^{\infty} |(f^{\circ n})'(f(c))|^{-\beta} < \infty$. 可和性条件与 Collet-Eckmann 条件的关系可见 [316].

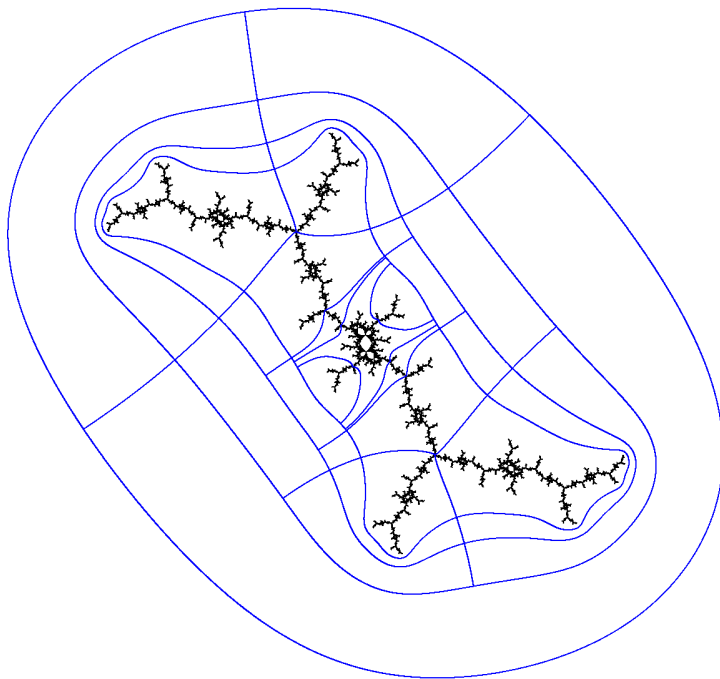


图 2 一个二次多项式的 Yoccoz 拼图.

根据 Yoccoz 拼图的定义 (主要基于这 p 条外射线是一个向前不变集) 可以验证任何两个拼图片要么不交, 要么一个包含另外一个. 由 Yoccoz 拼图可以得到一个由拼图片组成的 Markov 分解. 这样的分解可以通过 Branner-Hubbard 表格 [127] 或者 Yoccoz τ -函数来进行研究. 证明 Julia 集在一点 z 处局部连通归结为证明 $P_n(z)$ 的欧氏直径趋向于 0, 其中 $P_n(z)$ 表示深度为 n 且闭包包含 z 的拼图片¹⁵⁾, 为一个嵌套序列. 注意 $P_n(z) \setminus \overline{P_{n+1}(z)}$ 为一个 (退化) 圆环. 根据 Grötzsch 共形模不等式, 要证 $J(f)$ 在点 z 局部连通, 只需证明

$$\sum_{n=0}^{\infty} \text{mod}(P_n(z) \setminus \overline{P_{n+1}(z)}) = \infty.$$

在该等式的证明过程中, 寻找非退化的圆环是一个关键环节, 这其中可能需要对拼图片进行“加厚” [507]. 为陈述 Yoccoz 关于 Julia 集局部连通性的结果, 我们先给出类多项式和重整的定义 (见 [257], [490], [458]).

定义 (类多项式) 设 U, V 均为 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上的 Jordan 区域且 $\overline{U} \subset V$. 若 $f: U \rightarrow V$ 是一个次数为 $d \geq 2$ 的逆紧全纯映射, 则称 $f: U \rightarrow V$ 是一个 d 次类多项式 (polynomial-like map), 其填充 Julia 集定义为 $K(f) = \bigcap_{k=0}^{\infty} f^{-k}(V)$, 且 Julia 集为 $J(f) = \partial K(f)$.

定义 (可重整) 设 f 是一个带有标记临界点 c_0 (局部度为 d) 的全纯函数, 若存在正整数 n 和包含 c_0 的 Jordan 区域 U, V , 使得 $f^{\circ n}: U \rightarrow V$ 是一个 d 次类多项式且 $K(f^{\circ n})$ 连通¹⁶⁾, 则称 f 关于 c_0 是 n -可重整的 (renormalizable), 简称 f 可重整.

15) 如果这样的 $P_n(z)$ 不唯一, 那么就考虑这些拼图片的并.

16) 这里 $K(f^{\circ n}) = K(f^{\circ n}|_U)$ 为类多项式 $f^{\circ n}: U \rightarrow V$ 的填充 Julia 集. 当 f 是有理函数时, 要求 $J(f^{\circ n})$ 是 $f: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ 的 Julia 集的真子集.

记 $\mathcal{R}(f) := \{n \geq 1 : f \text{ 关于某个临界点 } c_0 \text{ 是 } n\text{-可重整的}\}$. 若 $\mathcal{R}(f)$ 分别为空, 有限, 或无限集, 则称 f 分别为不可重整, (至多) 有限可重整, 或无穷可重整. 对于可重整的单临界多项式, 根据重整的组合可将其划分成 primitive, satellite 等类型 (见¹⁷⁾ [490, §7.3]).

利用拼图, Yoccoz 证明了下面的结论 [365], [507]:

定理 2.5 (Yoccoz) 若二次多项式 $f(z) = z^2 + c$ 的 Julia 集连通, 不含无理中性周期点且非无穷可重整, 则 f 的 Julia 集是局部连通的.

在 Yoccoz 的结果之后, 二次多项式 Julia 集的局部连通性研究分为两个方向, 一个是无穷可重整, 另一个是含有无理中性周期点的情况. 基于 Sullivan 对具有有界组合的无穷可重整实二次多项式建立的“复界” [710], 胡骏和蒋云平首先证明了 Feigenbaum 二次实多项式的 Julia 集是局部连通的 ([360], [383]). 通过对更多的单临界多项式证明复界的存在性 (见 §3.2), Julia 集的局部连通对于以下情形成立:

- 部分具有有界组合的无穷可重整二次多项式 [459], [390], [392], 具有有界组合的无穷 primitive 可重整二次多项式 [389], 具有有界组合的无穷 satellite 可重整二次多项式 [264], [265];
- 单临界实多项式 [433], 包括二次实多项式 [340], [466];
- 不含无理中性周期点, 且至多有限可重整的单临界多项式 [391].

作为 Branner-Hubbard-Yoccoz 拼图的进化, Kozlovski-沈维孝-van Strien 引入的 KSS 嵌套¹⁸⁾ [415], 以及 Kahn-Lyubich 发展的覆盖引理 [393] 被用来处理多临界多项式 Julia 集的局部连通性. 下列函数的 Julia 集被证明是局部连通的 (假定 Julia 集连通):

- 不含无理中性周期点, 且至多有限可重整的多项式 [417];
- 实多项式 [193].

对于含有无理中性周期点的情况, Petersen 利用三次 Blaschke 模型, 通过构造所谓的“Petersen 拼图”证明了 [555]:

定理 2.6 (Petersen) 对于任何有界型无理数 α , 二次多项式 $f(z) = e^{2\pi i\alpha}z + z^2$ 都有一个边界穿过临界点的 Siegel 盘, 其 Julia 集是局部连通的.

Yampolsky 利用临界圆周映射复界的存在性给出了上述定理的一个不同证明 [757], 但其证明仍需使用 Petersen 拼图. 该拼图与 Branner-Hubbard-Yoccoz 拼图非常不同: 由两个嵌套的 Petersen 拼图片的差得到的圆环永远是退化的, 因此证明局部连通性时无法使用 Grötzsch 模不等式. Petersen 的证明想法是通过圆周上的无理旋转来控制拼图片的大小. 通过类似的办法, 并基于退化 Beltrami 方程的研究 [213], Petersen 和 Zakeri 将前者的结果推广到了几乎所有的无理数 [562]. 最近, 在不依赖于拼图的情况下, Petersen 局部连通性的结果被推广到了一类含有有界型 Siegel 盘的有理函数和超越整函数 [740].

此外, 确实存在有理函数, 其 Julia 集连通但非局部连通. Douady 和 Sullivan 证明: 若多项式含有 Cremer 点 (即局部不可线性化的无理中性周期点, 见 §7), 或含有 Siegel 盘但其边界上不含临界点, 那么该多项式的 Julia 集一定非局部连通 (该条件称为 Douady-Sullivan 准则, 见 [248, p. 48],

17) McMullen 将重整划分为 α -型, β -型和不交型 [490]. 现在一般分为 satellite 可重整和 primitive 可重整. 见 [507], [509], [461].

18) 相比于经典的共形模 $\text{mod}(P_n(z) \setminus P_{n+1}(z))$ 求和计算, Lyubich 引入的加强版嵌套 (enhanced nest) 和 KSS 嵌套考虑的是形如 $P_n(z) \setminus P_{n+k}(z)$ 的圆环的模求和, 这样计算时模的“损失”更小, 模的求和级数更有可能发散, 从而更有可能得到局部连通的结论. 关于 KSS 嵌套的表格方法运用, 见 [545].

[707, p. 749], [511, §18]). Douady 和 Hubbard 在 80 年代构造了一个无穷 satellite 可重整且 Julia 集非局部连通的二次多项式 [507]. 更多非局部连通 Julia 集的例子可见¹⁹⁾ [694], [636], [429], [241].

尽管多项式的 Julia 集可能非局部连通 (比如含有 Cremer 点时), 但有界临界 Fatou 分支的边界却有很好的拓扑 (见 [641], [640]):

定理 2.7 (Roesch-尹永成) 多项式的有界 Fatou 分支, 如果不最终迭代到一个 Siegel 盘, 必为一个 Jordan 区域.

该定理的证明基于 KSS 嵌套和 Kahn-Lyubich 覆盖引理. 值得一提的是, Kahn-Lyubich 覆盖引理最近也被用在 Siegel 盘和 Herman 环的研究中 [770], [442]. 对于多项式的 Siegel 盘边界, 作为 Petersen-Zakeri 结果的推广, 目前最一般的结果是 [796]:

定理 2.8 (张高飞) 对几乎所有旋转数, 多项式的 Siegel 盘是一个 Jordan 区域.

关于 Siegel 盘边界拓扑的进一步研究, 涉及 Douady-Sullivan 猜想, 详见 §7.

目前所有已知的连通且非局部连通的有理函数 Julia 集, 造成非局部连通的原因都是某个 Fatou 分支的边界非局部连通, 而不是因为 Fatou 分支的直径不趋向于 0 (见引理 2.4). Roesch 在 2006 年提出下面的问题 [636]:

问题 2 (Roesch) 是否存在一个有理函数, 其 Julia 集连通且非局部连通, 但该有理函数的每个 Fatou 分支边界都是局部连通的?

上述问题的答案很可能是否定的, 也就是说一个有理函数的 Julia 集如果连通, 那么其 Fatou 分支的直径猜测应该趋向于 0. 一个与 Roesch 问题相关的猜想是:

猜想 3 (尹永成) 多项式 Fatou 分支的个数要么有限, 要么欧氏直径趋向于 0.

对于没有无理中性周期点且 Julia 集连通的多项式, 其 Julia 集局部连通当且仅当 Julia 集上没有游荡连续统²⁰⁾ (见 [407, p. 245], [428], [725]).

通过寻找拼图结构, 一些经典的有理函数 (非多项式) 的 Julia 集也被证明是局部连通的. Roesch 考虑了三次多项式的 **Newton 映射**, 利用割线 (cut rays, 类比于多项式的外射线) 构造拼图, 证明了多项式根所在的吸性 Fatou 分支总是 Jordan 区域, 且大部分 Julia 集是局部连通的 [638]. 特别地, 她证明了存在三次 Newton 映射, 使得下面两种情况都能发生:

- Julia 集局部连通但含有 Cremer 点;
- Julia 集局部连通但含有游荡的连续统 (且 Julia 集仅含斥性周期点).

这两个现象说明了有理函数与多项式的动力系统有很大区别.

三次多项式的 Newton 映射仅有一个自由临界点, 在可重整情形下其动力系统类比于二次多项式. 对于一般多项式的 Newton 映射, 会出现多个自由临界点. 利用 KSS 嵌套和 Kahn-Lyubich 覆盖引理等工具, 多项式 Newton 映射的根的吸引域边界被证明是局部连通的, 且在不可重整, 或可重整但不含 Siegel 盘等情形下 Julia 集也被证明是局部连通的 (见 [744], [260]). Hubbard 有如下猜想:

猜想 4 (Hubbard) 多项式 Newton 映射的 Julia 集总是局部连通的.

前文提到有理函数的 Julia 集如果不连通, 那么一定不局部连通. 此时可以考虑 Julia 分支的局部连通性和其它拓扑性质. 如果 Julia 分支是周期的, 根据 McMullen 的结果, 可以将该 Julia 分支

19) 目前所有已知的由无穷可重整二次多项式生成的非局部连通 Julia 集都是 satellite 类型的. 因此一个自然的问题是: 是否存在无穷 primitive 可重整的二次多项式, 其 Julia 集非局部连通?

20) 连续统 (continuum) 指的是非单点的连通紧集, 称它是游荡的指的是它的向前轨道两两不交.

转化为研究某个有理函数的连通 Julia 集的拓扑性质 [488]. 如果 Julia 分支游荡, 判断其拓扑性质是一个困难的问题. 如果一个有理函数的 Julia 集是一个 Cantor 集, 那么该 Julia 集上一定存在不可数多个游荡的单点 Julia 分支. 第一个具有非单点游荡 Julia 分支的有理函数由 McMullen 在 1988 年给出 [488]. 他证明当正整数 m, n 满足 $1/m + 1/n < 1$ 且参数 $\lambda \neq 0$ 充分小时, McMullen 映射 $f_\lambda(z) = z^m + \lambda/z^n$ 的 Julia 集是一个 Cantor 圆周 (同胚于一个标准的三分 Cantor 集和单位圆周的乘积), 且包含了不可数多个 Jordan 曲线型游荡 Julia 分支.

对于几何有限有理函数, 谭蕾和尹永成证明了周期 Julia 分支是局部连通的 [722], 而 Pilgrim 和谭蕾证明了游荡 Julia 分支要么是单点要么是一条 Jordan 曲线 [568]. 因此几何有限有理函数的每个 Julia 分支都局部连通. 一个 Julia 分支如果不是单点也不是 Jordan 曲线, 则称之为复杂型 Julia 分支. 一个 d 次多项式的复杂性分支循环不超过 $d - 1$ 个 [599], [417]. 对于给定次数 $d \geq 3$ 的有理函数, 复杂型周期 Julia 循环的个数可以任意多 [205]. 对于某些临界有限有理函数游荡连续统的拓扑性质可见 [201].

基于某种割线 (cut ray) 来构造拼图 [228], 邱维元, 王晓光和尹永成研究了 McMullen 映射 Julia 集的局部连通性 [593], 得到了与 [638] 平行的结果.

在对有理函数的 Julia 集进行局部连通性研究时, 最关键的部分是构造一个能将 Julia 集割开的不变集. 对于多项式可以用外射线, 对于 Newton 映射和 McMullen 映射可以用“割线”. 对于一些特殊的有理函数, 比如某些重整化变换函数, 可以用 Fatou 串构成的 bubble ray 将 Julia 集分开来证明局部连通性 [19] (部分结果见 [589]).

超越整函数 Julia 集的局部连通性虽然没有有理函数那么重要, 但也引起了很多人的兴趣. 对于超越整函数的有界周期 Fatou 分支, 人们猜测它们也和多项式一样, 为 Jordan 区域. 但游荡域的边界拓扑以及 Julia 分支的拓扑却可以非常复杂 [480], [481]. 关于超越整函数 Julia 集局部连通性的研究可见 [522], [535], [83], [541], [11] 以及其中的参考文献.

2.4 Julia 集的面积和 Hausdorff 维数

关于一个无处稠密的有理函数 Julia 集是否总是具有零面积 (2 维 Lebesgue 测度) 的问题可以追溯到上世纪初的 Fatou [299]. 他证明了一类 Cantor Julia 集具有零面积. 上世纪 80 到 90 年代, 有很多有理函数的 Julia 集 (如果不是整个球面) 被证明具有零面积 (事实上它们的 Hausdorff 维数被证明严格小于 2): 几何有限 [256], [452], 临界非回归 [736], [776], 满足 Collet-Eckmann 条件 [576], 满足可和性条件且指标较小 [338] (也可参见 [629], [139]), 具有向后压缩性质 [631] 等. 对于二次多项式, Lyubich 和 Shishikura 在上世纪 90 年代独立地证明了下面的结果 [456], [669]:

定理 2.9 (Lyubich, Shishikura) 如果一个二次多项式没有无理中性周期点也不是无穷可重整的, 那么其 Julia 集面积为零.

对于某些含有 Siegel 盘 (见 [555], [494], [757], [562]) 和某些无穷可重整的二次多项式 (见 [771], [29], [261]), Julia 集也被证明具有零面积. Julia 集的零面积在证明有理函数的刚性过程中起到关键作用. 特别地, 如果所有多项式的 Julia 集面积都为零, 那么多项式的双曲稠密猜想成立 (见 §3). 证明 Julia 集具有零面积的主要方法之一是通过各种偏差定理, 证明 Julia 集上几乎每一点都不是 Lebesgue 密度点.

2005 年, Buff 和 Chéritat 完成了 Douady 在上世纪 90 年代制定的计划, 通过扰动二次多项式, 证明了存在正面积的二次多项式 Julia 集²¹⁾ (见 [149], [145], [179]):

定理 2.10 (Buff-Chéritat) 存在二次多项式, 其 Julia 集具有正面积. 这样的二次多项式可以含有 Cremer 点, 或者含有 Siegel 点, 或者是无穷可重整的.

Buff 和 Chéritat 的证明本质地用到了 Inou-Shishikura 发展起来的近抛物重整理论 [374]. 该理论可以很好地控制二次映射的临界轨道 (见 [149], [173]). 同样基于该理论 (以及 [29] 中的结果), Avila 和 Lyubich 证明了某些 Feigenbaum 二次多项式的 Julia 集具有正面积且是局部连通的. 这个结果比较违反直觉: 一般认为具有正面积的多项式 Julia 集, 其拓扑应该是“坏”的. 但 Avila 和 Lyubich 的结果告诉我们: 多项式 Julia 集的正面积和局部连通可以兼容²²⁾. 利用 Dudko-Lyubich-Selinger 发展的 pacman 重整理论 [266], Dudko 和 Lyubich 证明了存在具有有界组合的无穷 satellite 可重整二次多项式, 其 Julia 集具有正面积且局部连通²³⁾ [264].

尽管 Julia 集的局部连通和正面积可以兼容, 但另一方面, 非局部连通和零面积是否一定不能兼容还不清楚. 下面的问题可见 [95, p. 443], [179]:

问题 5 (Milnor) 是否存在含 Cremer 点的有理函数, 其 Julia 集面积为零?

利用类多项式重整理论, 可以将 Buff-Chéritat 的结果推广到任意次的多项式. 事实上, 利用 Chéritat 最近构造的具有任意局部映射度的抛物重整不变类 [182], 结合 McMullen 和 Cheraghi 的工作 [494], [173], 可以证明对任意的 $d \geq 2$, 存在单临界多项式 $f(z) = z^d + c$, 其 Julia 集具有正面积且 f 含有 Cremer 点, 或者 Siegel 点, 或者是无穷可重整的 [768]. 一个自然的问题是:

问题 6 是否存在不含无理中性周期点且不可重整的多项式 ($\deg \geq 3$), 其 Julia 集有正面积?

目前已知的具有正面积 Julia 集的二次多项式都是复系数的. Avila 和 Lyubich 提出了下面的问题 [31]:

问题 7 (Avila-Lyubich) 是否存在实数 c , 使得 $f(z) = z^2 + c$ 的 Julia 集有正面积?

关于二次多项式 Julia 集的面积, 更多的问题可见 [179, §4.2].

在 Sullivan 的字典中, 有理函数 Julia 集 $J(f)$ 的面积和有限生成 Kleinian 群极限集 $\Lambda(\Gamma)$ 的面积都受到很大关注. 著名的 Ahlfors 面积猜想断言: 如果 $\Lambda(\Gamma)$ 不为整个球面, 那么其面积为零. 这个猜想在本世纪初由 Agol 和 Calegary-Gabai 独立解决了 (见 [3], [161]). 这是 Kleinian 群与有理函数动力系统的显著差异之一.

次数大于 1 的有理函数 Julia 集的 Hausdorff 维数一定严格大于 0 [322]. 前文提到了很多类型有理函数的 Julia 集 Hausdorff 维数严格小于 2, 除了几何有限, 临界非回归, 满足 Collet-Eckmann 条件, 满足可和性条件且指标较小, 还包括所有含有有界型 Siegel 盘的二次多项式 [494], 某些无穷可重整的二次多项式 [29]. 为了说明 Julia 集的 Hausdorff 维数小于 2, 可以通过证明 Julia 集是一致疏朗 (uniformly porous) 集, 这主要基于沿临界轨道的扩张性质, 并利用 Poincaré 级数, 共形测度等工具. 注意证明 Julia 集具有零面积时只需说明非一致疏朗.

21) Nowicki 和 van Strien 在 1994 年宣布证明了存在充分大的 d , 使得实多项式 $f(z) = z^d + c$ 的 Julia 集具有正面积. 但 Buff 在 1997 年找到了证明中的一个缺陷 (见 [142], [704, p. 563]).

22) 基于 [149] 和 [31], 利用类多项式重整理论, 可以在 McMullen 映射族中找到具有正面积的 Sierpiński 地垓型 Julia 集 (该类型 Julia 集自动局部连通) [311].

23) 目前已经有了 3 类无穷可重整的二次多项式, 其 Julia 集具有正面积. 一个自然的问题是: 是否存在具有有界组合的无穷 primitive 可重整二次多项式, 其 Julia 集具有正面积?

Hausdorff 维数等于 2 的非球面有理函数 Julia 集最先由 Shishikura 给出 [670]. 特别地, Shishikura 证明了存在含无理中性不动点 (详细刻画可见 [176]) 和不可重整的二次多项式, 其 Julia 集的 Hausdorff 维数等于 2. Avila 和 Lyubich 证明了面积为零且 Hausdorff 维数等于 2 的 Feigenbaum 二次 Julia 集的存在性 [29], [31]. 满足该性质的 Cantor Julia 集例子可见 [764].

多项式的 Julia 集, 如果不是 Cantor 集, 也不是圆周或线段, 其 Hausdorff 维数一定严格大于 1 [580]. 对于有理函数, 其单连通的吸引域边界如果不是圆周或线段, 则其 Hausdorff 维数严格大于 1 [574]. 单连通抛物域边界的 Hausdorff 维数研究可见 [735]. 关于 Siegel 盘边界的 Hausdorff 维数和面积问题, 见 §7.

对于双曲有理函数, 其 Julia 集的 Hausdorff 维数有如下精确计算公式 (见 [120], [814, §5.3]):

定理 2.11 (Bowen 公式) 若 f 是一个次数至少为 2 的双曲有理函数, 则其 Julia 集 $J(f)$ 的 Hausdorff 维数 $s > 0$ 是下面函数的唯一零点:

$$s \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{z \in f^{-n}(z_0)} |(f^{o n})'(z)|^{-s},$$

其中 z_0 是 $J(f)$ 上任意给定点.

与此公式相关的理论被称为热力学形式 (thermodynamic formalism) [737], [497], [54], [575]. 利用 Bowen 公式, Ruelle 证明了双曲有理函数 Julia 集的 Hausdorff 维数是实解析依赖于参数的并给出了 $f_c(z) = z^2 + c$ 的 Julia 集的 Hausdorff 维数在 $c = 0$ 处的二阶展开 [648]. 此后, 更一般的函数族和更高阶的 Hausdorff 维数展开也得到了研究 [194]. 基于 Bowen 公式, 有很多同胚于 Cantor 集或圆周的 Julia 集的 Hausdorff 维数渐近展开得到了计算. 第一个非 Cantor 集且非拟圆周 Julia 集的 Hausdorff 维数的渐近展开可见 [596], [445]. 在 Bowen 公式基础上进一步计算 Julia 集 Hausdorff 维数的方法包括特征值算法 [493], 周期点算法 [379] 等.

Bowen 公式对某些含抛物点的有理函数也成立 [224]. 二次多项式 Julia 集的 Hausdorff 维数在抛物参数处是不连续的 [259], [813]. McMullen 将该结论推广到一般情形的同时还考虑了使得 Hausdorff 维数在抛物参数处连续变化的路径 [495] (也可见 [630]). Julia 集的 Hausdorff 维数限制在实参数上的性质, 包括连续性, 上下界, 左右导数等可见 [349], [377], [378].

在估计 Hausdorff 维数时, 上界相对容易得到, 通过找一系列特殊的覆盖即可. 下界则困难一些, 可通过 Frostman 引理 [483, p. 112]. 共形测度是用来估计 Julia 集 Hausdorff 维数的一个重要工具之一. Sullivan 证明了任意次数大于 1 的有理函数 Julia 集上都存在共形测度. 由共形测度可以定义共形维数. Sullivan 证明当有理函数双曲时, Julia 集上的共形测度唯一且共形维数等于 Hausdorff 维数 [707]. 之后, 共形维数和 Hausdorff 维数相等的情况在一些非双曲有理函数中也得到了 (见 [736], [573], [29], [438], [792] 及其中的参考文献). 在此过程中, 拓扑压 (topological pressure), Poincaré 级数, Lyapunov 指数, 双曲维数, 锥点 (conical point) 等起到重要作用 (见综述 [737] 和专著 [579]).

复球面的一个紧子集 X 的 Ahlfors 正则共形维数是指所有与 X 拟对称等价的度量空间的 Hausdorff 维数的下确界. 事实上, Ahlfors 正则共形维数可以对任意度量空间定义, 该概念来自于双曲几何 [540]. 有理函数 Julia 集的 Ahlfors 正则共形维数的研究可见 [469], [166], [404], [543], [596].

动力系统可以用来研究经典分形集合的 Hausdorff 维数, 最近一个引人注目的结果是关于 Weierstrass 函数图像的 Hausdorff 维数 [664], [620].

超越整函数 Julia 集的 Hausdorff 维数和面积的结果非常丰富. 与有理函数的情况相反, 超越函数的 Julia 集更容易出现面积为正, Hausdorff 维数等于 2 的情形 [487], [15]. 超越整函数 Julia 集的 Hausdorff 维数至少等于 1, 事实上可以取到闭区间 $[1, 2]$ 中的任何值 [697], [97]. 更多的结论见 §8.3.

2.5 可测动力学与统计性质

对于非线性复动力系统, 很多时候无法判断给定某一点的轨道的极限行为, 但可以通过统计的观点得到一些确定的结论. Sullivan 在上世纪 80 年代证明: 对于有理函数, 可以定义共形测度使得它在 Julia 集上具有紧支撑 [707]. 对于双曲有理函数, Julia 集的 2 维 Lebesgue 测度为零, 其上的 Hausdorff 测度有限非零且等价于某个 δ -共形测度. 若 Julia 集具有正面积, 那么 2 维 Lebesgue 测度是一个 2-共形测度. 共形测度能够反映 Julia 集的几何性质. 研究动力系统复杂性的一个途径就是寻找关于系统的一个自然遍历测度.

定义 (遍历) 对于有理函数 f , 若任意满足 $X = f^{-1}(X)$ 的 Lebesgue 可测集 $X \subset \widehat{\mathbb{C}}$ 都蕴含着 X 为零测集或 $\widehat{\mathbb{C}} \setminus X$ 为零测集, 则称 f (关于 Lebesgue 测度) 是**遍历的** (ergodic).

任何次数大于 1 的有理函数 f 的**后临界集** (post-critical set) $P(f)$ 为 f 的所有临界值的向前轨道的并的闭包. 下面的结果刻画了有理函数 Julia 集中点的典型极限行为 (见 [452], [490, §3.3]):

定理 2.12 (Lyubich, McMullen) 若 f 是一个次数大于 1 的有理函数, 则:

- $J(f) = \widehat{\mathbb{C}}$ 且 f 是遍历的; 或者
- 对几乎所有的 $z \in J(f)$, 当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $f^{on}(z)$ 与 $P(f)$ 的球面距离趋于 0.

如果有理函数关于 Lebesgue 测度遍历, 那么在某种程度上反映了该动力系统不能作进一步分解. 如果有理函数不是遍历的, 那么能分解成多少个遍历分支是一个受关注的问题. 下面的问题可见 [472, p. 460], [350, p. 56], [95, p. 448]:

问题 8 (Mañé, Sullivan, Lyubich) 若 d 次有理函数 f 的 Julia 集为整个球面, 那么 f 关于 Lebesgue 测度是否遍历? f 是否至多有 $2d - 2$ 个遍历分支?

具有遍历性质的有理函数可见 [601], [107], [477], [572], [573]. 关于遍历分支的研究有 [455], [661], [706], [441], [27] 等. 下面的问题见 [31, p. 7]:

问题 9 (Avila-Lyubich) 是否存在无理数 α , 使得 $f(z) = e^{2\pi i \alpha} z + z^2$ 的 Julia 集具有正面积且 f 关于 Lebesgue 测度是遍历的?

关于动力系统遍历论的研究可见专著 [579]. 关于超越函数的遍历性, 可见 [519] 以及综述 [412].

除了遍历性质, 一维动力系统中的一个重要问题是: 区间映射是否存在一个关于 Lebesgue 测度绝对连续的不变概率测度 (英文缩写为 acip). 对于具有负 Schwarz 导数的紧区间上的单临界 C^3 实映射, Bruin, 沈维孝和 van Strien 证明了当该映射的迭代在临界值处的导数绝对值均大于某个常数时, 有 acip [137]. 这推广了之前要求映射满足可和性等条件的结果 [196], [533], [478].

对于多临界点的情形, acip 在大导数的条件下得到了证明 [136], 这推广了 [518] 等文中的结果. 关于 acip 的存在性还可见 [376], [463], [138], [577], [632] 及其中的参考文献. 其它的统计性质可见 [437], [318].

吸引子 (attractor) 至今还没有一个非常完善的定义 (类似于分形). 关于各种吸引子的概念可见 [503]. 对于一个紧区间 I 上的自映射 $f: I \rightarrow I$, 其任意一点 x 的 ω -极限集 $\omega(x)$ 定义为 x 的

向前轨道的聚点集. 一个向前不变的紧集 $A \subset I$ 称作是**度量吸引子** (相应地, **拓扑吸引子**), 如果 $B(A) := \{x \in I : \omega(x) \subset A\}$ 具有正测度 (相应地, Baire 第二纲集) 且对任意的向前不变紧子集 $A' \subsetneq A$, $B(A')$ 具有零测度 (相应地, Baire 第一纲集). Milnor 在文章 [503] 中提出了怎样对吸引子分类的问题, 同时还问对于给定的光滑单峰映射, 度量吸引子是否总是拓扑吸引子? 如果不是, 那么这样的吸引子称为**野生吸引子** (wild attractor).

对于具有负 Schwarz 导数和一个二阶临界点的 C^3 映射, Lyubich 证明度量吸引子只有 3 种类型, 且它们同时也是拓扑吸引子: (1) A 是一个非斥性周期循环; (2) A 是一个周期区间循环; (3) A 是一个螺线型的 Cantor 集 (一系列闭区间循环的可数交) [457]. 利用 Kozlovski 的想法 [413], Graczyk, Sands 和 Świątek 在去掉具有负 Schwarz 导数这个条件的情况下证明了同样的结论 [335]. 而第 4 类吸引子——野生吸引子 (也为 Cantor 集) 确实存在 [135]. 解决 Milnor 关于吸引子的问题主要依赖于对含二阶临界点的光滑映射建立几何衰减 (decay of geometry) 性质 [336], 一般用的是复方法. 沈维孝用纯实的方法对更广泛的函数类得到了该性质 [663].

Cantor 吸引子的测度为零 [477], [706]. 进一步, 李思敏和沈维孝证明了它们的 Hausdorff 维数一致小于 1 (仅依赖于临界点的局部度) [439].

2.6 淹没点和奇异扰动

前文提到, 若 Fatou 分支的边界有好的拓扑, 则可以通过 Fatou 分支上的动力系统来研究其边界 (为 Julia 集的子集) 上的动力系统. 然而并不是所有 Julia 集中的点都落在 Fatou 分支的边界上.

定义 (淹没点和分支) 非球面 Julia 集上的一点如果不落在任何 Fatou 分支的边界上, 则称之为**淹没点** (buried point). 一个非球面 Julia 分支称作是淹没分支, 如果该分支上每一点都不落在 Fatou 分支的边界上.

显然, 如果有理函数含一个完全不变的 Fatou 分支 (比如多项式), 那么其 Julia 集不含淹没点, 因为该完全不变 Fatou 分支的边界是整个 Julia 集. McMullen 在 1988 年第一个给出了 Julia 集上含淹没点的有理函数. 他构造的 Julia 集是一个 Cantor 圆周, 包含了不可数多个淹没的 Jordan 曲线分支 [488]. 在上世纪 80 年代末, 作为与 Kleinian 群的类比, Makienko 提出了下面的猜想 [279, p. 578]:

猜想 10 (Makienko) 如果有理函数 f 的二次迭代 $f^{\circ 2}$ 没有完全不变的 Fatou 分支, 则 f 的 Julia 集含有淹没点.

这个猜想考虑 f 的 2 次迭代而不是 f 本身, 目的是为了排除类似于 $z \mapsto 1/z^2$ 这样的有理函数. Makienko 猜想在以下情形是成立的: Julia 集不连通且每个 Fatou 分支的连通数有限 [57]; Julia 集不连通, 或连通且局部连通 [584] (部分特殊情形见 [521], [523]); Julia 集是一个可分割的连续统²⁴ [211] (部分特殊情形见 [713]). 注意不可分割的 Julia 集猜测是不存在的 [485], 因此 Makienko 猜想极有可能成立. 此外, 淹没点在 Julia 集中的分布性质等可见 [521], [246]. 高延, 杨璐鲜和曾劲松研究了双曲分支边界上含淹没临界点的几何有限有理函数 [321].

McMullen 证明 5 次的有理函数 $f(z) = z^2 + \lambda/z^3$ 当 $\lambda \neq 0$ 充分小时有淹没 Julia 分支. 他提出一个问题 [488, p. 55]: 能否找到一个次数小于 5 的简单有理函数, 也具有淹没的 Julia 分支? 在

²⁴ 不可分割的连续统指的是不能写成两个连通真子集的并的非单点连通紧集 (注意这两个连通真子集允许相交). 有理函数的动力系统中尚未出现这样的 Julia 分支, 但超越动力系统可以 [481].

Beardon 给出了首个一般的充分条件后 [57], 乔建永于 1995 年给出了有理函数 Julia 集存在淹没分支的充分必要条件 [583]:

定理 2.13 (乔建永) 若 f 是一个 Julia 集不为球面的有理函数, 则 $J(f)$ 含淹没分支的充要条件是 f 的 Julia 集非连通且 Fatou 集没有完全不变分支.

根据上述定理, 要判断一个有理函数是否含有淹没 Julia 分支就变得容易了. 但要构造非单点也非 Jordan 曲线的淹没 Julia 分支, 则需要进一步分析.

McMullen 的例子是通过 z^2 作奇异扰动得到的. 通过类似的扰动可以得到许多含淹没 Julia 分支的有理函数, 它们的次数至少为 5 且淹没分支为单点或 Jordan 曲线. 直到 2015 年, Godillon 利用 Thurston 定理找到了一个 3 次有理函数, 其 Julia 集包含了一个淹没的 Julia 分支, 该分支既非单点也非 Jordan 曲线 [329]. 注意二次有理函数的 Julia 集要么连通要么为 Cantor 集, 因此回答 McMullen 问题的最好结果就是次数等于 3 的有理函数. 利用新的奇异扰动方法 (在临界值处作扰动), 王有明和本文作者找到了更多能够回答 McMullen 问题的 3 次和 4 次有理函数. 特别地, 大部分连通 Julia 集都可以淹没地嵌入到更高次有理函数的 Julia 集中 [745].

多项式的奇异扰动研究的课题主要包括 Julia 集的连通性, 局部连通性, 淹没 Julia 分支的存在性, 参数空间中双曲分支的计数和边界的正则性等 [238], [635], [702], [593], [591], [754], [755]. 更多与奇异扰动有关的问题可见 [229] 和其中的参考文献. 除了 [488], Julia 集为 Cantor 圆周的有理函数动力系统还可见: [238], [754], [597], [308], [743], [448].

超越整函数的淹没点问题是由乔建永最先开始研究 [582]. 其它与超越函数淹没分支相关的问题可参考 [583], [584], [43], [246].

2.7 其它性质

限于篇幅, 还有很多关于有理函数 Julia 集及其子集的性质不能完全展开, 这里简要说明其中一部分. 多项式外射线的着陆 (landing) 情况在构造拼图时非常关键. Douady-Hubbard 证明了如下着陆定理: 假定多项式连通, 那么每条周期外射线都着陆在一个斥性或抛物周期点. 反之, 每个斥性或抛物周期点都是至少一条周期外射线的着陆点 [248], [277], [554], [511, §18]. 假定多项式 f 的 Julia 集 $J(f)$ 局部连通, 其上的一点 ξ 称为分支点 (branching point), 如果 $J(f) \setminus \{\xi\}$ 至少含有 3 个连通分支. Thurston 证明对于二次多项式, 若 ξ 为分支点, 则 ξ 要么预周期要么预临界 [725]. 但这对高次多项式不成立 [109], [143].

两个函数 f 和 g 称作可交换, 如果 $f \circ g = g \circ f$. Fatou 和 Julia 证明了若有理函数 f 和 g 可交换, 则它们有相同的 Julia 集 [299], [386]. 而 Ritt 给了所有可交换的有理函数类一个完整的刻画 [628], 但没有涉及迭代方法. Eremenko 以最大熵测度为工具, 用迭代的方法给出了 Ritt 结果新的证明 [276]. 反过来, 若有理函数 f 和 g 具有相同的 Julia 集, 那么在一些情况下可以推出 f 和 g 可交换 [45]. 通过最大熵测度刻画有理函数可交换性的研究还可见 Levin-Przytycki, 叶和溪, Dujardin-Favre-Gauthier 等工作 [431], [772], [270].

复球面的一个紧子集 E 是一致完全的 (uniformly perfect), 如果 E 至少有两点且 $\widehat{\mathbb{C}} \setminus E$ 中任何分离 E 的圆环的共形模有一致上界. 任何次数大于 1 的有理函数 Julia 集都是一致完全集 [475], [164, p. 64].

关于 Julia 集在 Hausdorff 拓扑意义下变化的连续性, Douady 证明了对于没有持续中性周期点的全纯多项式族 $\mathcal{F} = \{f\}$, 其填充 Julia 集 $K(f)$ 在 f_0 处连续当且仅当 f_0 没有抛物点, 其 Julia 集 $J(f)$ 在 f_0 处连续当且仅当 f_0 没有抛物点和 Siegel 点 [251]. 邱维元和尹永成在上世纪 90 年代初也独立地证明了该结论 (未全部发表, 部分结果见 [775]). 伍胜健研究了全纯有理函数族 Julia 集变化的连续性, 证明了 Julia 集在 f_0 处连续当且仅当 f_0 没有抛物点和旋转域 [752]. 更多关于特殊 Julia 集连续变化的结论可见 [495], [401], [402], [209]. 有理函数 Julia 集对复平面紧子集的逼近可见 [444].

3 双曲猜想

3.1 双曲与结构稳定性

如果一个有理函数的所有临界点都被吸性周期轨道所吸引, 那么该有理函数称作是 **双曲** (hyperbolic) 的. 复动力系统领域中的一个中心猜想是:

猜想 11 (双曲稠密性猜想) 双曲有理函数在有理函数空间中是开且稠密的.

容易看出双曲性是一个开的条件, 但稠密性至今尚未完全解决. 双曲稠密性的问题最早可以追溯到上世纪 20 年代初的 Fatou, 因此双曲稠密性猜想也称为 Fatou 猜想 (见 [299, p. 73], [490, §4.1]).

动力系统中的双曲性一般可以通过 Smale 的“公理 A”来描述 [688]. Smale 在上世纪 60 年代让他的学生把上述双曲稠密性的问题作为博士论文课题, 得到了肯定的回答, 但后来发现证明有误 [689, p. 282]. 在那之前, 人们甚至相信双曲系统在所有维数中都是稠密的. 可到了 60 年代后期, 人们发现对维数 ≥ 2 的流形上的微分同胚这是不对的 [687], [528]. 对于一维的情形, Jakobson 证明了紧区间到自身的双曲映射在 C^1 拓扑下是稠密的 [375], Blokh 和 Misiurewicz 部分解决了 C^2 拓扑的情形 [108], 沈维孝于 2004 年完全解决了 C^2 拓扑下双曲稠密性的问题 [662].

上世纪 90 年代, McMullen 证明: 如果 c 落在一个与实轴相交的 Mandelbrot 集的内部分支, 那么二次多项式 $z \mapsto z^2 + c$ 是双曲的 [490, p. 174]. 一个重大进展出现在 1997 年, Graczyk-Świątek 和 Lyubich 独立地证明了双曲映射在实二次多项式中是稠密的 (见 [341], [342], [459]). 他们的证明非常依赖于二次多项式只有一个二次的临界点. 2003 年, Kozlovski 证明了双曲映射在任意整数阶光滑 (包括无穷阶和实解析) 单峰区间映射空间中是稠密的 [414]. Kozlovski, 沈维孝和 van Strien 合作完全解决了实一维动力系统的双曲稠密性问题 [416]:

定理 3.1 (Kozlovski-沈维孝-van Strien) 任何实多项式²⁵⁾都可以被同次数的双曲实多项式逼近. 特别地, 双曲映射在 C^k 光滑区间映射空间中是稠密的, 其中 $k = 1, 2, \dots, \infty, \omega$.

根据 Douady-Hubbard 的整理定理 (Straightening Theorem) [257, p. 296], 任何类多项式 $f : U \rightarrow V$ 都混合等价²⁶⁾ (hybrid equivalent) 于一个相同次数的多项式 g , 且若填充 Julia 集 $K(f)$ 连通, 则 g 在相差一个仿射共轭的意义下是唯一的. 类多项式的概念后被推广为复盒子映射²⁷⁾ (complex box mapping), 见 [417].

对于复系数多项式的双曲稠密性, Kozlovski 和 van Strien 证明了任何仅具有双曲 (即非中性) 周期点的有限可重整多项式都可以被一个双曲多项式逼近 [417]. 彭文娟, 尹永成和翟羽证明了任何

25) 实多项式指的是系数为实数, 且所有的临界点也落在实轴上的多项式. 实有理函数的定义类似.

26) 即存在一个定义在 $K(f)$ 邻域内的拟共形共轭 ϕ 使得其限制在 $K(f)$ 上有 $\bar{\partial}\phi = 0$.

27) 复盒子映射之前也被称为类多项式盒子映射 (polynomial-like box mapping), 见 [662], [415].

具有 Cantor Julia 集的有理函数都可以被另一个具有 Cantor Julia 集的双曲有理函数逼近 [548].

定义 (结构稳定) 两个有理函数 f 与 g 称作是**拓扑共轭**的, 如果存在一个同胚 $\phi: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ 使得 $\phi \circ f \circ \phi^{-1} = g$. 有理函数 f 称作是**结构稳定的**, 如果它与其某个邻域内的所有有理函数都是拓扑共轭的.

下面的结论与双曲稠密性猜想密切相关 [476], [451]:

定理 3.2 (Mañé-Sad-Sullivan, Lyubich) 结构稳定的有理函数是开且稠密的.

根据定理 3.2, 为解决双曲稠密性猜想, 只需证明任何结构稳定的有理函数一定双曲. 在光滑动力系统, 已经知道结构稳定或双曲的稠密性对高维流形上的微分同胚不成立, 但 Mañé 证明任何结构稳定的 C^1 微分同胚一定是双曲的 [473]. 在 Sullivan 的字典中 [708], 他将有限生成的 Kleinian 群看作平行于有理函数的对象, 并在 1985 年证明了结构稳定的有限生成 Kleinian 群一定是双曲的 [709], 但这样的群在整个有限生成 Kleinian 群中是否稠密当时并不清楚. 直到 2004 年, Brock 和 Bromberg 给出了肯定的回答 [131]. 最近, 双曲和结构稳定性在高维复动力系统中得到了广泛关注 [271], [73], [91], 但它们的稠密性并不成立 [268].

Mañé 在 1985 年证明了带有 Herman 环的有理函数不是结构稳定的 [472]. Julia 集的稳定性的可以用来刻画有理函数的结构稳定性, 其各种等价刻画可见 [490, §4.1]. 有理函数的结构稳定性可以通过不变线域的存在性来研究.

定义 (不变线域) 设 $E \subset \widehat{\mathbb{C}}$ 为可测集, 称 $\{L_z : z \in E\}$ 为有理函数 f 的一个**不变线域** (invariant line field), 如果 L_z 是 z 的切空间 $T_z \widehat{\mathbb{C}}$ 的一个 1 维实子空间, 且有:

- E 具有正面积;
- $f^{-1}(E) = E$;
- L_z 的斜率关于 z 的变化是可测的; 且
- 对于所有 z , 导数 f' 将 L_z 映入 $L_{f(z)}$.

如果 E 包含在 Julia 集 $J(f)$ 中, 则称 f 在其 Julia 集上有一个不变线域.

注意到 f 在其 Julia 集上有不变线域的前提条件是其 Julia 集有正面积. 特别地, 当 Julia 集为整个 Riemann 球面时具有正面积, 且这样的有理函数在给定次数的有理函数空间中具有正测度 [601].

Lattès 在 1918 年最先构造出了 Julia 集为整个 Riemann 球面的有理函数, 他的构造想法如下 (见 [420], [491], [512]): 考虑复环面 $X = \mathbb{C}/\Lambda$, 其中 $\Lambda = \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$ 是复平面上的格点. 给定正整数 $n \geq 2$, 并令 $F(x) = nx : X \rightarrow X$ 为次数等于 n^2 的全纯自同态. 由于 F 是一致扩张的, 容易看出 F 的斥性周期点在环面 X 上稠密. 因此 F 的 Julia 集是整个 X . 环面 X 通过等价关系 $x \sim -x$ 得到的商空间是 Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$, 且商映射 $\varphi : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ 可以由 Weierstrass \wp -函数给出, 它通过 X 将球面覆盖了两次. 因为 $F(-x) = -F(x)$, 于是 F 的动力系统诱导了 Riemann 球面到自身的一个有理函数 f , 使得 $\varphi \circ F = f \circ \varphi$ 且 f 的 Julia 集等于整个 Riemann 球面. 由该构造得到的有理函数 f 是通过一个整体环面自同态的双层覆盖 (double covered by an integral torus endomorphism) 得到的, 称之为 **Lattès 映射**. 注意 f 在其 Julia 集上有不变线域: F 保持水平直线族不变, 这些水平直线族在环面上形成了平行的简单闭测地线族, 通过商映射投影后得到 Riemann 球面上的 f -不变叶状结构 (foliation), 即为 f 的一个不变线域.

猜想 12 (不变线域猜想) 有理函数在其 Julia 集上没有不变线域, 除非它是一个 Lattès 映射.

一个有理函数如果是结构稳定的, 并且其 Julia 集上没有不变线域, 那么它一定是双曲的 [498, 定理 9.3]. 因此不变线域猜想强于双曲稠密性猜想 (见 [476], [498]):

定理 3.3 如果有理函数的不变线域猜想成立, 那么双曲稠密性猜想成立.

相比于双曲稠密性猜想, 考虑不变线域猜想的一个优点在于: 原来证明双曲稠密性猜想需要研究一族有理函数, 现在只需研究单个有理函数的遍历性质. 作为对不变线域猜想的一个支撑, Sullivan 证明了有限生成的 Kleinian 群极限集上没有不变线域 [709].

已经知道对于以下情况, Julia 集上没有不变线域:

- 非无穷可重整且没有中性周期点的多项式 [417], 包括相应的二次多项式 [365];
- 实多项式 [193], 包括实二次多项式和无穷可重整的实单临界多项式 [490], 以及仅有一个非逃逸临界点的实多项式 [434], [435];
- 鲁棒的 (robust) 无穷可重整二次多项式, 以及临界有限的非 Lattès 映射 [490];
- 弱双曲的非 Lattès 有理函数 [347];
- 临界点为偶数阶且都在实轴上的非 Lattès 有理函数 [661];
- 某些满足可和性条件的非 Lattès 有理函数 [338], [471];
- Julia 集为 Cantor 集有理函数 [777].

特别地, 若 Julia 集面积为零, 那么其上自然没有不变线域. 关于 Julia 集零面积的结果见 §2.4.

3.2 刚性

考虑一个以复流形 Λ 为参数空间的非常值全纯有理函数族 \mathcal{F} , 比如一族次数为 d 的有理函数, 一族次数为 d 的多项式, 或者特别地, 一族复的单临界多项式

$$f_c(z) = z^d + c, \quad \text{其中 } d \geq 2, c \in \mathbb{C}. \quad (3.1)$$

称函数族 \mathcal{F} 中的两个映射 f, g 属于同一组合等价类, 拓扑等价类, 或拟共形等价类, 如果 f, g 落在 Λ 的一个连通子集中, 且使得其中的所有映射都是组合等价, 拓扑共轭, 或拟共形共轭的.

粗略地说, \mathcal{F} 中的两个有理函数称作是组合等价的, 如果对动力系统平面进行划分后它们在任何深度都有相同的组合. 对于两个多项式, 如果它们的有理角度外射线的着陆模式相同, 则称它们是组合等价的. 这里的外射线着陆模式可以通过 lamination (见 [489, §5]) 或 orbit portrait (见 [331], [509]) 来刻画. 对于 (3.1) 定义的单临界多项式, 其对应的 **Multibrot 集** 为:

$$M_d := \{c \in \mathbb{C} : \{f_c^{o^n}(0)\}_{n \geq 0} \text{ 有界}\}.$$

Multibrot 集的一个等价定义是 $\{c \in \mathbb{C} : J(f_c) \text{ 连通}\}$. 特别地, 当 $d = 2$ 时, M_d 即为著名的 **Mandelbrot 集** (见图 3). 对于单临界多项式 $f_{c_1}, f_{c_2} \in M_d$, 组合等价有如下等价定义: 如果 c_1, c_2 落在由有理角度参数射线形成的相同闭区域嵌套序列中 (每个闭区域由有限个 wakes 作差后取闭包, 见 [365]), 则 f_{c_1}, f_{c_2} 是组合等价的. 特别地, 两个无穷可重整的 f_{c_1}, f_{c_2} 是组合等价的, 如果 c_1, c_2 落在相同的 Multibrot 集复制像构成的无穷嵌套序列中 (见 [459], [650], [28], [171]).

与多项式不同, 一般的有理函数可能没有外射线或好的动力系统划分, 无法通过上述方法定义组合等价, 但对类多项式和复盒子映射是可以定义的 (见 [459], [417]). 特别地, 组合等价对有拼图

(puzzle) 结构的有理函数可以定义, 如多项式的 Newton 映射, McMullen 映射等. 当下文中提到组合等价时, 均认为组合等价是可以定义的²⁸⁾.

定义 (刚性) 全纯有理函数族 \mathcal{F} 中的映射 f 在 \mathcal{F} 中的组合等价类, 拓扑等价 (共轭) 类, 和拟共形等价 (共轭) 类 (商去共形等价类) 分别记作 $\text{Com}(f)$, $\text{Top}(f)$ 和 $\text{QC}(f)$. 它们显然满足 $\text{Com}(f) \supset \text{Top}(f) \supset \text{QC}(f)$. 称 f 具有**组合刚性**, **拓扑刚性**, 或**拟共形刚性**, 如果分别有²⁹⁾ $\text{Com}(f) = \{f\}$, $\text{Top}(f) = \{f\}$ 或 $\text{QC}(f) = \{f\}$.

下面的猜想可见 [458], [489], [459].

猜想 13 (刚性猜想) 对于没有持续中性周期点的全纯有理函数族 \mathcal{F} , 若 $f \in \mathcal{F}$ 非双曲且不是 Lattès 映射, 则有

- (组合刚性猜想) $\text{Com}(f) = \{f\}$;
- (拓扑刚性猜想) $\text{Top}(f) = \{f\}$;
- (拟共形刚性猜想) $\text{QC}(f) = \{f\}$.

组合刚性猜想的弱形式是 $\text{Com}(f) = \text{Top}(f)$ 和 $\text{Com}(f) = \text{QC}(f)$. 拓扑刚性猜想的弱形式是 $\text{Top}(f) = \text{QC}(f)$. 显然组合刚性强于拓扑刚性, 拓扑刚性强于拟共形刚性. 除了 Lattès 映射, Julia 集上有不变线域等价于其上可以作非平凡的拟共形形变. 因此不变线域猜想等价于拟共形刚性猜想, 强于双曲稠密性猜想. 于是对于全纯有理函数族 \mathcal{F} , 上述猜想有如下蕴含关系:

$$\begin{aligned} \text{组合刚性猜想} &\Rightarrow \text{拓扑刚性猜想} \Rightarrow \text{拟共形刚性猜想} \\ &\Leftrightarrow \text{不变线域猜想} \Rightarrow \text{双曲稠密性猜想}. \end{aligned}$$

单临界多项式的组合刚性猜想对于以下情形成立: 最多有限次可重整 [365], [28] 和部分无穷可重整 [459], [389], [390], [392], [171], [429], [177], [264]. 二次多项式的组合刚性等价于 Mandelbrot 集的局部连通性, 高次单临界多项式的组合刚性等价于 Multibrot 集的局部连通性 (见 [256], [650]). 关于 Mandelbrot 集和 Multibrot 集局部连通性更详细的结果见 §3.3.

组合刚性猜想对于临界有限的有理函数成立 (Thurston, [258]), 但对于非单临界的三次多项式不成立. Henriksen 给出了反例: 存在两个有相同 orbit portrait 的三次多项式, 它们在 Julia 集上不是拟共形共轭的 [353]. 关于组合刚性的研究还可见 [546].

关于拓扑刚性, 下列函数族可以由拓扑共轭推出拟共形共轭: 没有中性周期点且不可重整的多项式 ([781], [28], [417]), 实多项式 ([341], [459], [415], [193]), 拓扑 Collet-Eckmann 映射 [578], 一致弱双曲有理函数 [347], Julia 集为 Cantor 集有理函数 [790], 以及不可重整的多项式 Newton 映射 ([642], [260]).

因为结构稳定参数在全纯有理函数族 \mathcal{F} 中是稠密的, 那么其补集——**分歧迹** (bifurcation locus) 具有空的内部. 根据可测 Riemann 映射定理, 拟共形等价类要么是开集要么是单点, 因此分歧迹中的有理函数一定有拟共形刚性. 注意拟共形刚性等价于不变线域猜想, 除了前文提到的不变线域结果外, 关于拟共形和拟对称刚性的研究还可见 [547], [192].

上世纪 90 年代, Sullivan 引入了如下概念 [710]:

28) 还有另一种意义下的组合等价 (也称为 Thurston 等价) 对于任何有理函数都可以定义, 用于 Thurston 定理对有理函数的拓扑刻画中 (见 [258] 和 §6).

29) 这里 $\text{Com}(f) = \{f\}$ 表示 \mathcal{F} 中与 f 组合等价的函数与 f 都是共形等价的. 符号 $\text{Top}(f) = \{f\}$ 和 $\text{QC}(f) = \{f\}$ 的含义类似.

定义 (复界) 设 f 是一个关于临界点 c_0 (局部度为 d) 无穷可重整的有理函数. 若存在 $\varepsilon > 0$, 严格递增正整数列 $(n_k)_{k \geq 0}$ 和一系列包含 c_0 的 d 次类多项式 $\{(f^{\circ n_k}, U_k, V_k)\}_{k \geq 0}$, 使得 $\forall k \geq 0$, 共形模满足 $\text{mod}(V_k \setminus \bar{U}_k) \geq \varepsilon > 0$, 则称 f 有**复界**³⁰⁾ (complex bounds).

复界的存在性反映了类多项式重整序列的紧性. 对于至多有限可重整的多项式, 复界可以通过拼图片 (puzzle pieces) 来得到. 粗略地说, 存在一个由浅层拼图片与深层拼图片 (回归区域) 的差得到的嵌套圆环序列, 其共形模有一致下界 (精确定义可见 [193]).

由复界可以得到刚性 (包括没有不变线域 [490, 定理 10.2], 双曲稠密性), 重整映射的收敛性 (包括 Feigenbaum-Couillet-Tresser 重整化和 Milnor “毛发” 猜想 [461], [504]), Julia 集的局部连通性, Mandelbrot 集的局部连通性, Julia 集的面积和 Hausdorff 维数的二分定理 [29] 等.

Sullivan 最先证明了具有有界组合的实无穷可重整二次多项式具有复界 [710] (也见 [499]). 目前复界在以下情形成立:

- 所有实多项式 [193], 这包括了单临界实多项式 [339], [466], [433], 具有有界组合的多临界 (偶数阶) 无穷可重整实多项式 [690], 临界点为偶数阶的无穷可重整实多项式 [662] 和至多有限可重整的实多项式 [415], 以及临界点为奇数阶的实多项式 [434];
- 至多有限可重整的多项式 [417], 包括二次多项式情形 [781], [365] 和单临界多项式情形 [391], 以及具有特殊组合的不可重整情形 [691];
- 具有某种组合的无穷可重整二次多项式, 包括 [459], [389], [390], [392].

关于组合刚性, 复界, 不变线域的研究还可见 [191]. Douady 和 Hubbard 证明存在无穷可重整的二次多项式, 其没有复界 (见 [507], [694], [429]).

对于上述复界结果, Yoccoz 拼图 [365], 主要嵌套 (principal nest) [459], 由 Kozlovski, 沈维孝和 van Strien 引入的 KSS 嵌套 [415], Kahn 和 Lyubich 引入的覆盖引理 [393], 各种偏差定理, 全纯运动, QC-标准 [351], [394] 等起到了关键作用. 此外, 这些工具对 Julia 集和参数空间的研究也起到重要作用.

对于超越整函数的刚性, 不变线域和双曲稠密性的研究, 可见 [613], [616], [618], [619]. 对于临界圆周映射的刚性, 复界的研究, 可见 [295], [296], [757].

3.3 二次多项式与 MLC

上世纪 70 年代, 随着计算机技术的提高, 很多数学爱好者在计算机上编程画由函数迭代产生的分形图像. 第一幅 Mandelbrot 集的 (粗略) 图像是由 Brooks 和 Matelski 在 1978 年得到的 [133]. 之后 Mandelbrot, Douady-Hubbard, Milnor 等改进算法, 得到了更多更精确的 Mandelbrot 集图像. 1982 年, Douady 和 Hubbard 利用复分析工具证明了 Mandelbrot 集是连通的 [255] (见图 3). 在 Orsay 的讲义中 [256], 他们证明了如果 Mandelbrot 集局部连通, 那么不但 Mandelbrot 集有了一个很好的拓扑模型, 而且其边界上对应的二次多项式有了精确的组合刻画, 更为重要的是, 二次多项式的双曲稠密猜想成立. 于是他们提出下面复动力系统领域最重要的猜想之一:

猜想 14 (MLC 猜想) Mandelbrot 集是局部连通的.

30) 复界 (complex bounds) 也称复先验界 (complex a priori bounds).

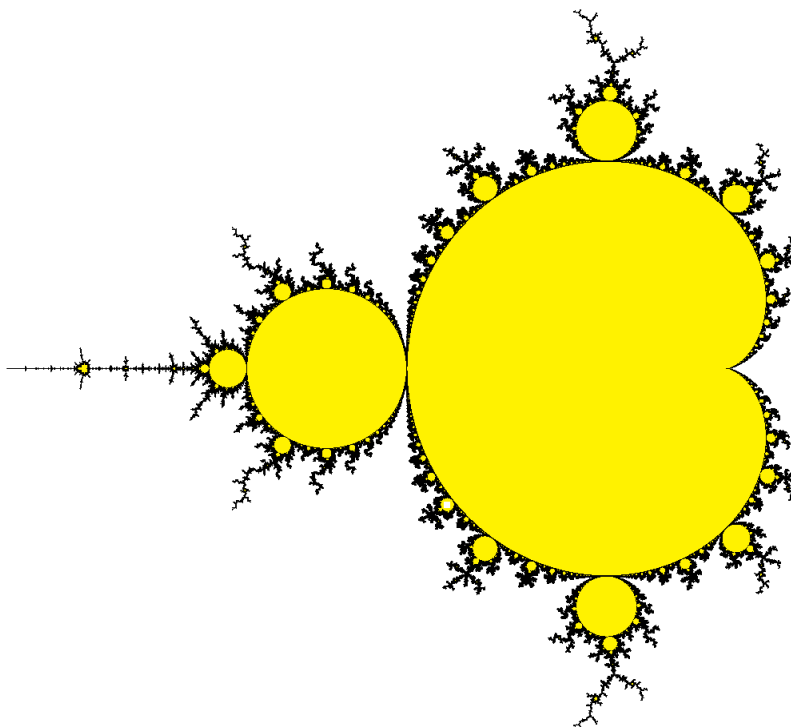


图 3 Mandelbrot 集.

对于二次多项式, MLC (The Mandelbrot set is locally connected) 猜想和前文提到的一系列猜想关系如下 [490]:

$$\begin{aligned} \text{MLC 猜想} &\Leftrightarrow \text{组合刚性猜想} \Rightarrow \text{拟共形刚性猜想} \\ &\Leftrightarrow \text{不变线域猜想} \Leftrightarrow \text{双曲稠密性猜想}. \end{aligned}$$

特别地, MLC 猜想最强. 而且这个猜想的好处是可以逐点证明. 当二次多项式 $f_c(z) = z^2 + c$ 满足以下条件时, Mandelbrot 集在参数 c 处是局部连通的:

- 至多有限可重整, 包括含中性周期点情形 (Yoccoz, [365], [650], [719]), 以及不含中性周期点情形 (Yoccoz, [365], [634], [388]);
- 某些 primitive 无穷可重整, 包括具有充分大组合且满足第二 “limbs” 条件 [459], 满足 “unbranched” 条件且具有复界³¹⁾ [384], 具有有界组合 [389], 满足 “decoration” 条件 [390], 以及满足 “molecule” 条件 [392];
- 某些 satellite 无穷可重整, 包括部分无界组合³²⁾ [507], [694], [177], 以及所有有界组合 (也称 Feigenbaum 型) [264], [265];
- 重整周期满足某些增长条件且具有无界组合 [429], [430];
- c 为实数³³⁾ (Dudko-Kahn-Lyubich, 2023).

31) 该文的预印本于 1995 年出现在 Berkely MSRI. 关于 “unbranched” 的定义, 见 [490, §10].

32) Milnor 文章的预印本出现在 1992 年 (受 Douady 和 Hubbard 的工作启发).

33) 在日本京都举行的复动力系统会议上, Lyubich 作了题为 “Real story of the Mandelbrot set” 的报告并宣布证明了该结果. 会议网址: <https://sites.google.com/view/shishikura2023>.

Douady 在复动力系统领域有一句名言: “You first plow in the dynamical plane and then harvest in the parameter plane (你首先在动力平面上耕种, 然后在参数平面上收获)”. 作为参数空间, Mandelbrot 集的各种性质均通过对二次多项式进行动力系统研究得到. 著名的 Pommerenke-Levin-Yoccoz (PLY) 不等式可用于估计 Mandelbrot 集子集的大小, 在 Yoccoz 证明 MLC 的相关结果时起到重要作用, 它刻画了斥性周期循环的组合旋转数与该循环的乘子之间的关系 (见 [571], [427], [365], [554], [396]).

由于 Mandelbrot 集的补集是一个无界的双曲分支, 因此二次多项式 $f_c(z) = z^2 + c$ 的双曲稠密性猜想等价于 Mandelbrot 集内部的每个分支都是双曲的. 若其内部存在非双曲分支 Q (称为奇异分支 [650]), 则对任意 $c \in Q$, f_c 的 Julia 集具有正面积且有不变线域 [490].

尽管猜测 Mandelbrot 集是局部连通的, 但其边界却非常复杂. Shishikura 在上世纪 90 年代证明了如下结果 [670] (也见 [718]), 肯定地回答了 Milnor 和 Mandelbrot 的猜想:

定理 3.4 (Shishikura) Mandelbrot 集边界的 Hausdorff 维数等于 2.

在此之前, 谭蕾证明了 Mandelbrot 集在 Misiurewicz 参数点处 (即临界点是预周期的) 与对应的 Julia 集有相似性 [715]. 与 Mandelbrot 集相关的一些重要结果包括: Mandelbrot 集的万有性 [496], Mandelbrot 集的组合结构 [509] 等.

对于 Multibrot 集, 类似的 MLC 猜想 (The Multibrot set is locally connected) 也受到了很大关注. 当 $f_c(z) = z^d + c$ 满足以下条件时 (其中 $d \geq 2$), Multibrot 集 M_d 在参数 c 处是局部连通的:

- Misiurewicz 点或中性周期点 [650];
- 不含中性周期点且至多有限可重整 [28];
- 某些 primitive 无穷可重整, 包括具有复界且满足第二 “limbs” 条件, 特别地, 对于 “decoration” 或 “molecule” 条件成立 [171].

关于 MLC 猜想及其相关理论, 可参见 Benini 写的综述 [66] (也可参见 Branner 写的介绍 [122]). 特别地, 除了有理函数, Benini 还将超越整函数动力系统的相应理论进行了平行归纳.

3.4 非双曲参数与重整算子的双曲性

Fatou 以一种隐晦的方式认为非双曲的有理函数落在可数多个真子簇 (proper subvarieties) 的并集中 [299, p. 73]. 这其实是不对的: Rees 证明了非双曲有理函数在任意给定次数的有理函数空间中具有正的 Lebesgue 测度 [601]. 但对于二次多项式, 有如下猜想 (见 [669]):

猜想 15 Mandelbrot 集边界的 (2 维 Lebesgue) 测度为零.

在 Rees 的结果之前, Jakobson 于 1981 年证明了在实二次多项式空间中, 非双曲的映射占有正测度且具有绝对连续的不变测度 (尽管现在已经知道实双曲映射是稠密的) [376], [65]. 对于 Mandelbrot 集的边界, Shishikura 证明其上所有非无穷可重整的复参数构成的集合具有零测度 [669] (也可参见 [34], [33]). Lyubich 证明其上无穷可重整的复参数构成的集合其 Hausdorff 维数至少为 1, 而无穷可重整实参数构成的集合其 Hausdorff 维数至少为 1/2 [460]. 之后, Lyubich 证明所有无穷可重整的实参数构成的集合具有零测度 [463].

Lyubich 的零测度结果是通过研究重整算子的一致双曲性导出的. 该问题起源于上世纪 70 年代, 物理学家 Feigenbaum 和 Coullet-Tresser, 独立地发现了在一维实解析变换中, 一般的函数族在

倍周期分叉 (cascades of doubling bifurcations) 时有一个普适的伸缩定律 (universal scaling laws) [302], [732]. 为解释这个现象, 他们猜测有一个重整算子双曲地作用在一个适当的无穷维函数空间上, 且该算子有一个一维的不稳定方向和余一维的稳定方向. 此后, 除了倍周期现象外, 其它的分歧组合也在一般的实或复解析变换中观察到了.

在有界组合条件下, 作用在二次实单临界类多项式函数空间上重整算子的双曲性由 Sullivan (基于 Teichmüller 理论), McMullen (基于塔的几何理论及其拟共形刚性) 和 Lyubich (基于塔的刚性和 Banach 空间的 Schwarz 引理) 证明 [710], [492], [461]. 之后, Lyubich 对任意组合证明了该猜想 [463]. 2011 年, Avila 和 Lyubich 将二次的结果推广到任意偶数次单临界类多项式函数空间 [30]. 最近, Smania 对有界组合的多峰映射证明了重整算子的双曲性 [692].

正如上文所提到的, 重整算子的双曲性在一维可测动力学, 特别是在正则和随机二分性质 (Palis 猜想的特殊情形 [539]) 的证明中起到重要作用. 相关结论如下:

- 对于几乎所有的 $c \in \mathbb{R}$, 二次多项式 $f_c(z) = z^2 + c$ 要么双曲 (正则性), 要么有一个绝对连续的不变测度 (随机性), 特别地, 无穷可重整的 f_c 构成的集合具有零测度 [463]. 该结论对实解析的拟二次单峰映射也成立 [32]. 事实上, f_c 要么双曲, 要么是 Collet-Eckmann 的 (具有绝对连续的不变测度) [34];
- 对于几乎所有的 $c \in \mathbb{C}$, 单临界多项式 $f_c(z) = z^d + c$, $d \geq 2$ 要么双曲, 要么无穷可重整. 对于几乎所有的 $c \in \mathbb{R}$, f_c 要么双曲, 要么 Collet-Eckmann, 要么是无穷可重整的 [33];
- 对于一般的多峰映射族 (比如三次多项式), 具有有界组合的无穷可重整映射构成的参数集具有零测度 [692].

重整算子双曲性的重要作用还体现在以下方面: Yoccoz 引入的扇形重整, 考虑了带有无理旋转的单叶函数的第一次回归映射, 用于研究全纯函数的局部线性化问题, 给出了二次多项式可以局部线性化的充要条件 [782]. Yampolsky 建立的临界圆周映射重整算子的双曲性, 严格解释了普适伸缩定律在圆周映射中也成立 [758]. McMullen 通过研究二次多项式的有界型 Siegel 盘重整的双曲性, 证明了二次无理型 Siegel 盘边界关于临界点的自相似性 [494]. Inou 和 Shishikura 发展的近抛物重整算子 [374], 其双曲性对于构造具有正面积的二次 Julia 集起到关键作用 [149], [31]. Dudko, Lyubich 和 Selinger 引入的 Siegel pacman 重整 [266], 被用于证明 MLC 在某些具有有界组合的 satellite 无穷可重整参数处成立 [264].

4 参数空间

4.1 双曲分支

对于一个全纯有理函数族, 所有双曲映射构成了一个开子集, 其每个连通分支称为**双曲分支**. 双曲分支的有界性, 拓扑结构及其边界的拓扑和几何性质是人们关心的主要问题.

对于首一中心的 d 次多项式空间, 其连通迹 (connectedness locus) 是一个类胞腔 (cell-like, 即为一列嵌套球的交) [255], [126], [421], [220]. Milnor 证明其每个有界的双曲分支是一个胞腔且包含唯一的临界有限多项式 [514]. 特别地, $d = 2$ 时这些有界双曲分支都是 Jordan 区域 [256], [164, §VIII.2]. 由于高维的参数空间不能可视化, Milnor 建议先对复一维的参数空间切片 (slice) 进行研究.

复一维的参数空间除了能够作图可视化, 为证明的结论带来直观的引导外, 在很多情况下还能直接得到双曲分支边界的整体拓扑和几何结构. 这样的结论有很多: McMullen 映射 [591], 三次 Newton 映射 [639], 临界周期曲线 \mathcal{S}_p 空间³⁴⁾ [742] (包括 $p = 1$ 的情形 [301] 及其推广 [637]). 这些文献在单参数的情况下证明了参数空间中的双曲分支 (无界双曲分支除外) 都是 Jordan 区域. 最近, 邱维元, Roesch 和王悦洋改进了 [591] 中的结论, 证明了 McMullen 映射参数平面上的逃逸双曲分支边界都是拟圆周 [592]. 证明的方法主要是通过全纯运动将动力系统平面的结论转移到参数平面, 用到的工具还包括参数拼图 (parapuzzle), 刚性讨论和抛物爆炸理论等. 见图 4.

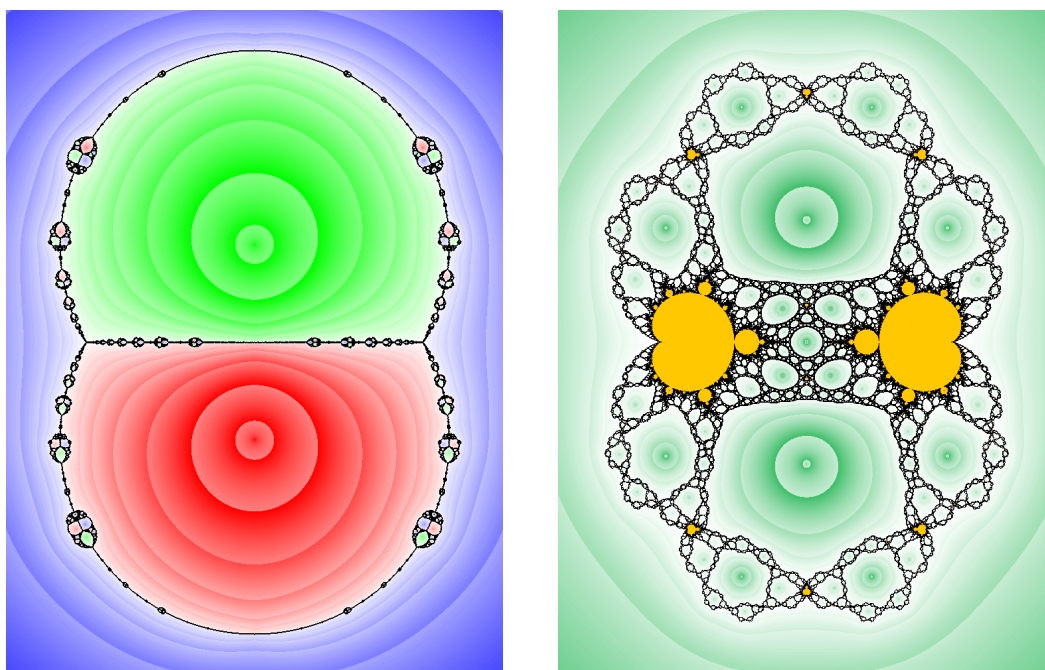


图 4 三次 Newton 映射和指标为 3 的 McMullen 映射参数空间图. 根据 [639] 和 [591], 图中双曲分支的边界均为 Jordan 曲线.

高维的参数空间研究要困难很多. 上世纪 90 年代初, Rees, Milnor 等开始对二次有理函数双曲分支进行研究, 并根据临界轨道的动力系统行为把它们分成 4 类 (见 [603], [604], [506], [605], 类似的分类也被用于三次多项式 [513]). 对二次有理函数模空间和双曲分支的研究还可见 [216], [729]. 对于一般多项式, 其转移迹 (shift locus) 的研究可见 [101], [221]. 对于中心双曲分支 (即包含 z^d 的双曲分支), Petersen-谭蕾 [561], 骆宇盛 [449] 等对其边界上部分映射的组合性质作了研究. 对三次有理函数的中心分支的一个特殊切片的研究见 [113].

有理函数连通迹 (connectedness locus) 中的双曲分支的全局拓扑由 Milnor 给出 [514] (二次有理函数的情形见 [603]). 第一个在不连通迹 (disconnectedness locus) 中对高维有理函数双曲分支给出全局拓扑刻画的工作是由王晓光和尹永成完成的. 他们考虑了 Julia 集为 Cantor 圆周的双曲分支并证明了它们是一个欧氏空间的有限商 [743]. 对一个全纯有理函数族的双曲分支 \mathcal{H} , Milnor 证明如

34) 对任意整数 $p \geq 1$, 三次多项式 $f_{c,a}(z) = z^3 - 3c^2z + a$ 空间中的周期为 p 的临界周期曲线为 $\mathcal{S}_p = \{(c, a) \in \mathbb{C}^2 : f_{c,a}^{op}(c) = c \text{ 且 } f_{c,a}^{ok}(c) \neq c, \forall 1 \leq k < p\}$. 该空间得到了 Milnor 等人的广泛研究, 包括它的亏格, 光滑性, 不可约性等性质 (见 [513], [114], [742], [12] 及其中的参考文献).

果 \mathcal{H} 中映射的每个吸引域中仅含一个大轨道等价的临界点, 那么 \mathcal{H} 的边界是半代数的, 因而局部连通. 同时他提出了如下猜想 [515]:

猜想 16 (Milnor) (1) 若 \mathcal{H} 中映射的某个吸引域中有两个自由的临界点, 则 $\partial\mathcal{H}$ 非局部连通.

(2) 若 $\partial\mathcal{H}$ 中的某个映射没有中性周期循环, 那么 $\partial\mathcal{H}$ 是一个分形集, 且其 Hausdorff 维数严格大于拓扑维数.

曹杰, 王晓光和尹永成研究了多项式空间中的一类捕获 (capture) 双曲分支, 部分解决了 Milnor 的上述猜想 [163]. 特别地, 他们证明如果吸引域中有两个自由临界点且它们都位于严格预周期 Fatou 分支中时, 双曲分支边界是局部连通的, 给出了 Milnor 第 (1) 个猜想的否定回答³⁵⁾. 对于猜想 (2), 他们不但作了肯定回答, 同时还得到了关于双曲分支边界的一个 Hausdorff 维数公式, 以等式的形式建立了参数空间和动力平面之间的联系.

若一个 $d \geq 2$ 次的全纯有理函数族 \mathcal{F} 中的双曲分支 \mathcal{H} 在有理函数模空间 Rat_d 中具有紧的闭包, 则称 \mathcal{H} 是 \mathcal{F} 中的一个有界双曲分支. 90 年代, Rees 研究了二次有理函数一个实切片的双曲分支的有界性 [603]. 二次有理函数的双曲分支可以分成 4 类, 其中的 D -类型指的是具有两个吸性周期循环的二次有理函数 (双临界有理函数也有类似定义). Epstein 得到了第一个关于双曲分支紧性的一般结果 [273]. 他证明了若 $\mathcal{H} \subset \text{Rat}_2$ 是 D -类型且其中有理函数的吸性周期循环的周期至少为 2, 则 \mathcal{H} 是有界的. 之后双曲分支的有界性被聂洪明-Pilgrim, 骆宇盛等人作了进一步研究 (见 [532] 和 [447] 及其中的参考文献), 其中用到了算术动力系统 [408]. 关于三次多项式有界双曲分支的研究还可见 [594].

复球面上的一个紧子集称作是一个 Sierpiński 地毯, 如果它的内部为空, 并可以写成可数多个球面直径趋向于零且闭包两两不交的 Jordan 圆盘的并的补集. 第一个 Sierpiński 地毯型 Julia 集是由 Milnor 和谭蕾找到的 [506]. 更多的 Sierpiński 地毯型 Julia 集可见 [563], [238], [754], [232], [763], [311]. 对于这类特殊的 Julia 集, McMullen 提出了以下问题 [489, 问题 5.3]:

问题 17 (McMullen) Sierpiński 地毯型双曲分支在有理函数模空间中是否有界?

根据 Milnor-谭蕾 [506] (也见 [232]) 以及 Epstein 的结果 [273], 二次有理函数模空间中的某些 Sierpiński 地毯型双曲分支是有界的. 2022 年, Dudko 和骆宇盛宣称在 disjoint 类情形下解决了 McMullen 的问题³⁶⁾. 同时, Kahn 宣称完全解决了该问题³⁷⁾.

对于双曲分支何时无界的问题, Makienko 给出了若干充分条件. 特别地, 当有理函数的 Julia 集不连通时, 所在双曲分支无界 [470]. 相关的研究还可见 [556], [721].

关于有理函数双曲分支的计数可见: 二次多项式 [498], 部分 McMullen 映射 [635], 某种类型的二次有理函数 [409], 以及 Cantor 圆周型有理函数 [596] 等.

4.2 分歧迹

一个全纯有理函数族 \mathcal{F} 的分歧迹 (bifurcation locus) 指的是 \mathcal{F} 中所有使得 Julia 集不连续变化的参数集合的闭包. 由 [476], [451] 可知, 分歧迹是一个无处稠密集. 根据 Shishikura, 谭蕾,

35) 为了使 Milnor 的猜想 (1) 不被否定, 或许需要将陈述中的“吸引域”换成“直接吸引域”.

36) 见 <https://www.impan.pl/en/activities/banach-center/conferences/22-juliasets4/abstracts>.

37) 见 <https://www.slmath.org/seminars/26703/schedules/31335>.

McMullen, Gauthier 等人的工作, 一般的全纯有理函数族的分歧迹具有满的 Hausdorff 维数 [670], [718], [496], [324].

Rees 证明了 $d \geq 2$ 次有理函数模空间 Rat_d 中的分歧迹具有正的 Lebesgue 测度 [601]. 定义在 Rat_d 上的分歧测度 (bifurcation measure) 是由 Bassanelli 和 Berteloot 在 2007 年引入的 [56] (基于分歧流 [215]), 它的支撑集真包含在分歧迹中. 一个自然的问题是分歧测度的支撑集是否具有正的 Lebesgue 测度? Buff 和 Epstein 证明了分歧测度的支撑集等于两类有理函数的闭包, 第 1 类含有 $2d - 2$ 个中性循环, 第 2 类是严格预周期且不为灵活 Lattès 映射的临界有限有理函数 [152] (部分结论见 [269]). 2019 年, Astorg, Gauthier, Mihalache 和 Vigny 证明了分歧测度的支撑集包含了一部分 Collet-Eckmann 映射且该映射构成的集合具有正的 Lebesgue 测度 [23]. 在此之前, Aspenberg 证明了所有非双曲 Collet-Eckmann 映射在 Rat_d 具有正的 Lebesgue 测度 [14].

上述结论的证明一般需要用到临界关系的横截性, 双曲集的全纯运动和一些偏差估计, 从而将动力平面的结果转移到参数空间. 早在上世纪 90 年代, 该方法就被谭蕾用于证明 Mandelbrot 集和 Julia 集的局部相似性 [715], 被 Shishikura 用于证明 Mandelbrot 集边界的 Hausdorff 维数等于 2 [670] 等. 临界关系的横截性研究可见 [703], [432] 及其中的参考文献.

对于只有一个自由临界点的三次多项式, 除了 Milnor 等研究的临界周期曲线 \mathcal{S}_p 外, 还有 Zakeri 研究了含有界型且周期为 1 的 Siegel 盘的参数空间 [784], Buff 和 Henriksen 研究了含中性不动点的参数空间和动力平面的相似性 [157], 张润泽研究了含抛物不动点的参数空间捕获分支边界的正则性 [802] 等. 关于二次有理函数参数空间的一维切片研究可见 [506], [728], [19], [151], [232], [313] 等. 最近一个深刻的结果是: Petersen 和 Roesch 证明了抛物 Mandelbrot 集和经典的 Mandelbrot 集是同胚的 [560].

有关超越亚纯函数参数空间的研究可见 [590], [247], [616], [617], [288] 及其中的参考文献.

4.3 熵的单调与连续性

给定实轴上一个紧区间 I 上的自映射连续函数族 $\{f\}$, 一个自然的问题是该函数族的“动力系统复杂度”是如何变化的. 而拓扑熵 (topological entropy) $h_{top}(f)$ 可以很好地刻画这一变化. 拓扑熵可以通过下式计算:

$$h_{top}(f) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \ell(f^{\circ n}),$$

其中 $\ell(f^{\circ n}) - 1$ 是使得导函数 $x \mapsto df^{\circ n}/dx$ 在 I 中改变符号的点的数目 [520].

熵函数 $h_{top}(f)$ 的单调性问题可以追溯到上世纪 70 年代. 对于光滑的单峰映射 $f : I \rightarrow I$, 其中 $I = [0, 1]$, $f(0) = f(1) = 0$, $f(1/2) = 1$, 考虑 $f_a(x) = af(x)$, $a \in [0, 1]$. Douady 和 Hubbard [256], [253], Milnor 和 Thurston [516] 证明了二次多项式族 $f_a(x) = 4ax(1-x)$ 的拓扑熵关于参数 $a \in [0, 1]$ 是单调递增的, 且证明依赖于复方法. Tsujii 给出了另外的一个证明, 不依赖于全纯动力系统 [733]. 正弦函数族 $f_a(x) = a \sin(\pi x)$ 的拓扑熵的单调性直到最近才解决 [619]. 由于实一维动力系统的双曲稠密性, 上述 $h_{top}(f)$ 在 I 的任何子区间上都不是严格单调的.

对于实系数的三次多项式 $f : I \rightarrow I$, 其中 $I = [-1, 1]$, $f(-1) = -1$, $f(1) = 1$, 函数族 $f_{a,b}(x) = ax^3 + bx^2 + (1-a)x - b$ 的等熵线 (isentropes) $(a, b) \mapsto h_{top}(f_{a,b})$ 是非常复杂的类分形集,

因此没有理由期望对于给定的 a (或 b), $h_{top}(f_{a,b})$ 关于参数 b (或 a) 具有单调性. 90 年代初, Milnor 提出了一个关于一般实多项式拓扑熵的“单调性”猜想 (具体陈述见 [505], [705]):

猜想 18 (Milnor) 对于给定次数的非退化实多项式族, 每条等熵线都是连通的.

对于三次多项式的情形, 双曲稠密性猜想可以推出 Milnor 的熵单调猜想 [214]. 之后, Milnor 和 Tresser 证明了三次多项式情况下这个猜想成立, 但证明仅依赖于二次多项式的双曲稠密性 (注意在当时二次以上多项式的双曲稠密性还是未知的) 和平面上的一些拓扑结论 [517]. 2015 年, Bruin 和 van Strien 彻底解决了 Milnor 的这个猜想 [140], 且证明依赖于实双曲多项式的稠密性 [416]. 拓扑熵的单调性的进一步研究可见 [432]. 关于实映射拓扑熵的其它相关结论, 可见 [705] 和 [726].

事实上, 拓扑熵可以对任何紧度量空间 X 上的自映射 f 进行定义 [253]. 对于每个次数为 d 的多项式, 其填充 Julia 集上的拓扑熵都是 $\log d$ (事实上对有理函数也对 [450]). 为本质地刻画复多项式动力系统的复杂度, 在填充 Julia 集的一个有意义的子集上定义拓扑熵是一个重要的问题.

对于临界有限的多项式 f , 其 Hubbard 树 H_f 定义为包含临界轨道的最小正则树 (见 [248], [256], [570]) 且 H_f 在 f 作用下是不变的. W. Thurston 定义 f 的核熵 (core entropy) 为 f 限制在 H_f 上的拓扑熵 [725], 并猜想核熵关于多项式是连续变化的. 当 f 为二次多项式时, Thurston 猜想成立 [731], [267]. 最近, 高延和 Tiozzo 对任意次数的多项式证明了 Thurston 的猜想 [320].

在此之前, 已经知道二次多项式的核熵沿着 Mandelbrot 集的“脉络” (vein) 是单调递增的 [440], [267], [788]. 其证明基于外射线着陆的组合性质, 特别地, 对于局部连通的 d 次多项式 f , 其 Hubbard 树可能是无限的, 但其核熵有计算公式

$$h(f) = \log d \cdot \dim_H \text{Acc}(f),$$

其中 $\dim_H \text{Acc}(f)$ 代表 f 的填充 Julia 集上点的双可达 (biaccessible) 角度构成的集合的 Hausdorff 维数 [730], [267]. 事实上, 上述公式本质上刻画了 f 的 lamination (该概念由 Thurston 引入 [725]) 的预临界叶子 (precritical leaves) 的增长率. 当 f 是临界有限多项式时, 这个定义与通常的核熵定义是吻合的, 并可以通过 Thurston 核熵算法进行计算 [727], [319].

5 拟共形映射与应用

5.1 平面拟共形映射基础

复球面上两个区域 Ω_1 和 Ω_2 之间的保向同胚 $f: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ 称为 K -拟共形映射 (K -quasiconformal map), 如果 f 有 ACL (线段上绝对连续) 性质且 f 在 Ω_1 内满足 Beltrami 方程 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \mu(z) \frac{\partial f}{\partial z}$, 其中 μ 为 Beltrami 系数且 $|\mu(z)| \leq k = \frac{K-1}{K+1} < 1$ 几乎处处成立. 这是拟共形映射的分析定义. 若存在 $H > 0$ 使得对任意的 $z_0 \in \Omega_1$ 有

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\sup_{d_{\hat{\mathbb{C}}}(z, z_0)=r} d_{\hat{\mathbb{C}}}(f(z), f(z_0))}{\inf_{d_{\hat{\mathbb{C}}}(z, z_0)=r} d_{\hat{\mathbb{C}}}(f(z), f(z_0))} \leq H,$$

那么 $f: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ 也为一个拟共形映射. 这是拟共形映射的度量定义. 此外还有通过拓扑四边形的共形模来刻画的拟共形映射几何定义等, 这些定义都是等价的. 拟共形映射关于二维 Lebesgue 测度是绝对连续的.

一个与拟共形映射有关的事实是: 其度量定义中的上极限可以改为下极限 [351] (注意改为下极限后判定一个同胚是否为拟共形会更容易), 甚至改为下极限后还可以去掉某些例外集 [394]. 这些结论在研究有理函数的刚性时有重要应用: 用于证明整体拓扑共轭但在 Fatou 集上拟共形共轭的两个有理函数是整体拟共形共轭的 [578], [347], [691], [415, §12], [338]. 拟共形映射是几乎处处可微的, 但具体在哪一点可微则无法保证, 在一点可微的判定标准可见 [425, §V.6], [676] 及其中的参考文献.

关于拟共形映射的经典参考文献有: [4], [425], [20]. 国内的经典参考书籍是由李忠编著的“复分析导引”(2004) 和“拟共形映射与 Teichmüller 空间”(2013), 均为北京大学出版社出版. 下面是拟共形映射理论最重要的结论之一:

定理 5.1 (Morrey-Bojarski-Ahlfors-Bers) 给定一个有界可测函数 $\mu \in L^\infty(\widehat{\mathbb{C}})$, 其中 $\|\mu\|_\infty < 1$, 则存在一个拟共形映射 $f: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, 使得 f 的复特征 $\mu_f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} / \frac{\partial f}{\partial z}$ 等于 μ . 此外, 这样的 f 在相差一个后复合 Möbius 映射的意义下是唯一的.

该定理称为可测 Riemann 映射定理 (Measurable Riemann Mapping Theorem), 也称为可积性定理 (Integrability Theorem). 事实上, 可测函数 μ 对应着复球面上的一个椭圆域, 在几乎所有点处都指定了一个给定方向和长短轴之比的无穷小椭圆, 定理中的拟共形映射 f 将这些无穷小椭圆全部映成无穷小圆. 根据拟共形映射的表示定理, 可以证明规范化的拟共形映射关于参数具有连续 (或解析) 依赖性 [5].

5.2 拟共形手术与发展

拟共形映射理论对复动力系统领域的发展是至关重要的. 前文已经提到, Sullivan 在上世纪 80 年代将拟共形映射理论引入复动力系统后, 证明了有理函数没有游荡域, 完成了周期 Fatou 分支的分类 [708], [498]. 之后 Douady-Hubbard 引入了类多项式的概念 [257], 这是重整理论的基础 [490]. Shishikura 给出了有理函数非斥性周期轨道数目的最好上界 [667].

拟共形手术 (quasiconformal surgery) 的主要原理是通过各种剪切和粘贴, 先得到一个拟正则映射 $g: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, 然后寻找一个在 g 作用下不变的椭圆域 (对应一个定义在 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上的 Beltrami 系数 μ), 即 $g^*\mu = \mu$, 然后由可测 Riemann 映射定理得到一个拟共形映射 $\phi: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, 使得其复特征 $\mu_\phi = \mu$. 那么 $f := \phi \circ g \circ \phi^{-1}: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ 一定是一个有理函数, 因为 f 是拟正则映射且将无穷小圆映到无穷小圆. 这个新得到的有理函数 f 与原来的拟正则映射 g 是拟共形共轭的, 它们具有相同的动力系统, 因此可以通过 g 来研究 f . 由于 g 可以进行局部构造, 所以自由度大很多.

以证明有理函数的非斥性周期轨道的上界为例. 之前利用全纯扰动的方法, 只能将一半的中性周期轨道扰动为吸性, 于是只能得到 d 次有理函数至多有 $6d - 6$ 个非斥性周期轨道 (见 [164, §III.2]). 而 Shishikura 利用拟共形手术, 将所有的中性周期轨道都扰动为吸性, 证明了非斥性周期轨道的最好上界是 $2d - 2$ [667].

对拟正则映射 g 做拟共形手术最关键的一点是找一个不变的 Beltrami 系数 μ . 这在大多数情况下要求在通过拉回 g 定义 μ 时, 轨道经过非全纯的地方至多有限多次, 由此才能保证 μ 的本性上界严格小于 1 [667, §3]. 对于某些情况, 轨道经过非全纯区域无穷次时, 结合拟共形手术和 Thurston 算法也能找到一个与给定拟正则映射 g 半共轭的有理函数 f (见 [631] 和 [665]).

当给定的 Beltrami 系数 μ 本性上界等于 1, 但 $\{z \in \widehat{\mathbb{C}} : |\mu(z)| > 1 - \varepsilon\}$ 的 Lebesgue 测度关于

ε 指数减小时, Beltrami 方程也有 (非拟共形) 同胚解 [213]. Haïssinsky 首先利用该理论从一对吸性和斥性周期点来构造抛物点 [345]. 之后 Petersen 和 Zakeri 将其用于 Siegel 盘的研究中, 证明了几乎所有的含 Siegel 盘的二次多项式 Julia 集都是局部连通的, 其中的手术构造称为**超拟共形手术** (trans-quasiconformal surgery) [562].

与拟共形手术有关的经典文献有 Shishikura 的著名论文 [667], 还有他写的拟共形手术综述 [674], 以及³⁸⁾ Branner 和 Fagella 写的拟共形手术专著 [124]. 该专著涵盖了各种手术, 包括 Siegel 盘和 Herman 环的相互转化 [667], Mandelbrot 集 limbs 上的同胚延拓 [123], 圆盘-圆环手术 [567], 纠缠 (Intertwining) 手术 [274] 等. 此外, pinching 和 plumbing 手术可见 [209]. 拟共形手术的应用还包括: Douady-Hubbard 的整理定理 (Straightening Theorem) [257] 及其高维推广 [372]. 除了有理函数, 拟共形手术也可用于超越动力系统. 值得一提的是拟共形手术在复微分方程中还有重要应用 [82].

5.3 全纯运动

全纯运动由 Mañé-Sad-Sullivan 和 Lyubich 在 1983 年独立引入 [476], [451], 当时被用于构造有理函数扰动后的拟共形共轭. 之后全纯运动被证明是复动力系统领域的一个非常强大的工具.

定义 (全纯运动) 对于 $\widehat{\mathbb{C}}$ 的一个非空子集 E , 称映射 $h: \mathbb{D} \times E \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ 是以 0 为基点, \mathbb{D} 为参数空间的 E 的**全纯运动** (holomorphic motion), 如果有:

- 对每个 $z \in E$, $\lambda \mapsto h(\lambda, z)$ 关于 $\lambda \in \mathbb{D}$ 全纯;
- 对每个 $\lambda \in \mathbb{D}$, $z \mapsto h(\lambda, z)$ 是 E 上的单射; 且
- 对所有的 $z \in E$, 有 $h(0, z) = z$.

第一个关于全纯运动的重要结论是 λ -引理: E 上的全纯运动可以延拓为 \overline{E} 上的全纯运动 [476], [451]. 在 Sullivan-Thurston 和 Bers-Royden 的工作之后 [711], [90], 利用多复变中的工具, Slodkowski 证明了一个一般的结论: E 上的全纯运动可以延拓为 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上的全纯运动, 且仍然以 \mathbb{D} 为参数圆盘 [686]. 其一般形式是 (证明可见 [252], [189], [20, §12], [323]):

定理 5.2 若 $h(\lambda, z): \mathbb{D} \times E \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ 是以 0 为基点, \mathbb{D} 为参数空间的闭子集 $E \subset \widehat{\mathbb{C}}$ 的全纯运动, 则

- 存在一个全纯运动 $H(\lambda, z): \mathbb{D} \times \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ 是 $h(\lambda, z)$ 的延拓;
- 对于任何 $\lambda \in \mathbb{D}$, $H(\lambda, \cdot): \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ 是一个拟共形映射, 其复特征具有上界 $(1 + |\lambda|)/(1 - |\lambda|)$.

此外, $H(\lambda, \cdot)$ 的 Beltrami 系数是 \mathbb{D} 到 Banach 空间 $L^\infty(\mathbb{C})$ 的单位球中的全纯函数.

除了单位圆盘 \mathbb{D} , 全纯运动可以定义在任何连通复流形 X 上 [490, §4.1]. 但如果 X 不是单连通的, 那么子集 $E \subset \widehat{\mathbb{C}}$ 上以 X 为参数空间的全纯运动不一定能延拓为整个 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上的全纯运动 [252]. 蒋云平, Mitra 等做了很多关于全纯运动方面的工作, 见 [385] 及其中的参考文献.

全纯运动的主要应用之一是通过动力平面来研究参数平面, 这方面有很多重要的工作, 比如参数拼图 (parapuzzle) 的构造 [634], [462], [33], 双曲分支边界的拓扑和几何性质研究等等. 此外, 全纯运动还可用于证明拓扑熵的单调性 [432].

38) Mercer 和 Stankewitz 写的 “Introduction to quasiconformal mappings in the plane with an application to quasiconformal surgery”, <http://www.cs.bsu.edu/~rstankewitz/QCMapsIntro.pdf>, 非常适合初学者.

6 Thurston 定理与应用

6.1 拓扑刻画

Thurston 给出的关于临界有限有理函数的拓扑刻画是复动力系统领域最深刻的结果之一 [258]. 该理论被应用在复动力系统的各个方面, 主要包括: Douady 对单峰映射拓扑熵单调性的证明 [253], Rees 对参数空间的刻画 [606], Kiwi 对多项式 lamination 的刻画 [407] (基于 [94], [569]), Rees, Shishikura 和谭蕾对多项式耦合的研究 (见 [602], [678], [716], [717] 和 §6.2) 以及 Pilgrim 和谭蕾的沿弧剪切-粘贴手术的研究 [566] 等. 更多的应用可见 [208] 以及 [150].

令 $f : S^2 \rightarrow S^2$ 为二维球面上一个次数大于 1 的分支覆盖 (branched covering). 其临界点为 $C_f := \{x \in S^2 : \deg_x(f) > 1\}$, 后临界集 (post-critical set) 为 $P(f) = \overline{\bigcup_{n \geq 1} f^{on}(C_f)}$. 若 $P(f)$ 是一个有限集, 则称 f 是临界有限的.

定义 (组合等价) 两个分支覆盖 f, g 称作是组合等价 (或 Thurston 等价) 的, 若存在同胚 $\phi, \psi : S^2 \rightarrow S^2$ 使得 $\phi \circ f = g \circ \psi$, 且 ϕ 和 ψ 相对于 $P(f)$ 是同痕的 (isotopic).

称 $S^2 \setminus P(f)$ 中的一条简单闭曲线 γ 是平凡的, 如果 $S^2 \setminus \gamma$ 有一个分支不含 $P(f)$ 中的点; 称 γ 是次要的 (peripheral), 如果 $S^2 \setminus \gamma$ 有一个分支仅包含 $P(f)$ 中的一个点; 称 γ 是本质的 (essential), 如果 $S^2 \setminus \gamma$ 的每个分支都包含 $P(f)$ 中至少两个点. 称 $S^2 \setminus P(f)$ 中的两条简单闭曲线同伦, 如果它们相对于 $P(f)$ 同伦. 一族多重曲线 (multicurve) Γ 是由 $S^2 \setminus P(f)$ 中有限多条互不相交的两两不同伦的本质曲线组成的集合. 多重曲线 Γ 称作是 f -不变的, 如果对于任意的 $\gamma \in \Gamma$, $f^{-1}(\gamma)$ 的任何本质分支都同伦于 Γ 中的一条曲线. 多重曲线 $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ 确定了一个 $n \times n$ 的转移矩阵 $M(\Gamma) = (a_{ij})_{n \times n}$:

$$a_{ij} = \sum_{\beta \sim \gamma_i} \frac{1}{\deg(f : \beta \rightarrow \gamma_j)},$$

其中的和式 $\sum_{\beta \sim \gamma_i}$ 是对 $f^{-1}(\gamma_j)$ 的所有与 γ_i 同伦的分支 β 求和. 由于矩阵 $M(\Gamma)$ 中的元素均非负, 根据矩阵论中的 Perron-Frobenius 定理, $M(\Gamma)$ 有一个非负且最大的特征值 (即为谱半径) $\lambda(\Gamma)$. 一族 f -不变的多重曲线 Γ 称作是一个 **Thurston 障碍** (obstruction), 如果 $\lambda(\Gamma) \geq 1$.

对每个 $x \in S^2$, 令 $\nu_f(x)$ 为 $\{\deg_y(f^{on}) : f^{on}(y) = x \text{ 且 } n \geq 1\}$ 的最小公倍数. 注意 $\nu_f(x)$ 可能等于 ∞ 且若 $x \notin P(f)$, 则 $\nu_f(x) = 1$. 称 $\mathcal{O}_f = (S^2, \nu_f)$ 是对应 f 的轨形 (orbifold), 其中 $\nu_f : P(f) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 称为 \mathcal{O}_f 的特征 (signature) [258], [490, 附录], [511, 附录 E]. 称轨形 $\mathcal{O}_f = (S^2, \nu_f)$ 是双曲的, 如果它的欧拉示性数

$$\chi(\mathcal{O}_f) = 2 - \sum_{x \in P(f)} \left(1 - \frac{1}{\nu_f(x)}\right) < 0.$$

如果 f 是临界有限的, 那么 $\chi(\mathcal{O}_f) \leq 0$. 非双曲轨形 $\mathcal{O}_f = (S^2, \nu_f)$ 的分类可见 [258], [490]. 如果 $\#P(f) \geq 4$, 则 \mathcal{O}_f 非双曲当且仅当 \mathcal{O}_f 的特征为 $(2, 2, 2, 2)$. 下面的定理可见 [258], [366]:

定理 6.1 (Thurston) 一个临界有限的分支覆盖 $f : S^2 \rightarrow S^2$ 组合等价于一个有理函数 g 当且仅当:

- (环面情形) \mathcal{O}_f 的特征是 $(2, 2, 2, 2)$ 且 g 由一个环面自同态的双层覆盖得到; 或

- (一般情形) \mathcal{O}_f 的特征不是 $(2, 2, 2, 2)$ 且 f 没有 Thurston 障碍 (即对任意 f -不变的多重曲线 Γ 有 $\lambda(\Gamma) < 1$).

对于第二种情形, 这样的 g 在相差一个共形共轭的意义下是唯一的.

换言之, Thurston 定理证明了具有双曲轨形的临界有限分支覆盖 f 组合等价于有理函数的充要条件是 f 没有 Thurston 障碍. 一个自然的问题是 Thurston 定理可以在多大程度上推广到临界无限的情形. McMullen 研究了一般有理函数 f 的多重曲线 Γ (不要求 f 临界有限和 Γ 的不变性) 并证明了除了一些平凡的情形外, 没有 Thurston 障碍对于具有双曲轨形的有理函数本质上是成立的 [490, §B.2]:

定理 6.2 (McMullen) 有理函数 f 的任何多重曲线 Γ 均满足 $\lambda(\Gamma) \leq 1$. 若 $\lambda(\Gamma) = 1$, 则有

- f 临界有限, $\mathcal{O}_f = (2, 2, 2, 2)$ 且 f 由一个环面自同态的双层覆盖得到; 或
- f 临界无限, Γ 包含了 f 的一个圆环循环中的本质曲线且这些圆环落在 f 的 Siegel 盘或 Herman 环中, 其中每一个圆环都是 $\widehat{\mathbb{C}} \setminus P(f)$ 的一个连通分支.

临界有限的 Thurston 定理首先被推广到次双曲情形 [208], [800] (也见 [204], [203]):

定理 6.3 (崔贵珍-谭蕾, 张高飞-蒋云平) 若 f 是一个临界无限的次双曲半有理分支覆盖, 则 f 组合等价于一个有理函数当且仅当 f 没有 Thurston 障碍.

之后 Thurston 定理被推广到几何有限有理函数 [209], 含 Siegel 盘的分支覆盖 [799], 以及含 Herman 环的情形 [741]. 值得一提的是, Hubbard, Schleicher 和 Shishikura 将 Thurston 定理推广到了临界有限的指数映射 [369].

对于临界有限分支覆盖 f 的 Thurston 定理 [258], 证明 f 组合等价于一个有理函数归结为证明 Thurston 拉回映射 $\sigma_f : T_f \rightarrow T_f$ 有唯一的吸性不动点, 其中 T_f 是 $(S^2, P(f))$ 的 Teichmüller 空间. 关于 Thurston 拉回映射的进一步研究可见 [153], [657], [410]. 在研究临界无限分支覆盖的 Thurston 定理时, 除了直接在 Teichmüller 空间内对 Thurston 拉回映射进行迭代外 [800], 还可以用剪切-粘贴手术 [566] 对动力系统进行典型分解, 将问题归结为临界有限的情形 [208]. 其它有关动力系统的分解可见 [488], [741], [207], [205].

Thurston 的定理给出了存在唯一性的证明, 但验证这个定理的条件却很困难, 因为很多情况下不可能对所有的多重曲线都验证它们没有 Thurston 障碍. 若多重曲线 $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$ 满足对任意 $i = 1, 2, \dots, n$, 曲线 γ_{i-1} (或 γ_n 如果 $i = 1$) 同伦于 $f^{-1}(\gamma_i)$ 的一个连通分支 γ'_{i-1} , 且 $f : \gamma'_{i-1} \rightarrow \gamma_i$ 是一个同胚, 则称 Γ 为一个 **Levy 循环**. 显然 Levy 循环一定是一个 Thurston 障碍. Levy 在他的博士论文中引入了 Levy 循环的概念并证明对于二次临界有限分支覆盖, 有 Thurston 障碍等价于存在 Levy 循环 (见 [436], [716]). 这个结论对任意次数的拓扑多项式也成立 [94]. 因此对某些分支覆盖寻找 Levy 循环是验证 Thurston 定理条件的一个办法. 但 Shishikura 和谭蕾却证明存在三次临界有限分支覆盖, 其含有 Thurston 障碍但不含 Levy 循环 [678].

2006 年, Bartholdi 和 Nekrashevych 通过引入迭代单值化群 (iterated monodromy group) 这个组合不变量解决了 Hubbard 提出的“扭兔子”组合等价问题 [55]. Kameyama 和 Pilgrim 等也尝试寻找一个有效的算法来得到 Thurston 定理中的有理函数 [395], [565]. W. Thurston 对临界有限有理函数的实现问题给出的是一个反面的判断标准, 最近 D. Thurston 给出了一个正面的刻画 [724]. 通过对 Douady-Hubbard 证明的加细, Pilgrim 引入了典型 (canonical) Thurston 障碍的概念 [564] (为

一些特别的 Levy 循环及其逆像的并, 相关研究还可见 [169], [658]).

利用几何群论, Belk, Lanier, Margalit 和 Winarski 考虑树的单纯复形 (simplicial complex of trees) 上的迭代, 给出了一个能决定临界有限拓扑多项式是否组合等价于一个多项式的简单算法. 如果组合等价, 该算法能直接输出 Hubbard 树; 否则, 该算法输出典型的 Thurston 障碍. 此外, 该算法还能解决与 Hubbard “扭兔子” 问题相关的更一般问题 [61]. 对于临界有限多项式, 其组合结构由其 Hubbard 树上的动力系统决定. 如果要确定由 Hubbard 树决定的多项式系数, 则可用 Hubbard-Schleicher 的“蜘蛛算法” (spider algorithm) [367].

对于一般的有理函数, 寻找组合不变量是一个重要问题 [489, §5]. 有理函数的不变图 (invariant graph) 是类似于多项式的 Hubbard 树的组合不变量. 不变图为判定是否存在 Thurston 障碍提供了一条途径, 见 [207], [209]. 除了前文提到的 Newton 映射以及 McMullen 映射, 扩张的 Thurston 映射 [118] 以及临界有限有理函数 [202] 等也存在不变图.

如果临界有限分支覆盖 f 没有 Thurston 障碍, 由 Thurston 拉回映射 $\sigma_f : T_f \rightarrow T_f$ 得到的序列 $\tau_n = \sigma_f^n(\tau_0)$ 收敛到 σ_f 的不动点, 且该不动点对应着一个与 f 组合等价的有理函数 g [258]. 这个通过构造复结构序列 τ_n (对应于一列拟共形映射) 来寻找与 f 组合等价的有理函数 g 的过程被称为 **Thurston 算法** (Thurston's algorithm). 关于一般映射的 Thurston 算法收敛性的研究可见 [629], [631]. 通过分析拟共形同痕, McMullen 证明任何两个拟共形组合等价的有理函数都是拟共形共轭的 [494, 附录 A]. 崔贵珍进一步加强了该结论 [200].

6.2 耦合问题

上世纪 80 年代, Douady 和 Hubbard 观察到某些有理函数的动力系统可以很好地分解为一对多项式的动力系统. 为了将部分二次有理函数通过一对二次多项式进行参数化, 他们引入了耦合 (mating) 的概念 [248]. 耦合有数种类型, 可以参考 Petersen 和 Meyer 写的关于耦合的介绍 [559].

假定 f_i 为首一中心且填充 Julia 集 $K(f_i)$ 局部连通的二次多项式, 其中 $i = 1, 2$. 考虑 Böttcher 映射 $\Phi_i : \widehat{\mathbb{C}} \setminus K(f_i) \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$, 它是使得当 $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus K(f_i)$ 时 $\Phi_i(f_i(z)) = (\Phi_i(z))^2$ 的共形映射, 其中 $\Phi_i(\infty) = \infty$ 且 $\Phi_i'(\infty) = 1$. 根据 Carathéodory 定理, Φ_i^{-1} 可以连续延拓到边界 $\Phi_i^{-1} : \partial\mathbb{D} \rightarrow J(f_i)$, 其中 $J(f_i) = \partial K(f_i)$ 为 f_i 的 Julia 集. 参数曲线 $\eta_i(t) = \Phi_i^{-1}(e^{2\pi it}) : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow J(f_i)$ 即为 $J(f_i)$ 的 Carathéodory 圈 (loop). 按相反的方向沿着填充 Julia 集的边界粘贴, 得到一个拓扑空间 $X = (K(f_1) \sqcup K(f_2))/(\eta_1(t) \sim \eta_2(-t))$, 其中等价关系 \sim 被称为外射线等价 (ray equivalence), 并记为 \sim_r . 若 X 同胚于 2-维球面 S^2 , 则称多项式偶对 (f_1, f_2) 是可拓扑耦合的 (topologically mateable). 诱导的映射称为 f_1 和 f_2 的拓扑耦合:

$$f_1 \sqcup_{\tau} f_2 = (f_1|_{K(f_1)}) \sqcup (f_2|_{K(f_2)})/(\eta_1(t) \sim \eta_2(-t)).$$

如果存在一个二次有理函数 $F : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ 和一个同胚 $\Phi : S^2 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ 使得 Φ 将 $f_1 \sqcup_{\tau} f_2$ 共轭为 F 且 Φ 在 $K(f_1)$ 和 $K(f_2)$ 的内部 (如果内部非空的话) 是共形的, 则 f_1 和 f_2 被称作是可共形耦合的 (conformally mateable), 并称 $F = f_1 \sqcup f_2$ 是 f_1 和 f_2 的一个共形耦合. 如果这个 F 在相差一个 Möbius 共轭的意义下是唯一的, 则称 F 是 f_1 和 f_2 的共形耦合.

如果 f_1 和 f_2 落在 Mandelbrot 集的共轭 limbs 里且具有局部连通的 Julia 集, 那么即使是 f_1 和 f_2 的拓扑耦合都不能实现, 因为 $(K(f_1) \sqcup K(f_2))/\sim_r$ 不同胚于一个 2-维球面. 利用 Thurston 对临

界有限有理函数的拓扑刻画 [258], 谭蕾, Rees 和 Shishikura 证明了下面的定理 (见 [716], [602], [604], [672]):

定理 6.4 (谭蕾, Rees, Shishikura) 任何两个 Julia 集连通的次双曲二次多项式能共形耦合当且仅当它们不落在 Mandelbrot 集的共轭 limbs 里.

此外, Rees 和 Shishikura 还证明了: 若两个临界有限二次多项式的形式耦合 (formal mating, 定义见 [716]) 组合等价于一个有理函数, 那么它们的拓扑耦合共轭于该有理函数. 证明的主要步骤是说明存在一个形式耦合到有理函数的半共轭 [604], [672]. 关于该结果的推广可见 [206], [666].

当两个二次多项式都有一个严格预周期的临界点时, 它们的填充 Julia 集内部为空, 而耦合之后的有理函数的 Julia 集是整个球面. 这样的例子和解释可见 [510]. 上述耦合结果被 Haïssinsky 和谭蕾利用抛物手术推广到几何有限有理函数 [348]. 若 f_1 和 f_2 是双曲的 (所在的 Mandelbrot 集的双曲分支为 \mathcal{H}_1 和 \mathcal{H}_2) 且落在两个不共轭的 limbs 中, 那么通过耦合给了 $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ 和二次有理函数参数空间中的一个双曲分支之间的一个同构. 但这个同构不能连续延拓到 $\overline{\mathcal{H}}_1 \times \overline{\mathcal{H}}_2$ 上 [272], [556].

第一个不依赖于 Thurston 定理的耦合结果出现在 [446]. 其主要方法是先寻找作为耦合候选的有理函数 (某些情况需要依赖于参数拼图) 然后再证明候选的有理函数确实就是一个耦合. 该方法被用于 $z \mapsto z^2 - 1$ (其 Julia 集被称为“教堂” (basilica)) 和其它二次多项式的耦合 (见 [750], [728], [19], [262]). 其中的证明需要研究一个含有周期为 2 的超吸性周期循环的二次有理函数参数空间切片.

对于含有中性不动点的二次有理函数 $f_\theta(z) = e^{2\pi i\theta}z + z^2$, 其中 $\theta \in \mathbb{R}$, Milnor 提出了下面的问题 [510, p. 61]:

问题 19 (Milnor) 假设 f_θ 和 f_ν 的 Julia 集局部连通且 $e^{2\pi i(\theta+\nu)} \neq 1$. 那么 f_θ 和 f_ν 的共形耦合 $f_\theta \sqcup f_\nu$ 是否存在?

这个问题是一般的二次耦合猜想 (Quadratic Mating Conjecture) 的特殊情形 [506, p. 54]. 注意 $e^{2\pi i(\theta+\nu)} \neq 1$ 可类比于之前要求的不落在共轭 limbs 里的条件. Milnor 的问题在当 θ 和 ν 为有理数或有界型无理数 (此时二次多项式含有 Siegel 盘) 时被解决了³⁹⁾ (见 [759], [348], [312]). 付宇铭和张艳华最近证明了对于任何有界型无理数 θ , 二次多项式 f_θ 与任何次双曲二次多项式是共形可耦合的 [314]. 在证明含有 Siegel 盘的二次多项式耦合定理时, 一个与上述共形耦合等价的定义被引入 (见 [759, p. 27], [559]), 它在应用时更方便. 见图 5.

除了二次多项式, 高次多项式的耦合也得到了很多研究. 但由于出现更多的临界轨道, Shishikura 和谭蕾证明三次临界有限多项式的耦合和二次的情况有很大不同: 一个三次的临界有限分支覆盖可以没有 Levy 循环但有 Thurston 障碍 [678], [181]. 一些三次的 Newton 映射也可以看做两个三次的多项式通过耦合得到 [717], [18]. 其它的三次多项式的耦合可见 [659].

对于很多情况, 要得到耦合后的有理函数的表达式是很困难的. 有一些算法能够计算这些有理函数的数值近似, 主要是 Thurston 算法和“水母算法” (Mesuda algorithm), 见 [121], [387] 和 [749]. Meyer 给出了有理函数能通过耦合得到的充分条件. 特别地, 他证明了任何一个临界有限且没有周期临界点的有理函数 f (于是 Julia 集为整个球面), 其若干次迭代 $f^{\circ n}$ 一定是两个临界有限多项式的共形耦合 [500], [501].

一个有意义的问题是研究具有连通但非局部连通 Julia 集的多项式耦合. Milnor 建议通过粘贴

39) 对几乎所有的无理数 θ 和 ν , 张高飞肯定地回答了 Milnor 关于 f_θ 和 f_ν 的共形 mating 问题. 见 <https://www.math.univ-toulouse.fr/~cheritat/Exposes/Banff.pdf>, 2011.

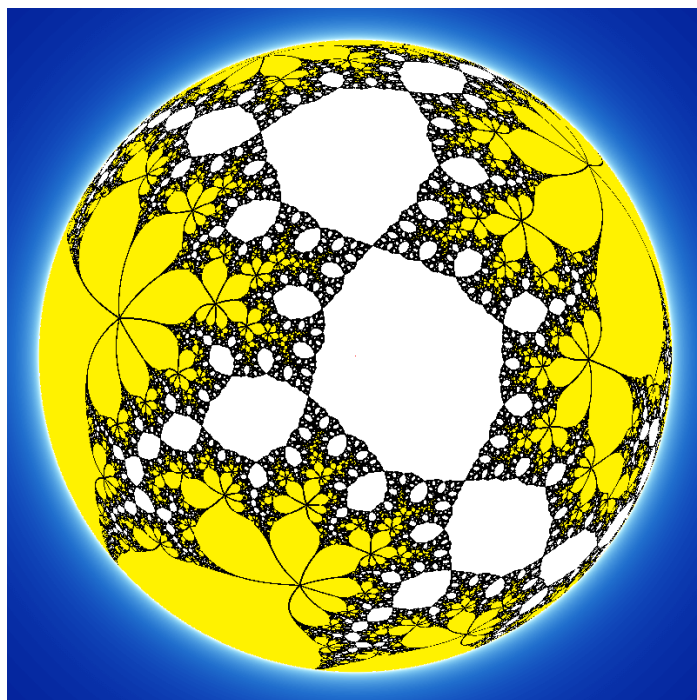


图 5 二次多项式 f_θ 和 f_ν 的耦合, 其中 $\theta = (\sqrt{5} - 1)/2$ 和 $\nu = 1/7$ 使得 f_θ 和 f_ν 分别有一个 Siegel 盘和一个带 7 个花瓣的抛物点.

等势线求极限的方式来定义 [506, p. 54]. Buff 和 Koch 提出了另外的定义方式 [154, 问题 5.3]. 因此有如下问题:

问题 20 是否存在可共形耦合的二次多项式对, 其 Julia 集连通且非局部连通?

关于多项式耦合的其它结果, 可见 [206], [748], [468], [447] 和其中的参考文献. 更多关于耦合的问题, 可见⁴⁰⁾ [154].

耦合是将两个填充 Julia 集按相反的方向沿边界粘贴. 另一种构造新动力系统的方式是将其中的一个填充 Julia 集边界沿着另一个多项式的有界不动 Fatou 分支边界粘贴, 称之为调频 (tuning). 该构造由 Douady-Hubbard 在上世纪 80 年代引入, 用于说明 Mandelbrot 集包含了自身小复制 (little copies) 的原因以及从哪里可以找到这些复制 [257], [346]. 沈维孝和王轶珉证明: 如果 f 是一个临界有限的双曲多项式且其有界 Fatou 分支的闭包两两不交, 那么 f 可以和任何次数兼容的多项式 (Julia 集连通) 进行调频 [665]. 关于调频的研究还可见 [372], [371].

最近张高飞考虑了一种新型的构造: Jordan 耦合, 即将两个临界有限的多项式沿着它们的有界不动 Fatou 分支边界粘贴, 可以得到一个新的有理函数 [798]. 其它通过粘贴生成新动力系统的构造还包括: 二次有理函数与模群的耦合 [160], 反全纯 (anti-holomorphic) 二次多项式和理想三角群的耦合 [424]. 更多关于耦合的信息可见 [559] 和 [159].

40) 2011 年 6 月, 图卢兹召开了一个关于多项式耦合的研讨会. 2012 年, 图卢兹科学院年鉴上刊登了一期关于耦合的专业文章 (Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) 21 (2012), no. 5, 839–1176).

7 旋转域和中性周期点

7.1 Siegel 盘与 Cremer 点

考虑定义在包含原点的一个开邻域内的非线性全纯函数芽 $f(z) = \lambda z + \mathcal{O}(z^2)$, 其中 $\lambda \neq 0$. 一个经典的问题是 f 能否局部线性化? 即是否存在一个坐标变换, 使得 f 共轭到它的线性部分 $z \mapsto \lambda z$? 当 $|\lambda| \neq 1$ 时, 答案是肯定的 [411]. 而当 $\lambda = e^{2\pi i \alpha}$ 且 $\alpha \in \mathbb{Q}$ 时, 答案是否定的, 除非存在 $n \geq 1$ 使得 $f^{on} = \text{id}$ (见 [423], [299]). 于是只需考虑

$$f(z) = \lambda z + \mathcal{O}(z^2), \quad \text{其中 } \lambda = e^{2\pi i \alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

的局部线性化问题⁴¹⁾. 此时 0 称为 f 的一个无理中性不动点.

上世纪初, 对于上述问题, Kasner, Pfeiffer, Julia 分别得到了一些结论, 但证明均有误. 直到 20 年代后期, Cremer 证明: 对任意正整数 $d \geq 2$, 存在无理数 α 使得任意次数为 d 的上述有理函数 f 均不能在 0 处局部线性化 [199]. 这些无理数满足:

$$\limsup_{q \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{|\lambda^q - 1|} \right)^{\frac{1}{dq}} = +\infty.$$

可以直观地认为这些 α 是“非常靠近”有理数的无理数. 1942 年, Siegel 给出了所有全纯函数芽可以局部线性化的一个充分条件 [680]:

定理 7.1 (Siegel) 若存在 $c > 0$ 和 $\kappa \geq 2$ 使得对所有的整数 $q \geq 1$ 有

$$\frac{1}{|\lambda^q - 1|} < c q^{\kappa-1},$$

则任何全纯函数芽 $f(z) = \lambda z + \mathcal{O}(z^2)$ 在 0 处均可局部线性化.

Siegel 定理中的条件等价于 α 是阶为 κ 的丢番图数 (Diophantine number), 即 $\alpha \in \mathcal{D}(\kappa)$ 且

$$\mathcal{D}(\kappa) := \left\{ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mid \exists \varepsilon > 0, \kappa \geq 2 \text{ 使得 } \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{\varepsilon}{q^\kappa}, \forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

显然, 若 $\kappa < \kappa'$ 则 $\mathcal{D}(\kappa) \subset \mathcal{D}(\kappa')$. 丢番图数的基本性质包括: 每个代数数都是丢番图的; $\mathcal{D}(2+) := \bigcap_{\kappa > 2} \mathcal{D}(\kappa)$ 在 \mathbb{R} 中具有满测度; $\mathcal{D}(2) \neq \emptyset$ 且具有零测度; 对任意 $0 < \kappa < 2$ 有 $\mathcal{D}(\kappa) = \emptyset$ 等.

任何无理数 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 都有连分式展开:

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}},$$

其中 a_0 为整数使得 $\alpha - a_0 \in (0, 1)$ 且每个 a_n 为正整数, $n \geq 1$. 其 n 次逼近定义为 $a_0 + p_n/q_n = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$, 这里 p_n 和 q_n 是互素的正整数. 归纳地可以验证, 对所有 $n \geq 2$ 有

$$\begin{aligned} q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \quad q_0 = 1, \quad q_1 = a_1, \\ p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad p_0 = 0, \quad p_1 = 1. \end{aligned}$$

41) 如果 f 能拓扑共轭到 $z \mapsto \lambda z$, 那么它一定能共形共轭到 $z \mapsto \lambda z$ [164, p. 42].

于是 $\alpha \in \mathcal{D}(\kappa) \Leftrightarrow q_{n+1} \leq Cq_n^{\kappa-1}, \forall n \geq 1$, 其中 $C > 0$ 是一个常数. 特别地,

$$\alpha \in \mathcal{D}(2) \Leftrightarrow q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1} \leq Cq_n \Leftrightarrow \sup_{n \geq 1} \{a_n\} < +\infty.$$

每个 $\alpha \in \mathcal{D}(2)$ 称作是**有界型** (bounded type) 或**常数型** (constant type). 例如 $(\sqrt{5} - 1)/2 = [0; 1, 1, 1, \dots] \in \mathcal{D}(2)$. 如果 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 最终周期, 则称 $\alpha = [0; a_1, a_2, a_3, \dots]$ 是二次无理的. 这等价于 α 是一个整系数二次多项式的根. 例如 $\sqrt{2} - 1 = [0; 2, 2, 2, \dots]$ 是 $x^2 + 2x - 1 = 0$ 的一个根.

Brjuno 和 Rüssman 进一步研究了全纯函数芽的线性化问题, 得到了下面的一般结果 (见 [129], [130], [649]):

定理 7.2 (Brjuno, Rüssman) 若

$$\alpha \in \mathcal{B} := \left\{ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mid \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(q_{n+1})}{q_n} < +\infty \right\},$$

则任何全纯函数芽 $f(z) = e^{2\pi i \alpha} z + \mathcal{O}(z^2)$ 在 0 处均可局部线性化.

数集 \mathcal{B} 中的无理数称为 **Brjuno 数**, 且有 $\mathcal{D}(2) \subsetneq \mathcal{D}(2+) \subsetneq \mathcal{D} := \bigcup_{\kappa \geq 2} \mathcal{D}(\kappa) \subsetneq \mathcal{B}$. 比如对任意的 $a_1 \geq 1$, 当 $a_{n+1} = \lfloor e^{a_n} \rfloor$ 时, 有 $\alpha = [0; a_1, a_2, \dots] \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{D}$. Yoccoz 证明了上述线性化条件是最优的 [780], [782]:

定理 7.3 (Yoccoz) 若 $\alpha \notin \mathcal{B}$, 则 $f(z) = e^{2\pi i \alpha} z + z^2$ 在 0 处不能局部线性化. 此外, f 具有小循环 (small cycles) 性质, 即 0 的任何邻域内都包含无穷多个周期轨道.

关于小循环的进一步研究可见 [549], [550], [27]. 如果全纯函数芽 $f(z) = e^{2\pi i \alpha} z + \mathcal{O}(z^2)$ 在 0 处局部可线性化, 则称 0 是 f 的一个 Siegel 点, 否则称 0 是 f 的一个 Cremer 点. 基于以上结果, Douady 在上世纪 80 年代提出了如下猜想 [249, 注 2], p. 162]:

猜想 21 (Douady) 若 $f(z) = e^{2\pi i \alpha} z + \mathcal{O}(z^2)$ 是一个非线性有理函数 (或超越整函数) 且 0 是 f 的一个 Siegel 点, 则 $\alpha \in \mathcal{B}$.

在对临界轨道作一些限制后, Douady 猜想被证明对一些特殊函数族成立 [551], [325], [534], [326], [173]. 特别地, Douady 猜想对任意单临界多项式成立. 除了 [173], 这些结果的证明本质上依赖于 Yoccoz 的结果和多复变函数论. 目前, 即使是对三次多项式 $z \mapsto e^{2\pi i \alpha} z + b_2 z^2 + z^3$, 正弦函数 $z \mapsto e^{2\pi i \alpha} \sin z$ 和指数映射 $z \mapsto e^{2\pi i \alpha} (e^z - 1)$, Douady 猜想仍未解决.

定义 (Siegel 盘) 若 $f(z) = e^{2\pi i \alpha} z + \mathcal{O}(z^2)$ 是定义在开集 $U \ni 0$ 上的一个全纯函数芽且在 0 处局部可线性化, 则称 f 在 U 中包含 0 的最大线性化区域 Δ_f 为 f 的以 0 为心的 **Siegel 盘** (Siegel disk).

任何 Siegel 盘都是单连通的, 其内部不含临界点且不含除了中心以外的任何周期点. 由于 Siegel 盘内部的动力系统非常清楚 (共轭于无理旋转), 因此一个自然的问题是研究 Siegel 盘的边界. Douady 和 Sullivan 提出了如下猜想 ([248], [643]):

猜想 22 (Douady-Sullivan) 非线性有理函数的 Siegel 盘都是一个 Jordan 区域.

通过构造一个 3 次的 Blaschke 乘积作为模型, Douady-Herman 利用 Herman-Świątek 拟对称延拓定理⁴²⁾ (见 [357], [714], [557], [558], [787, 定理 2.7]) 和拟共形手术证明了当 α 为有界型时, 二次多

⁴²⁾ 在对单位圆盘进行拟共形延拓时, 可以用 Beurling-Ahlfors 或 Douady-Earle 延拓 [92], [254].

项式 $f_\alpha(z) = e^{2\pi i \alpha} z + z^2$ 的 Siegel 盘 Δ_α 边界是一个拟圆周并穿过 f_α 的临界点 [249]. 利用同样的方法, Herman 证明存在无理数 α 使得 Δ_α 的边界是一个拟圆周但不穿过临界点 [357].

通过研究更一般的 Blaschke 乘积, 张高飞推广了 Zakeri 和 Shishikura 等人的结果 [784], [673], [759], 在有界型条件证明了 Douady-Sullivan 猜想 [795]:

定理 7.4 (张高飞) 任何非线性有理函数的有界型 Siegel 盘边界都是一个拟圆周且至少穿过一个临界点.

关于超越整函数 Siegel 盘的边界拓扑, 通过构造超越亚纯 Blaschke 乘积, Zakeri 证明了下述结果 [787]:

定理 7.5 (Zakeri) 任何非线性整函数 $f(z) = P(z)e^{Q(z)}$ 的以 0 为心的有界型 Siegel 盘边界都是 \mathbb{C} 中的一个拟圆周且至少穿过 f 的一个临界点, 其中 P, Q 为多项式.

上面两个定理的想法都是证明 Siegel 盘内部的不变曲线为一致拟圆周. 若 Zakeri 定理中的多项式 Q 是常数, 那么 f 是一个多项式, 该定理即为 Shishikura 证明的情形 [673]. 在超越整函数方面, Zakeri 的这个结论推广了 Geyer, Keen-张高飞等的结论 [325], [403]. 当 Siegel 盘的旋转数 α 为有界型时, 其边界的拓扑对以下函数类是已知的: 正弦函数族 [794], 某些“简单”的整函数 [178], 具有 3 个奇异值的超越整函数 [183], 以及 [761], [803]. 见图 6.

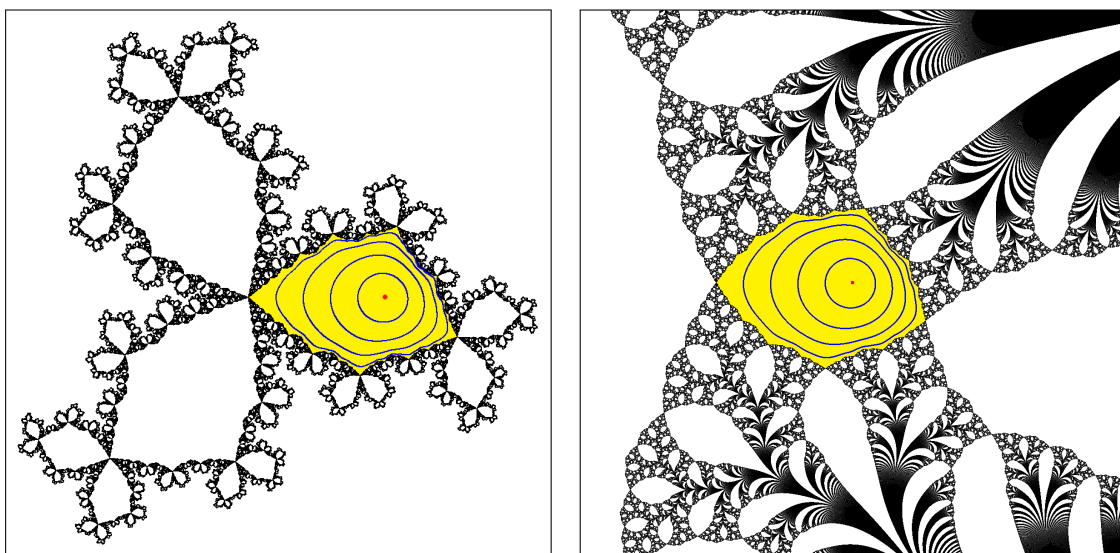


图 6 一个单临界三次多项式和一个超越整函数的 Siegel 盘, 旋转数均为 $(\sqrt{5} - 1)/2$. 它们的边界都是拟圆周且穿过一个临界点.

作为有界型无理数的推广, Petersen 和 Zakeri 引入了无理数集

$$PZ := \{\alpha \in (0, 1) \setminus \mathbb{Q} : \log a_n \leq \mathcal{O}(\sqrt{n}) \text{ 对 } n \rightarrow \infty\},$$

并通过超拟共形手术和解退化的 Beltrami 方程证明 [562]: 对于 $\alpha \in PZ$, 二次多项式 $f_\alpha(z) = e^{2\pi i \alpha} z + z^2$ 的 Siegel 盘 Δ_α 边界是一条 Jordan 曲线且穿过 f_α 的临界点. 特别地, PZ 在无理数中具有满测度, 且 $\mathcal{D}(2) \subsetneq PZ \subsetneq \mathcal{D}(2+) = \bigcap_{\kappa > 2} \mathcal{D}(\kappa)$. Petersen-Zakeri 的结果被张高飞推广到所有的多项式和正弦函数 [796], [797].

对二次多项式, 沈良进一步推广了 Petersen-Zakeri 的结果 [660]. Avila, Buff 和 Chéritat 证明存在二次多项式, 其具有边界无穷阶光滑的 Siegel 盘 [25], [26], 和边界其它阶光滑的 Siegel 盘 [147]. 利用 Runge 逼近定理, Chéritat 构造了一个全纯函数芽, 其 Siegel 盘在定义域中具有紧的闭包但边界是一个伪圆 (pseudo-circle), 因而不是局部连通的 [180]. 但目前这样的例子还未在有理函数和超越整函数中找到.

Siegel 盘是使得线性化成立的最大区域, 那么是什么阻止了全纯函数不能越过 Siegel 盘边界进一步线性化呢? Siegel 盘附近出现的周期点和临界点是主要原因. 关于周期点, Avila 和 Cheraghi 证明对于某些旋转数, 二次多项式的 Siegel 盘附近包含无穷多个周期轨道 [27], 类似于 Cremer 点附近的小循环性质. 关于 Siegel 盘边界是否包含临界点的问题 [248, p. 40], Ghys 和 Herman 首先给出多项式的例子说明 Siegel 盘边界可以不含临界点 [327], [357]. 而另一方面, 对于上面提到的关于 Siegel 盘边界的拓扑性质, 其边界在大部分情形下包含了一个临界点. Graczyk 和 Świątek 证明了如下一般结果 [343]: 若解析函数有一个紧包含在定义域中的有界型 Siegel 盘, 那么该 Siegel 盘的边界一定包含一个临界点. 关于 Siegel 盘边界何时包含临界点 (或奇异值), Herman 有如下猜想 [356, p. 595]:

猜想 23 (Herman) 任何非线性有理函数 (或超越整函数) 的 Siegel 盘边界包含一个临界点 (或奇异值) 当且仅当 Siegel 盘的旋转数是 Herman 类型.

称一个无理数 α 为 **Herman 类型**, 如果任何具有旋转数 α 的保向实解析圆周微分同胚都实解析共轭到刚性旋转 (所有该类型无理数构成的集合记成 \mathcal{H}). Herman 证明了 \mathcal{H} 包含某些丢番图数 [354], 之后 Yoccoz 证明 \mathcal{H} 包含了所有的丢番图数 [778] 并给了 \mathcal{H} 一个算术刻画 [783]. 在旋转数为 Herman 类型条件下证明 Siegel 盘边界上包含临界点 (或奇异值) 的工作包括: [327], [356], [643], [644], [611], [185], [68].

利用近抛物重整理论, Shishikura 和本文作者, Cheraghi 独立地证明了: 当无理数 α 满足高型 (high type) 条件⁴³时, 二次多项式 f_α 的 Siegel 盘边界 (如果非空) 是一条 Jordan 曲线且它穿过临界点当且仅当 α 是 Herman 类型 [679], [174].

上世纪 80 年代, Manton, Nauenberg 和 Widom 等人通过数值计算观察到对某些 Siegel 盘, 其边界关于临界点有自相似性. McMullen 利用 Siegel 重整, 从数学上严格证明了二次多项式的二次无理型 Siegel 盘边界关于临界点确实是自相似的 [494]. 关于相似性的进一步研究可见 [156], [315], [186], [443]. Siegel 盘的边界可以是光滑的 (因此 Hausdorff 维数等于 1), 也可以是 Hausdorff 维数严格介于 1 和 2 之间的拟圆周 [334]. 一个有趣的问题是 [25]:

问题 24 (Avila-Buff-Chéritat) 是否存在无理数 α , 使得 $f_\alpha(z) = e^{2\pi i \alpha} z + z^2$ 的 Siegel 盘边界的 Hausdorff 维数等于 2?

若 U 是一个包含 0 的双曲区域, U 在 0 处的共形半径 (conformal radius) 定义为 $|\pi'(0)|$, 其中 $\pi: (\mathbb{D}, 0) \rightarrow (U, 0)$ 是一个万有覆盖. 特别地, 当 U 是单连通区域, 比如是 Siegel 盘时, π 是共形映射. 共形半径用于刻画区域的大小. 基于 [782], [144], Buff 和 Chéritat 证明了 Yoccoz 定义的 Brjuno 和 (Brjuno sum) 可以连续地估计二次多项式 Siegel 盘的共形半径 [146]. 进一步的研究见 [148], [175].

关于含 Siegel 盘的可理函数 Julia 集的局部连通性研究, 见 §2.3 以及 [555], [757], [759], [562], [660], [740], [312]. 有关 Siegel 盘的综述和问题集可见 [249], [786] (也可见 [344, §7.1]).

43) 称 α 是高型 (high type) 无理数, 如果其连分式展开的系数都大于某个给定的正整数. 该类型数集与常见的无理数集 (如有界型, PZ 类型, 丢番图数集, Herman 类型, Brjuno 类型等) 的交都是非空的.

由于全纯函数在其 Cremer 点处不能局部线性化, 因而其附近的动力系统非常复杂. Pérez-Marco 建立的如下定理是关于 Cremer 点 (以及当 Siegel 盘的边界不含临界点时) 最深刻的结果之一 [553]:

定理 7.6 (Pérez-Marco) 对于全纯芽 $f(z) = e^{2\pi i \alpha} z + \mathcal{O}(z^2)$, 其中 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, 若 f 和 f^{-1} 都单叶地定义在一个包含 0 的 Jordan 区域 Ω 的闭包的一个邻域内, 则存在一个满且紧 (full and compact) 的连通集 K , 使得 $0 \in K \subset \bar{\Omega}$, $K \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ 且 $f(K) = f^{-1}(K) = K$.

集合 K 被称为一个“Siegel 紧统” (Siegel compactum), 它可以看作是退化的 Siegel 盘. 如果 K 不落在一个线性化区域的闭包中 (比如当 0 是一个 Cremer 点时), 则称 K 是一个“刺猬” (hedgehog). 刺猬在拓扑上是复杂的, 特别地, 它们一定非局部连通. Kiwi 证明具有 Cremer 点且满足小循环性质的多项式 (特别地, 二次多项式满足该条件 [782]) 一定有一个临界点, 使得其从无穷远的吸引域不可达 (not accessible). 在进一步假设 Julia 集连通时, 一定有一条外射线既聚集到临界值也聚集到 Cremer 点 [406]. 特别地, 这蕴含了 Julia 集非局部连通并且加强了 Douady-Sullivan 的结论 [511, §18]. 证明时主要利用外射线在周期点的着陆性质.

对于二次多项式 $f_\alpha(z) = e^{2\pi i \alpha} z + z^2$, Zakeri 证明: 如果 z 是 f_α 的 Julia 集上的一个双可达 (biaccessible) 点, 那么 z 的向前轨道要么经过临界点 (此时 0 是一个 Siegel 点), 要么经过不动点 0 (此时 0 是一个 Cremer 点) [785]. 若 α 满足高型条件, Cheraghi 等研究了 f_α 的最大刺猬 Λ_α , 给出了其拓扑结构的刻画 [174], [679], 证明了其 Lebesgue 测度为零 [173], 且当临界点不在 Siegel 盘边界上时其 Hausdorff 维数等于 2 [176].

Biswas 研究了含 Cremer 点的全纯函数芽, 证明了存在一些不含内点的刺猬, 其 Hausdorff 维数可以等于 1 [98], 面积也可以为正 [99]. 含 Cremer 点的二次多项式 Julia 集的拓扑结构研究还可见 [693], [105]. 但至今为止, 还没有任何一个含 Cremer 点的 Julia 集整体拓扑结构被刻画清楚 (部分结果可见 [344]).

全纯函数 $f(z) = e^{2\pi i \alpha} z + \mathcal{O}(z^2)$ 在无理中性不动点 0 处的性质还包括: 旋转数 α 是一个拓扑不变量 [525]; f 不存在收敛到 0 的向前轨道 (除非该轨道最终映到 0 本身) [552]; 特别地, 若 f 是一个多项式, 则 f 有一个“刺猬之母” (mother hedgehog, 可以看作是最大的刺猬), 其边界上包含一个临界点 [188]. 最近, Dudko 和 Lyubich 证明了对于任意无理数 α , 二次多项式 f_α 都有一个刺猬之母, 使得 f_α 在其上的限制是一个同胚 [263]. 该结论的一个直接结论是 f_α 的 Siegel 盘边界不是整个 Julia 集.

鉴于全纯函数在 Cremer 点附近动力系统的复杂性, 除了含 Cremer 点的 Julia 集的整体拓扑不清楚外, 至今为止还没有人画出一个含 Cremer 点的多项式 Julia 集图像. 上世纪 90 年代 Milnor 提出了下面的问题 [95, p. 443]:

问题 25 能否用计算机画出一个含 Cremer 点的多项式 Julia 集图像?

更多含 Cremer 点的全纯函数动力系统相关问题可见 [95, §19.6], [344, §7.2]. 其中主要包括外射线的着陆情况, 小循环性质, 去掉割点后连通分支的个数, Julia 集的 Hausdorff 维数和面积等问题.

7.2 Herman 环

早在 19 世纪后期, Poincaré 就考虑了单位圆周上同胚映射 $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ 的线性化问题. 他证明如

果 f 没有周期点, 那么 f 半共轭于刚性旋转 $R_\alpha(z) = e^{2\pi i\alpha}z$, 其中 α 是一个无理数且等于 f 的旋转数 $\rho(f)$ [499, p. 32]. 进一步, Denjoy 和 Yoccoz 分别证明如果 $\rho(f) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 且 f 是一个 C^2 微分同胚 (见 [223], [499, p. 38]), 或为至少有一个临界点的实解析同胚 [779], 则 Poincaré 半共轭是一个共轭⁴⁴⁾.

1961 年, Arnol'd 证明如果 $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ 实解析, 旋转数 $\rho(f)$ 是丢番图的, 且 f 是刚性旋转的一个小扰动, 那么 f 的共轭映射也是实解析的 [13]. Arnol'd 猜测 f 是刚性旋转的一个小扰动这个条件去掉后结论也成立. Herman 在 1979 年对一大类丢番图函数证明了 Arnol'd 的猜想 [354], 后该猜想由 Yoccoz 推广到 Herman 类型 \mathcal{H} (其为 Brjuno 类型 \mathcal{B} 的真子集) [778]. 在 [783] 中, Yoccoz 给了 Herman 数一个算术刻画, 同时证明了下面关于圆周的整體和局部共轭定理:

定理 7.7 (Yoccoz) (1) (整体共轭) 若 $\rho \in \mathcal{H}$, 则任何旋转数为 ρ 的解析圆周微分同胚可以解析线性化. 若 $\rho \notin \mathcal{H}$, 则存在一个旋转数为 ρ 的解析圆周微分同胚不能解析线性化.

(2) (局部共轭) 若 $\rho \in \mathcal{B}$, 则存在 $R = R(\rho) > 1$ 使得任何旋转数为 ρ 且能单叶延拓到圆环 $\{z \in \mathbb{C} : 1/R < |z| < R\}$ 的解析圆周微分同胚可以解析线性化, 且条件 \mathcal{B} 是最优的.

关于圆周解析线性化的问题还可见 [626], [284], [190].

定义 (Herman 环) 一个亚纯函数 f 的 Fatou 分支 U 称做是一个 **Herman 环** (Herman ring), 如果 U 共形同构于一个圆环, 且 f 或 f 的某次迭代在 U 上共轭于该圆环上的无理旋转.

鉴于 Arnol'd 在圆周同胚解析线性化方面的工作 [13], 一些文献中将 Herman 环也称作 Arnol'd-Herman 环. 根据最大模原理, 整函数没有 Herman 环. Shishikura 证明了二次有理函数没有 Herman 环 [667]. 因此含有 Herman 环的最简单例子是一个 3 次 Blaschke 乘积:

$$f_\rho(z) = e^{2\pi it} z^2 \frac{z-a}{1-az}, \quad \text{其中 } a > 3, t \in (0, 1)$$

使得 $f_\rho: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ 的旋转数是一个 Herman 数 ρ .

Arnol'd-Herman 构造 Herman 环的办法是通过研究实解析圆周微分同胚, 这样得到的映射关于圆周有对称性. 利用拟共形手术, Shishikura 将两个 Siegel 盘沿着周期曲线粘起来, 不但可以得到非对称的 Herman 环, 同时还可以得到周期大于 1 的 Herman 环, 嵌套的 Herman 环等等 [667]. 有理函数的周期 Herman 环的各种组合研究可见 [668]. 关于具有周期 Herman 的亚纯函数的显示表达研究可见 [766]. 见图 7.

根据拟共形手术 [667], Siegel 盘和 Herman 环可以相互转化. 特别地, 若存在无理数 ρ 使得一个有理函数的 Siegel 盘的旋转数为 ρ , 那么一定存在一个有理函数, 其含有一个旋转数为 ρ 的 Herman 环. 反之亦然. 作为对 Shishikura 结果的推广, Milnor 证明了双临界有理函数没有 Herman 环 [508]. 本文作者利用拟共形手术证明: 只有一个自由临界大轨道的有理函数没有 Herman 环 [762]. 肖映青和胡骏也研究了有理函数不含 Herman 环的充分条件 [361]. 根据 Milnor 的结果可知, 一个包含 Herman 环的有理函数的临界值个数至少为 3 (不计重数). 一个自然的问题是:

问题 26 是否存在仅有 3 个临界值 (不计重数) 的有理函数, 其含有 Herman 环?

根据 [361], 如果这样的有理函数存在, 那么 Herman 环的周期至少为 4. 关于有理函数退化 Herman 环的研究可见 [767], [442].

⁴⁴⁾ 事实上, Denjoy 的条件是要求 f' 有界变差, 而 Yoccoz 的条件是要求 f 为 C^∞ 映射且没有平坦 (flat) 临界点.

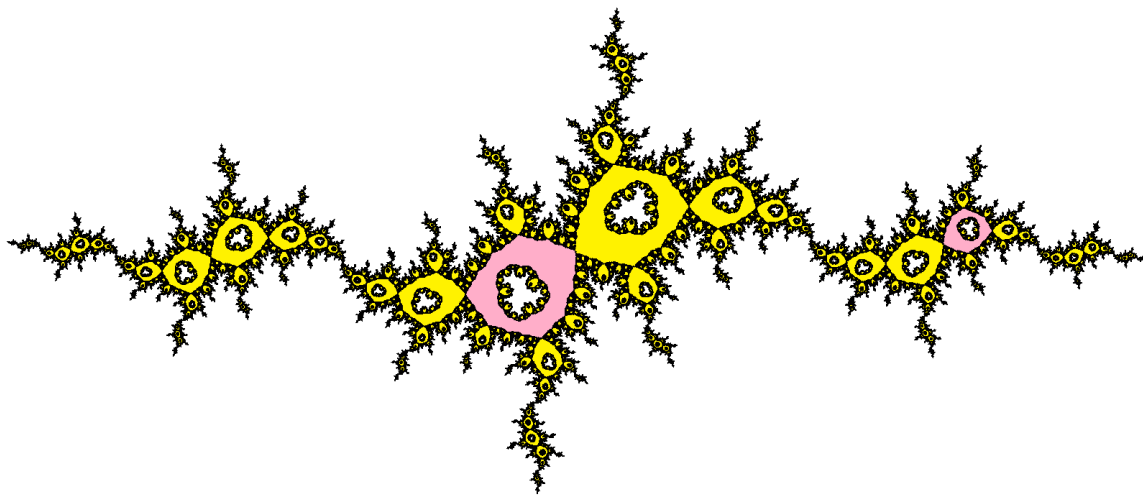


图 7 一个三次有理函数的周期为 2 的 Herman 环循环, 旋转数为 $(\sqrt{5} - 1)/2$.

第一个包含 Herman 环的超越亚纯函数由郑建华根据拟共形手术得到 [807] (也见 [245] 的工作). 超越亚纯函数和 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上的全纯函数 (比如复标准族) 的 Herman 环研究可见 [284], [155], [527], [633] 及其中的参考文献.

7.3 抛物爆炸与重整

全纯函数在抛物点附近的动力系统很清楚, 然而一旦扰动, 则可能产生非常复杂的动力系统现象. 一维复动力系统中有如下说法“抛物点是不稳定的根源”. 这其中最典型的现象就是抛物爆炸.

对于一个全纯有理函数族 $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, 称一个参数 $\lambda \in \Lambda$ 为抛物参数 (或 Siegel 参数) 是指 f_λ 有一个非持续 (non-persistent) 的抛物周期点 (或 Siegel 周期点). Douady 研究了多项式 f 的填充 Julia 集 $K(f)$ 和 Julia 集 $J(f)$ 的连续性 (在复平面上紧子集的 Hausdorff 距离意义下), 证明了 [251]:

定理 7.8 (Douady) 对于全纯多项式族 $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, 函数 $f_\lambda \mapsto K(f_\lambda)$ 是上半连续的, 其在 f_λ 处连续当且仅当 λ 不是抛物参数. 函数 $f_\lambda \mapsto J(f_\lambda)$ 是下半连续的, 其在 f_λ 处连续当且仅当 λ 不是抛物参数或 Siegel 参数.

对于抛物全纯函数 $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \mathcal{O}(z^4)$, 其中 $a_2 \neq 0$, 通过坐标变换 $w = \varphi(z) = -1/(a_2 z)$, 抛物不动点 0 移到了 ∞ 且 f 在这个新的坐标下的表达式为 $F(w) = w + 1 + \frac{\gamma}{w} + \mathcal{O}(\frac{1}{w^2})$, 其中 $\gamma = 1 - a_3/a_2^2$ 是 f 的迭代留数 (iterative residue). 对充分大的 $L > 0$, 存在单叶函数 $\Phi_{attr, F} : \Omega_{attr, F} = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w - L > -|\operatorname{Im} w|\} \rightarrow \mathbb{C}$ 和 $\Phi_{rep, F} : \Omega_{rep, F} = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w + L < |\operatorname{Im} w|\} \rightarrow \mathbb{C}$ 使得

$$\Phi_{s, F}(F(w)) = \Phi_{s, F}(w) + 1, \quad \forall w \in \Omega_{s, F} \quad (s = attr, rep).$$

它们分别称为 F 的吸性和斥性 **Fatou 坐标** (Fatou coordinates), 且当 $w \rightarrow \infty$ 时有⁴⁵⁾ (见 [671]):

$$\Phi_{attr, F}(w) = w - \gamma \log w + C_{-, 0} + o(1),$$

$$\Phi_{rep, F}(w) = w - \gamma \log w + C_{+, 0} + o(1),$$

45) 对数函数 $\log w$ 分别定义在单连通区域 $\Omega_{attr, F}$ 和 $\Omega_{rep, F}$ 上, 且约定它们在 $\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w > |\operatorname{Re} w| + L\}$ 上表示同一对数分支, 即 $\log(2Li) = \log(2L) + i$.

其中 $C_{\mp,0}$ 为常数. 这两个映射 $\Phi_{attr,F}$ 和 $\Phi_{rep,F}$ 在相差一个可加常数的意义下是唯一的. 记 $\Omega_s = \varphi^{-1}(\Omega_{s,F})$ 和 $\Phi_s = \Phi_{s,F} \circ \varphi$, 其中 $s = attr, rep$, 那么 Φ_{attr} 和 Φ_{rep} 分别在 Ω_{attr} 和 Ω_{rep} 上关于 f 也共轭于单位平移, 且在相差一个可加常数的意义下是唯一的. 类似地, 它们分别称为 f 的吸性和斥性 Fatou 坐标.

吸性 Fatou 坐标可以通过 $\Phi_{attr}(z) = \Phi_{attr}(f^n(z)) - n$ 全纯地延拓到 0 的整个抛物域 B_f 中. 若 f 是一个有理函数或超越整函数, 则斥性 Fatou 坐标的逆 Φ_{rep}^{-1} 可以通过 $\Psi_{rep}(\zeta) = f^n(\Phi_{rep}^{-1}(\zeta - n))$ 全纯地延拓到整个复平面.

定义 (Lavaurs 映射) 对于 $\sigma \in \mathbb{C}$, 具有相 (phase) σ 的 **Lavaurs 映射** 定义为:

$$\mathcal{L}_{f,\sigma} := \Psi_{rep} \circ T_\sigma \circ \Phi_{attr} : B_f \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}, \quad \text{其中 } T_\sigma(w) = w + \sigma.$$

Lavaurs 在他的博士论文中证明了下面的结果 [421] (也可见 [251]):

定理 7.9 (Lavaurs) 对于多项式 $f_0(z) = z + z^2 + \mathcal{O}(z^3)$ 和 $\varepsilon \in \mathbb{C}$, 记 $f_\varepsilon(z) = f_0(z) + \varepsilon^2$. 若存在一系列复数 $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ 和整数 $(m_n)_{n \geq 0}$ 使得当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $m_n \rightarrow +\infty$ 且

$$\frac{\pi}{\varepsilon_n} - m_n \rightarrow \sigma \in \mathbb{C},$$

则 $f_{\varepsilon_n}^{m_n}$ 在 B_{f_0} 中局部一致收敛到 $\mathcal{L}_\sigma := \mathcal{L}_{f_0,\sigma}$. 此外,

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow +\infty} J(f_{\varepsilon_n}) &\supset J(f_0, \mathcal{L}_\sigma) \supsetneq J(f_0), \\ \limsup_{n \rightarrow +\infty} K(f_{\varepsilon_n}) &\subset K(f_0, \mathcal{L}_\sigma) \subsetneq K(f_0), \end{aligned}$$

其中 $K(f_0, \mathcal{L}_\sigma) = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{L}_\sigma^{-n}(\mathbb{C} \setminus K(f_0))$ 和 $J(f_0, \mathcal{L}_\sigma) = \partial K(f_0, \mathcal{L}_\sigma)$.

基于上述定理和作为 Kleinian 群的类比, Lavaurs 映射也称作几何极限. 定理中的 $J(f_0, \mathcal{L}_\sigma)$ 称作是**丰盈 Julia 集** (enriched Julia set). 该现象被称为**抛物爆炸** (parabolic implosion). 见图 8. 此时有关 Julia 集 Hausdorff 维数连续性的研究可见 [259].

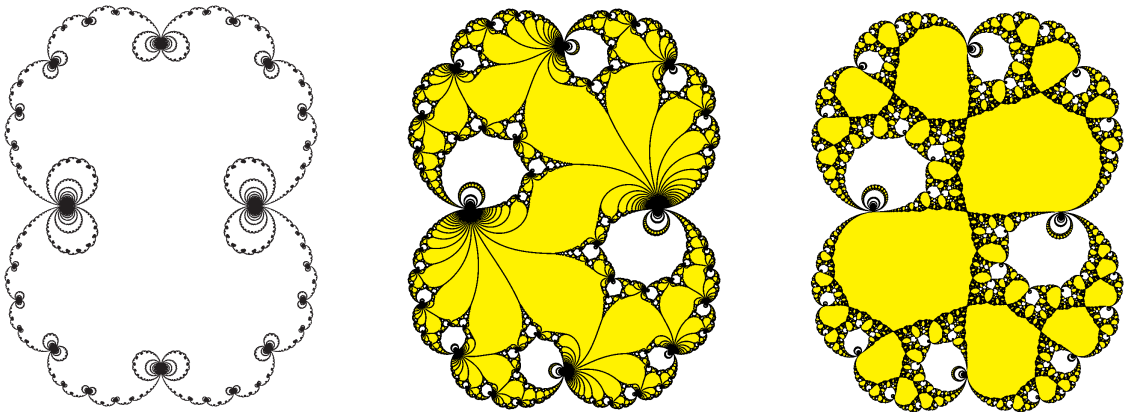


图 8 由 $f_0(z) = z + z^2$ 抛物爆炸后得到的三种不同类型的丰盈 Julia 集 $J(f_0, \mathcal{L}_\sigma)$.

除了 Douady 和 Lavaurs 的上述结果, 抛物爆炸的应用还包括: 三次多项式连通迹 (connectedness locus) 的非局部连通性和 Mandelbrot 集的极限象 (limit elephant) 现象 [421]; 类多项式重整的

不连续性 [257]; Mandelbrot 集双曲分支的根 (root) 处存在参数射线着陆 [256]; Mandelbrot 集边界的 Hausdorff 维数等于 2 [670]; 有关 Siegel 盘大小的细致研究 [25], [144], [146], [148] 等.

抛物爆炸也发生在参数空间中, 见 [151]. 最近抛物爆炸在高维复动力系统中有了重要应用: 存在含游荡域的二维多项式, 这与一维的情形完全不同 (证明依赖于在一维情形下 Lavaurs 映射的性质) [22].

定义 (角形映射) 对于上文中的抛物映射 F , 吸性和斥性 Fatou 坐标 $\Phi_{attr,F}, \Phi_{rep,F}$ 在 $V_{\pm} = \{w \in \mathbb{C} : \pm \operatorname{Im} w > |\operatorname{Re} w| + L\}$ 中均有定义 (相应地, Φ_{attr}, Φ_{rep} 在 $\varphi^{-1}(V_{\pm})$ 中均有定义). 抛物映射 f 在 $\Phi_{rep,F}(V_{\pm})$ 上的**角形映射** (horn map) 为⁴⁶⁾:

$$E_f := \Phi_{attr} \circ \Phi_{rep}^{-1}.$$

不妨假设 $L > 0$ 充分大, 那么 E_f 可以全纯地延拓到 $\{\zeta \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} \zeta| > L\}$ 上并满足 $E_f(\zeta + 1) = E_f(\zeta) + 1$. 根据上文中 Fatou 坐标的展开式, 有

$$\lim_{\operatorname{Im} \zeta \rightarrow +\infty} E_f(\zeta) - \zeta = C_0 \quad \text{且} \quad \lim_{\operatorname{Im} \zeta \rightarrow -\infty} E_f(\zeta) - \zeta = C_0 + 2\pi i \gamma,$$

其中 $C_0 = C_{-,0} - C_{+,0}$. 由于吸性 Fatou 坐标 $\Phi_{attr} : \Omega_{attr} \rightarrow \mathbb{C}$ 可全纯延拓为 $\Phi_{attr} : B_f \rightarrow \mathbb{C}$, 斥性 Fatou 坐标的逆 $\Phi_{rep}^{-1} : \Phi_{rep}(\Omega_{rep}) \rightarrow \mathbb{C}$ 可全纯延拓为 $\Psi_{rep} : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, 因此角形映射可以全纯地延拓为

$$E_f = \Phi_{attr} \circ \Psi_{rep}^{-1} : \Psi_{rep}^{-1}(B_f) \rightarrow \mathbb{C}$$

且仍满足 $E_f(\zeta + 1) = E_f(\zeta) + 1$.

因为 Fatou 坐标在相差一个可加常数的意义下唯一, 那么可以对它们作一个规范化. 吸性 Fatou 坐标一般规范为 $\Phi_{attr}(v) = 1$, 其中 v 是一个标记的临界值 (或奇异值). 斥性 Fatou 坐标可以规范化使得 $C_0 = 0$, 即

$$\text{当 } \operatorname{Im} z \rightarrow +\infty \text{ 时, } E_f(\zeta) = \zeta + o(1).$$

角形映射与 Lavaurs 映射具有密切的联系. 根据 Lavaurs 映射 (相 $\sigma = 0$ 时) 的定义 $\mathcal{L}_f := \mathcal{L}_{f,0} = \Psi_{rep} \circ \Phi_{attr} : B_f \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ 可知, $\Psi_{rep} : \Psi_{rep}^{-1}(B_f) \rightarrow B_f$ 是角形映射 E_f 和 Lavaurs 映射 \mathcal{L}_f 之间的一个半共轭 (semi-conjugacy). 相比于 Lavaurs 映射, 角形映射有如下优点: 它更容易理解且有更好的覆盖性质, 最重要的是因为它与单位平移可交换, 可以经投影后得到圆柱上的动力系统 (见 [182, 附录 B]). 角形映射在上世纪 80 年代引入, 但抛物重整的想法则最先由 Shishikura 在 90 年代提出 [670], [671]. 其更详细的定义可见 [374]:

定义 (抛物重整) 记共形同构 $\operatorname{Exp}(z) = e^{2\pi iz} : \mathbb{C}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$. 定义

$$\mathcal{R}_0 f := \operatorname{Exp} \circ E_f \circ (\operatorname{Exp})^{-1}.$$

于是 0 是 $\mathcal{R}_0 f$ 的可去奇点, $(\mathcal{R}_0 f)(0) = 0$ 且 $(\mathcal{R}_0 f)'(0) = 1$, 即 $\mathcal{R}_0 f$ 在 0 处有一个抛物不动点. 称 $\mathcal{R}_0 f$ 为 f 的**抛物重整** (parabolic renormalization)⁴⁷⁾. 见图 9 和 [419].

46) 注意 $E_f = \Phi_{attr} \circ \Phi_{rep}^{-1} = (\Phi_{attr} \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \Phi_{rep}^{-1}) = \Phi_{attr,F} \circ \Phi_{rep,F}^{-1} = E_F$.

47) 准确地说, 该定义为圆柱上端的抛物重整, 圆柱下端的抛物重整可以类似地定义. 见 [374, §3].

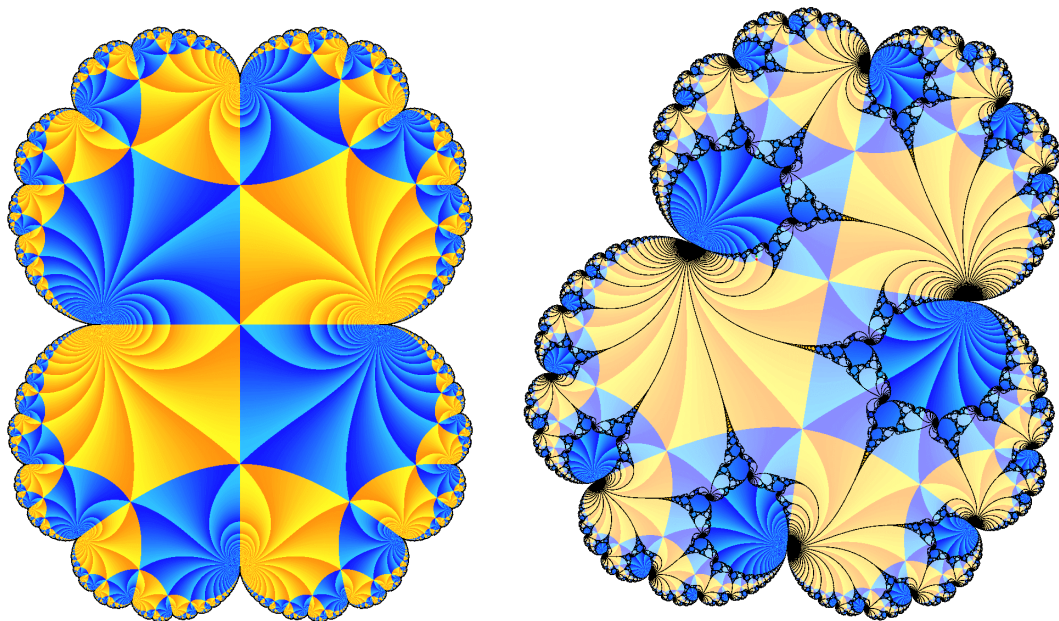


图 9 二次多项式 $f(z) = z + z^2$ 及其抛物重整 $\mathcal{R}_0 f$ 的动力平面, 其中 $\mathcal{R}_0 f$ 的抛物点和直接抛物域内的临界点分别标成绿色和红色.

在抛物重整作用下具有不变性的解析函数族可以用来解决复动力系统中的重要问题. 第一个抛物重整不变类 \mathcal{F}_0 是 Shishikura 在研究 Mandelbrot 集边界的 Hausdorff 维数时引入的 [670]. 受角形映射诱导抛物重整映射启发, Petersen 观察到具有抛物不动点的临界圆周映射也可定义抛物重整, 之后 Yampolsky 系统地研究了临界圆周映射的圆柱重整并证明了重整算子的双曲性 [758]. 本世纪初, Inou 和 Shishikura 定义了一个新的抛物重整不变类 $\mathcal{F}_1 \supseteq \mathcal{F}_0$, 它的优点是 \mathcal{F}_1 扰动后在近抛物重整算子作用下也有不变性, 但 \mathcal{F}_0 没有该性质 [374].

令 $P(z) = z(1+z)^2$ 且 V 是一个包含 0 和单临界点 $cp_P = -1/3$ 的 \mathbb{C} 中区域. 不变类 \mathcal{F}_1 的定义如下:

$$\mathcal{F}_1 := \left\{ f = P \circ \varphi^{-1} : \varphi(V) \rightarrow \mathbb{C} \left| \begin{array}{l} \varphi(z) = z + \mathcal{O}(z^2) : V \rightarrow \mathbb{C} \text{ 单叶} \\ \text{且 } \varphi \text{ 能拟共形延拓到 } \mathbb{C} \text{ 上} \end{array} \right. \right\}.$$

Inou 和 Shishikura 证明了下面的定理 [374]:

定理 7.10 (Inou-Shishikura) 存在 Jordan 区域 $V \subset \mathbb{C}$ 使得 \mathcal{F}_1 在抛物重整算子 \mathcal{R}_0 作用下不变: $\mathcal{R}_0(\mathcal{F}_1) \subset \mathcal{F}_1$. 即对于 $f \in \mathcal{F}_1$, 抛物重整 $\mathcal{R}_0 f$ 有定义且 $\mathcal{R}_0 f = P \circ \psi^{-1} \in \mathcal{F}_1$. 此外, 存在一个包含 \bar{V} 的单连通区域 $V' \subset \mathbb{C}$ 使得 ψ 可以延拓为 V' 到 \mathbb{C} 上的单叶函数.

区域 V 和 V' 的精确定义可见 [374]. 上面定理中的 V 紧包含在 V' 中非常重要, 这表明 \mathcal{F}_1 中的函数经过抛物重整, 新得到的函数解析性质更好了. 由此便能得到抛物重整算子关于 \mathcal{F}_1 上 Teichmüller 度量的一致压缩性.

利用角形映射的连续变化性, Inou 和 Shishikura 证明了近抛物重整 (near-parabolic renormal-

ization) \mathcal{R} 可以定义在下面的空间上:

$$e^{2\pi i \mathcal{A}(\alpha_*)} \times \mathcal{F}_1 = \{e^{2\pi i \alpha} h(z) \mid \alpha \in \mathcal{A}(\alpha_*) \text{ 且 } h \in \mathcal{F}_1\},$$

其中 $\mathcal{A}(\alpha_*) = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid 0 < |\alpha| < \alpha_*, |\arg \alpha| < \pi/4 \text{ 或 } |\arg(-\alpha)| < \pi/4\}$ 且 $\alpha_* > 0$ 非常小. 特别地, \mathcal{R} 可以表示为一个斜积 (skew product) $\mathcal{R} : (\alpha, h) \mapsto (-1/\alpha, \mathcal{R}_\alpha h)$, 其中 $\mathcal{R}_\alpha : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_1$ 是纤维方向 (fiber direction) 的抛物重整. 若 α 是满足高型 (high type) 条件的无理数, 即 α 的连分式展开系数都大于 $1/\alpha_*$, 那么映射 $e^{2\pi i \alpha} h \in e^{2\pi i \mathcal{A}(\alpha_*)} \times \mathcal{F}_1$ 可以被近抛物重整算子 \mathcal{R} 作用无穷多次. 这对于研究含无理中性周期点或无穷可重整的动力系统是非常有用的.

注意 $z+z^2 \notin \mathcal{F}_1$ 但 $\mathcal{R}_0(z+z^2) \in \mathcal{F}_1$, 因此 Inou-Shishikura 的理论可以用来研究二次多项式的动力系统. 这方面的第一个里程碑应用就是 Buff 和 Ch eritat 通过控制某些含无理中性不动点映射的临界轨道, 证明了存在具有正面积的二次多项式 Julia 集 [149]. 基于 Inou-Shishikura 的理论, Cheraghi 发展了关于近抛物重整的一系列精细分析技术 [172], [173]. 基于此更多的关于二次多项式动力系统方面的进展包括: 具有正面积的 Feigenbaum 二次 Julia 集的存在性 [31], Marmi-Moussa-Yoccoz 猜想的部分证明 [175], 某些无穷 satellite 可重整参数处的 MLC 猜想证明 [177], 含无理中性不动点的统计性质研究 [27], 部分无理中性吸引子的拓扑结构⁴⁸⁾ [679], [174] 和 Hausdorff 维数的刻画 [176]. 更多的应用可见 [588], [767], [768].

Inou 和 Shishikura 引入的不变类 \mathcal{F}_1 中的解析函数在其定义域 $\varphi(V)$ 内仅有一个单临界点和一个临界值, 因此相关理论仅适用于局部映射度为 2 的全纯函数 (包括二次多项式). 受 [374] 启发, 本文作者考虑了局部映射度为 3 的情形, 构造了一个类似的抛物重整不变类且证明也依赖于数值计算 [765]. 最近 Ch eritat 引入的不变类可以将近抛物重整理论应用到任何单临界多项式且证明不依赖于数值计算 [182]. 这样前文提到的与二次多项式有关的结果可以自然地推广到单临界多项式. 对于多临界值的抛物重整理论目前进展非常缓慢. Ch eritat 和 Petersen 构造了一个具有 2 个 (自由) 临界值的抛物重整不变类, 但该函数类在扰动后关于近抛物重整没有不变性. 因此一个自然的问题是:

问题 27 是否存在含多个临界值的全纯函数类在近抛物重整算子作用下不变?

Inou-Shishikura 的近抛物重整理论在应用到含无理中性不动点的动力系统时, 只适用于当旋转数 α 为高型 (high type) 的情形, 即 $\alpha = [0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$ 中的每个 a_n 都大于或等于某个正整数 N . 现在 N 的精确值还是未知的, 猜测介于 20 到 1000 之间 (见 [184, p. 6]). 如果 $N \geq 2$, 那么所有高型无理数构成的集合具有零测度. 而 $N = 1$ 时这样的无理数即代表了所有无理数. 因此, 若能将 Inou-Shishikura 重整理论应用到更多的旋转数, 特别地, 应用到 $N = 1$ 的情形, 则将完全解决二次多项式的一系列重要问题, 如 Siegel 盘的边界拓扑 (Douady-Sullivan 猜想), 刺猬的拓扑结构等. 这其中将涉及到研究含多个抛物花瓣的抛物重整 ([374] 中的理论仅适用于一个花瓣的情形). 关于含多个花瓣的抛物映射的扰动可见 [670], [537], [397].

除了 [374] 和 [182], 关于抛物扰动理论的经典文献可参考 [671]. 关于抛物爆炸和重整的综述可见 [184]. 对于仅含渐近值但不含临界值的抛物全纯函数 (如指数映射), 也可以定义抛物重整, 但目前为止还未找到一个该类型的抛物重整不变类 (见 [182]).

高维的抛物爆炸可见 [60], [93].

48) 特别地, 当 α 为高型无理数时, 若 $f_\alpha(z) = e^{2\pi i \alpha} z + z^2$ 含 Cremer 点, 其后临界集 $P(f_\alpha)$ 刚好为“刺猬之母” (mother hedgehog) 且拓扑上是一个 Cantor 束 (Cantor bouquet), 这可类比于部分指数映射的拓扑模型 [1], [608]. 而当 f_α 含 Siegel 盘 Δ_α 但临界点不在 $\partial\Delta_\alpha$ 上时, $P(f_\alpha)$ 是一个单边毛圈 (one-sided hairy circle).

8 超越动力系统

除了有理函数动力系统, 复动力系统中另一个备受关注的方向就是超越函数动力系统, 这主要包括超越整函数和含极点的超越亚纯函数. 造成超越和有理动力系统不同的最重要原因就是无穷远点成了一个本性奇点. 超越整函数的动力系统始于 1926 年的 Fatou [300]. 上世纪 50 年代开始, Baker 做了大量超越整函数动力系统的工作. 80 年代开始, 复平面上的超越亚纯函数动力系统开始得到研究. Baker, Keen 和吕以鞏做了系列工作 (见 [48] 及其中的参考文献). 关于超越动力系统的综述可参考 [74], [653]. 这一节将简要陈述超越函数动力系统的主要问题, 并关注与有理函数动力系统的不同之处.

8.1 Eremenko 猜想

Fatou 在他 1926 年的论文中观察到了某些特殊的整函数, 如 $z \mapsto r \sin(z)$, $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 包含逃逸曲线 (即曲线上所有的点在迭代下都趋向于 ∞). 同时他对一般整函数的这条性质是否仍然成立感兴趣. Eremenko 在上世纪 80 年代考虑了任意超越整函数 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 的逃逸集 (escaping set):

$$I(f) := \{z \in \mathbb{C} : \text{当 } n \rightarrow +\infty \text{ 时, } f^{(n)}(z) \rightarrow \infty\}.$$

他证明了 $\overline{I(f)}$ 的每个连通分支都是无界的, 并问 $I(f)$ 的每个分支是否都无界 (这称为 Eremenko 弱猜想). 同时他也陈述了现在被称为 **Eremenko 猜想** 的强形式 [275]:

猜想 28 (Eremenko) 逃逸集 $I(f)$ 中的每一点都经 $I(f)$ 中的一条曲线连到 ∞ .

上述猜想的重要性体现在如果这样的曲线存在, 那么就可以用组合方法来研究超越动力系统. 这些曲线可以类比于多项式情形下 Douady-Hubbard 引入的外射线 [256], 而外射线在多项式动力系统的研究中起到非常基本的作用.

一个超越整函数 f 称作是有界型, 或属于 **Eremenko-Lyubich 类** \mathcal{B} [280], [684], 如果 f 在 \mathbb{C} 中的奇异值 (包括临界值和渐近值⁴⁹⁾ 集合 $S(f)$ 是有界的. 对于这样的函数类, 逃逸集中的每一点都包含在 Julia 集中. 然而, 即使是对 \mathcal{B} 类, Eremenko 的强猜想也不总是成立, 但确实存在一大类超越整函数使得 Eremenko 的强猜想成立 [646]:

定理 8.1 (Rottenfusser-Rückert-Rempe-Schleicher) 存在双曲整函数 $f \in \mathcal{B}$ 使得 $J(f)$ 的每个道路连通分支都有界. 若 $f \in \mathcal{B}$ 为有限阶⁵⁰⁾, 或一般地, 为有限多个该类型映射的复合, 则任何 $z \in I(f)$ 都可以通过一条曲线 γ 连到 ∞ 并使得 $f^{(n)}|_{\gamma} \rightarrow \infty$ 一致成立.

关于上述定理的后半部分, Barański 给了一个独立的证明 [50] (基于 Rempe 刚性的结果 [613]). 在此之前, 关于 Eremenko 猜想的结果有: 具有吸性不动点的实指数映射含有逃逸曲线 [237], 后该结论被推广到任意指数映射 [111] 和 \mathcal{B} 类中的一个子类 [240]. 直到 2003 年, Schleicher 和 Zimmer 才对指数映射 $z \mapsto \lambda e^z$ 解决了 Eremenko 强猜想 [654]. 不久后余弦函数族 $z \mapsto ae^z + be^{-z}$ 也得到了解决 [647]. 关于超越亚纯函数的 Eremenko 强猜想结果可见 [646, 推论 1.3]. 关于弱形式的 Eremenko 猜想进展可见 [609].

49) 点 $s \in \mathbb{C}$ 称作是 f 的一个渐近值 (asymptotic value), 若存在一条无界连续曲线 $\gamma(t): [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ 使得 $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(\gamma(t)) = s$.
50) 整函数 f 称作是有限阶的 (finite order), 若当 $|z| \rightarrow \infty$ 时, 有 $\log \log |f(z)| = \mathcal{O}(\log |z|)$.

对于有限阶且奇异值集合落在一个直接吸引域的紧子集中的超越整函数 f , 其 Julia 集等于该直接吸引域的边界, 是由不可数多条曲线, 也称作“毛发”(hairs) 的并组成 [50], [52]. 这样的 Julia 集称作是一个 **Cantor 束** (Cantor bouquet), 最先由 Devaney 等人观察到. 这些曲线除端点外, 都包含在逃逸集 $I(f)$ 中. Aarts 和 Oversteegen 证明了任何这样的 Julia 集都同胚于一个拓扑模型, 即所谓的直刷 (straight brush) [1]. 指数映射的这些毛发是 C^∞ 光滑的 [681], 但对于其它映射毛发可能处处不可微 [197].

Mayer 证明了 Cantor 束有如下令人惊奇的拓扑性质: 它们的端点集是完全不连通的, 但端点集并上 ∞ 则成了连通集 (∞ 称为后者的爆炸点) [484]. 该现象最先在指数映射中发现, 后被推广到其它函数族 [10]. 另一个关于 Cantor 束的惊奇性质是它们具有 **维数悖论** (dimension paradox): Karpińska 证明了双曲指数映射 Cantor 束端点的 Hausdorff 维数等于 2 [398], 而毛发去掉端点后 Hausdorff 维数则等于 1 [399]. 该现象后被推广到更一般的函数族 [651]. 维数悖论甚至出现在参数空间中 [35], [363], 还出现在三维空间的拟正则动力系统 [78] 和多项式动力系统 [176].

周期外射线的 Douady-Hubbard 着陆定理是研究多项式动力学的基本工具之一. 对于 **后奇异集** (post-singular set) 有界且增长阶有限的超越整函数 f , 由 [646] 可知逃逸集 $I(f)$ 包含称为周期毛发 (periodic hairs) 的某些曲线. 对于这样的函数 f , Benini 和 Rempe 证明了与 Douady-Hubbard 类似的定理: 每根周期性毛发都着陆在一个斥性或抛物周期点上, 反过来, 每个斥性或抛物周期点都是至少一根周期性毛发的着陆点 [71], 这推广了之前的结论 [655], [502], [70]. 此外, Benini 和 Rempe 在同一文章中还对具有无穷阶的后奇异有界整函数研究了着陆定理并在毛发可能不存在的情况下引入了发束 (dreadlocks) 的概念.

除了上面提到的着陆逃逸曲线, 上世纪 90 年代开始, Devaney 等人构造了一些非着陆的逃逸曲线, 其聚点集为无界的不可分割连续统 [226], [233], [610]. 张高飞, 付建勋, 张松等构造了聚点集有界且非着陆的逃逸曲线并研究了它们的拓扑结构 [309], [310]. 关于超越亚纯函数 Julia 连通分支的可能拓扑结构, 见 [244], [615], [480], [481].

8.2 游荡域

对于亚纯函数 $f: \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ 的一个 Fatou 分支 U , 若对任意正整数 $m \neq n$ 有 $f^{\circ m}(U) \cap f^{\circ n}(U) = \emptyset$, 则称 U 是 f 的一个 **游荡域** (wandering domain). 利用拟共形手术, Sullivan 在上世纪 80 年代证明了有理函数没有游荡域 [708].

Fatou 证明若 U 是一个游荡域, 那 U 上所有收敛的子序列 $(f^{\circ n_k})_k$ 的极限函数都是常数 [299]. 令 $L(U) \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 表示收敛子序列所有可能的极限值集合. Baker 改进了 Fatou 的结果 [38], 得到 $L(U) \subset (J(f) \cup P(f)) \cup \{\infty\}$, 其中 $P(f)$ 为 f 的后奇异集. 目前这方面最好的结果属于 Bergweiler 等人 [84]: $L(U) \subset (J(f) \cup P(f')) \cup \{\infty\}$, 其中 $P(f)'$ 为 $P(f)$ 的导集. 郑建华将该结果推广到了部分超越亚纯函数 [808], [809].

令 $K(f) := \{z \in \mathbb{C} : \{f^{\circ n}(z)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ 有界} \}$ 且 $BU(f) := \mathbb{C} \setminus (I(f) \cup K(f))$, 其中 $BU(f)$ 是由 f 的所有向前轨道无界但非逃逸点构成, 称为 f 的 **蹦极集** (buggle set) [536]. 容易看出 $I(f)$, $K(f)$ 和 $BU(f)$ 都是完全不变的, 且它们一起刚好给了复平面的一个动力系统划分. 根据向前轨道和极限函数的取值情况, f 的游荡域 U 可以分为以下 3 类:

- (逃逸型) $U \subset I(f)$, 即 $L(U) = \{\infty\}$;
- (振荡型) $U \subset BU(f)$, 即存在 $a \in \mathbb{C}$ 使得 $\{\infty, a\} \subset L(U)$;
- (有界轨道型) $U \subset K(f)$, 即 $\infty \notin L(U)$.

在 Sullivan 的结果之前, Baker 通过构造具有无穷乘积形式的超越整函数, 证明了游荡域的存在性 [36], [40]:

定理 8.2 (Baker) 存在含 (多连通) 游荡域的超越整函数.

事实上, 若一个超越整函数含有一个多连通的 Fatou 分支, 那么该分支一定是一个 (快速) 逃逸的游荡域 [42], [622]. Kisaka 和 Shishikura 通过拟共形手术也构造了多连通的游荡域 [405]. 单连通的逃逸型游荡域可见 [355], [42] 和 [278, 例 2], [286]. 见图 10. Eremenko-Lyubich 构造了第一个振荡型游荡域 [278, 例 1].

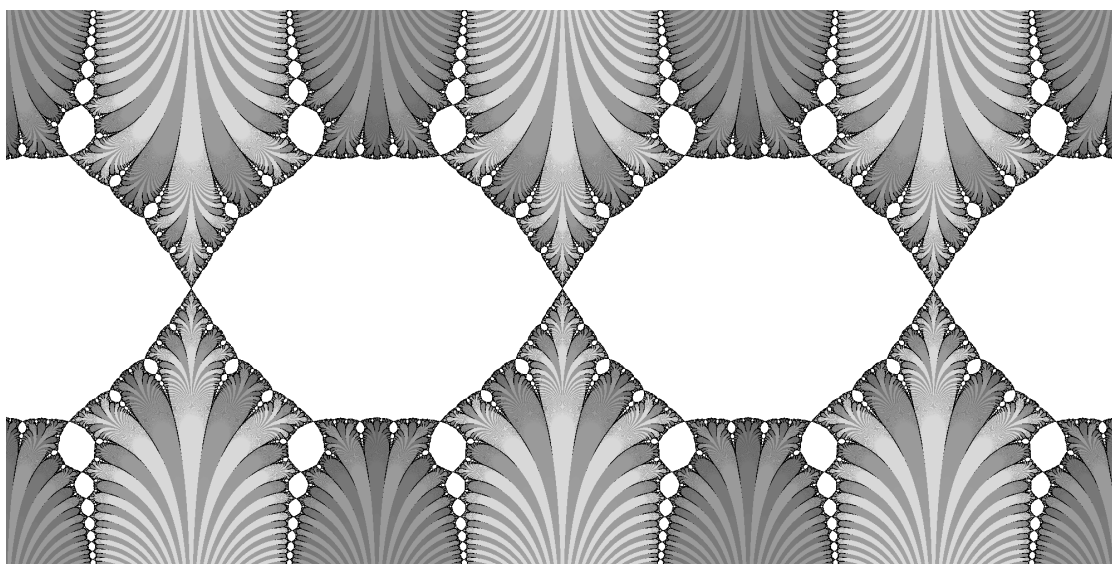


图 10 超越整函数 $f(z) = z + 2\pi + \sin z$ 的动力平面, 它含有单连通的逃逸型游荡域 (所有白色区域, 见 [286]).

奇异值在整函数的迭代中起到关键作用. 一个超越整函数称作是有限型, 或属于 Speiser 类 \mathcal{S} , 若奇异集 $S(f)$ 是一个有限集. Eremenko-Lyubich [280] 和 Goldberg-Keen [330] 受 Sullivan 游荡域不存在定理的启发, 独立地证明了 \mathcal{S} 类中的函数都没有游荡域. Eremenko-Lyubich 还证明了任何 $f \in \mathcal{B}$ 都有性质 $I(f) \subset J(f)$ [280], 因此 \mathcal{B} 类中的函数没有逃逸型游荡域. 事实上, \mathcal{B} 类中的函数是否存在游荡域是一个经典的问题.

直到 2015 年, Bishop 利用一种构造整函数的新技术: 拟共形折叠 (quasiconformal folding), 证明了 \mathcal{B} 类中存在具有振荡型游荡域的整函数 (为无限阶)⁵¹ [96]. 之后, 该方法被用于构造更多的具有游荡域的超越整函数 [285], [422], [287]. Martí-Pete 和 Shishikura 利用拟共形手术, 构造了第一个具有振荡型游荡域的有限阶整函数 [482]. 但至今为止, 关于游荡域还有以下公开问题:

问题 29 是否存在超越整函数, 其含有一个轨道有界的游荡域?

关于该问题的部分进展可见 [542]. 超越整函数的周期 Fatou 分支可分为 5 类: 吸引域, 超吸引域, 抛物域, Siegel 盘和 Baker 域. 对游荡域的动力系统分类直到最近才部分完成: 单连通逃逸型游

51) Bishop 在 <https://www.math.stonybrook.edu/~bishop/papers/QC-corrections.pdf> 中对其原文证明有误的地方进行了更正.

荡域可以分为 9 类 [67], 单连通振荡型游荡域可分为 6 类 [282]. 但多连通游荡域的分类还没有涉及.

Eremenko 和 Lyubich 最先使用经典的 Runge 逼近论来构造游荡域 [278]. 该方法最近除了被用于游荡域的分类 [67], 还被用于构造具有各种拓扑边界的游荡域. 一个开集 U 称作是正则的 (regular), 如果 U 和 \bar{U} 的内部相同. Boc Thaler 证明如果一个有界的正则区域 $U \subset \mathbb{C}$ 的闭包的补集连通 (比如任何 Jordan 区域), 那么存在一个超越整函数使得 U 是其逃逸型游荡域 [110]. 该结果后被 Martí-Pete, Rempe 和 Waterman 推广到更一般情形 [480]. 整函数游荡域边界点的轨道, 特别是超脱点⁵²⁾ (maverick point) 的研究可见 [624], [536], [67]. 其它与整函数游荡域相关的研究还可见 [89], [281], [72], [97] 等.

Baker, Kotus 和吕以攀考虑了定义在复平面上含极点的超越亚纯函数, 在 90 年代初给出了具有各种连通数的有界或无界游荡域 [46]. 郑建华对超越亚纯函数的游荡域做了很多研究 [808], [809], [810]. 关于 \mathbb{C} 上超越亚纯函数游荡域边界的拓扑和 Julia 分支拓扑的研究, 可见 [481]. 其中一个令人惊奇的结果是: Mandelbrot 集的边界是某个超越亚纯函数的 Julia 分支.

与一维的情况不同, 高维的多项式可以含有游荡域 [22], [21]. Peters, Raissy, Smit, 冀诸超等证明了在某些情况下的多项式斜积没有游荡域 (见 [380] 及其中的参考文献). 此外, 一个令人惊奇的事实是数论中著名的 $3n + 1$ 猜想 (也称 Collatz 猜想) 与某些超越整函数的游荡域是否存在有关 [426].

8.3 超越 Julia 集的面积和维数

与有理函数一样, 超越函数 Julia 集的面积和 Hausdorff 维数也是研究的重点之一. 对于超越整函数 f , 其 Julia 集 $J(f)$ 的 Hausdorff 维数至少为 1, 因为 Baker 证明了 $J(f)$ 一定包含连续统 [39], 于是 $1 \leq \dim_H J(f) \leq 2$. 若 $J(f) = \mathbb{C}$, 那么显然 $\dim_H J(f) = 2$, 这样的例子有 $f(z) = e^z$ [519]. 事实上, McMullen 证明了对所有的 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\dim_H J(\lambda e^z) = 2$ [487]. 该结果后被作了各种推广 (见 [86] 及其中的参考文献).

Stallard 证明了 \mathcal{B} 类中函数 Julia 集的 Hausdorff 维数严格大于 1 [696]. 该结论对比 \mathcal{B} 类更广的一类具有对数道 (logarithmic tracts) 的超越整函数也成立 [88]. 她还证明了 \mathcal{B} 类中超越整函数 Julia 集的 Hausdorff 维数可以取到区间 $(1, 2]$ 中的任何值 [697]. 2018 年, Bishop 证明存在一个具有多连通游荡域的超越整函数其 Julia 集的 Hausdorff 维数等于 1 [97]. 以上结论表明了超越整函数 Julia 集的 Hausdorff 维数可以取到闭区间 $[1, 2]$ 中的任何值. Albrecht 和 Bishop 证明对于给定的 $\delta > 0$, 存在一个 \mathcal{S} 类中的一个函数 f (事实上仅有 3 个有限的奇异值), 使得 $\dim_H J(f) < 1 + \delta$ [6].

对于超越亚纯函数, Rippon 证明了它们 Julia 集的 Hausdorff 维数严格大于 0 [695], 同时她还证明对于任何 $s \in (0, 1)$, 存在一个有界型超越亚纯函数 f 使得 $\dim_H J(f) = s$ [698]. 再结合 $J(\tan z) = \mathbb{R}$ 和 Misiurewicz 的结果 $J(e^z) = \mathbb{C}$ [519] 可知, 有界型超越亚纯函数 Julia 集的 Hausdorff 维数可以取到区间 $(0, 2]$ 中的任何值. Bergweiler 和崔巍巍证明了对任何 $s \in (0, 2]$, 存在一个有限型的超越亚纯函数 f (事实上仅有 3 个奇异值), 使得 $\dim_H J(f) = s$ [80]. 对于有限型超越亚纯函数逃逸集的 Hausdorff 维数研究可见 [16], [17].

部分超越整函数 Julia 集双曲维数的研究可见 [612], [614], Hausdorff 测度的研究可见 [738], 部分超越亚纯函数共形测度的研究可见 [685], [756], [53]. 关于超越亚纯函数 Julia 集的维数综述可见

⁵²⁾ 游荡域 U 边界上一点 z 称作是超脱的 (maverick), 若存在序列 $(n_k)_k$ 使得 $f^{\circ n_k}(z) \rightarrow w \in \hat{\mathbb{C}}$ 但 w 不是 $(f^{\circ n_k}(U))_k$ 的极限函数.

[412] 和 [699].

在 [487] 中, McMullen 证明了正弦函数族 $f(z) = \sin(\alpha z + \beta)$, $\alpha \neq 0$ 的 Julia 集面积是严格正的, 其中首次用到了望远镜 (telescope) 方法. 事实上, McMullen 证明的是 f 的快速逃逸集 (fast escaping set)

$$A(f) := \{z \in \mathbb{C} : \text{存在 } k \in \mathbb{N} \text{ 使得 } \forall n \in \mathbb{N}, |f^{\circ(n+k)}(z)| \geq M^{\circ n}(R)\}$$

的面积为正, 其中 $M(R) = \max_{|z|=R} |f(z)|$ 且 $R > 0$ 是使得 $M^{\circ n}(R) \rightarrow \infty$ 的常数. 快速逃逸集的概念由 Bergweiler 和 Hinkkanen 在 1999 年引入 [85]. 关于 $A(f)$ 的主要性质可见 [625]. McMullen 关于超越整函数 Julia 集正面积的结果被推广到了更一般的函数族 [15], [79]. 关于超越整函数 Julia 集或逃逸集 (或其补集) 面积的研究还可见 [352], [656], [804], [210] 等.

关于超越整函数可测动力学的研究开始于上世纪 80 年代. 称一个超越整函数 f 是遍历的 (ergodic) 是指复平面不能分成两个不交且具有正测度的 f 不变子集. Lyubich 证明了指数映射 $z \mapsto e^z$ 非遍历且复平面上几乎所有的点都非回归⁵³ [454] (相关结果还可见 [328], [600]). McMullen 证明了正弦函数族 $f(z) = \sin(\alpha z + \beta)$, $\alpha \neq 0$ 中的每一个函数都不是遍历的 [487]. 对于超越亚纯函数的遍历性研究可见 [486].

对于超越整函数的参数空间, 邱维元证明了指数函数族 $z \mapsto \lambda e^z$ 的分歧迹具有满的 Hausdorff 维数而正弦函数族 $z \mapsto \lambda \sin(z)$ 的分歧迹具有正面积 [590]. 关于超越整函数参数空间分歧迹的面积和 Hausdorff 维数的研究还可见 [35], [793], [363] 及其中的参考文献.

8.4 其它结论

除了游荡域, 超越亚纯函数还可以出现一类有理函数没有的周期 Fatou 分支, 即 **Baker 域** (Baker domain), 其上的动力系统与抛物域非常类似: 内部点的向前轨道都趋向于边界上的一点 (极点或无穷远点). Baker 域这个名称首先在 [279], [280] 中使用, 但第一个具有 Baker 域的整函数例子却是 Fatou 找到的. 他证明了右半平面包含在 $f(z) = z + 1 + e^{-z}$ 的一个不变的 Baker 域中 [299]. 上世纪 80 年代开始, 各种类型的周期 Baker 域被陆续找到. 但 Eremenko 和 Lyubich 证明: 如果 f 是 \mathcal{B} 类中的一个超越整函数, 那么 f 没有 Baker 域 [280]. 同样的结论对于 \mathcal{S} 类中的超越亚纯函数也成立 [74, §4.8]. 关于 Baker 域的基本性质可见 [74, §4] 和综述 [621].

Baker 在上世纪 80 年代初问: 当超越整函数 f 的增长级充分小时, 是否蕴含着 f 的 Fatou 分支都是有界的 [41]? 对于这个问题, Baker, Stallard, 乔建永, Anderson-Hinkkanen, 华歆厚-杨重骏, 郑建华, 王跃飞, Rippon-Stallard, 杨存基-李玉华, Nicks-Rippon-Stallard 等人都进行了研究 (见 [746], [760], [530] 及其中的参考文献).

Benini-Rippon-Stallard 证明了: 若超越整函数 f 与 g 可交换且 f 和 g 没有单连通的快速逃逸游荡域, 那么 f 和 g 有相同的 Julia 集 [72]. 这推广了 Baker, Langley, Bergweiler-Hinkkanen 等的结论. 其它与可交换超越整函数有关的内容还可见 [529] 及其参考文献.

Rempe 和 Schleicher 研究了指数映射族 $E_\kappa(z) = e^z + \kappa$ 的参数空间, 证明了其双曲分支的边界是一条穿过 ∞ 的 Jordan 曲线且 E_κ 的分歧迹是 \mathbb{C} 上的一个连通集 [617]. 这是一个类比二次多项式

⁵³ 称一个点 z 是回归的 (recurrent) 如果它落在其向前轨道 $\{z, f(z), f^{\circ 2}(z), \dots\}$ 的闭包中.

Mandelbrot 集的结果. 关于 E_κ 的结构稳定性研究可见 [773] 等. Fagella, Keen, 蒋云平, 陈涛等考虑了以正切函数为代表的超越亚纯函数参数空间 [288], [170].

对于超越亚纯函数 f , 若存在 $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset J(f)$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \arg z_n = \theta \in [0, 2\pi)$, 则角度 θ 称作是 Julia 集 $J(f)$ 的极限方向. 该概念最早由乔建永在其博士论文中引入, 见 [581], [585]. 关于 Julia 集的所有极限方向构成的集合的性质研究可见 [739] 及其中的参考文献.

Baker 证明了次数 $d \geq 2$ 的有理函数 f 若没有 (最小) 周期为 p 的周期点, 则 $p = 2$ 且 $d \in \{2, 3, 4\}$, 或者 $p = 3$ 且 $d = 2$. 特别地, 若 f 为多项式, 则 $p = d = 2$ [37]. 注意 $z \mapsto e^z + z$ 没有不动点. Bergweiler 证明: 对于任意 $p \geq 2$, 任何超越亚纯函数都有无穷多个周期为 p 的周期点 [74, p. 158]. 其中部分结果的证明依赖于 Nevanlinna 值分布理论, 即量化版本的 Picard 定理. 此外, 亚纯函数族不动点 (或单个函数的周期点) 的存在性与正规性的判定密切相关 [76].

Ahlfors 的覆盖曲面论在超越函数动力系统中具有重要应用. Baker 在 60 年代首先利用“五岛定理”证明了斥性周期点在超越整函数的 Julia 集中是稠密的, 其进一步的应用可见 [75]. “三岛定理”的应用可见 [244]. Wiman-Valiron 理论在超越动力系统中的应用由 Eremenko 首先引入 [275], 其进一步发展可见 [88].

9 相关领域

除了已经介绍的有理函数动力系统 $f: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, 超越整函数动力系统 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, 含极点的超越亚纯函数动力系统 $f: \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, 其余受关注的一维复动力系统还包括穿孔复平面 $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上的超越全纯动力系统 $f: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$, 其中 0 和 ∞ 均为本性奇点. 该类函数都具有形式 $f(z) = z^n e^{g(z)+h(1/z)}$, 其中 n 为整数, g 和 h 为非常值整函数. 这类函数中的一个典型代表就是 Arnol'd 标准族 $f_{\alpha, \beta}(z) = z e^{i\alpha} e^{\beta(z-1/z)/2}$, 其中 $\alpha \in [0, 2\pi)$, $\beta \geq 0$ [283]. 方丽萍, Fagella, Martí-Pete 等对 \mathbb{C}^* 上的全纯自映射动力系统做了大量工作 (见 [293], [289], [479] 及其中的参考文献).

一维复动力系统与统计物理的联系, 特别是涉及到的重整变换有理函数的动力系统可见 [225], [102], [586], [103], [104]. 研究复动力系统的动机之一是通过迭代计算方程的根, 多项式 Newton 映射的实际计算可见 [212], [370], 而 König 求根算法可见 [158].

高维复动力系统是复动力系统领域中的一个重要分支, 近些年来得到了迅猛的发展. 其研究需要用到多复变, 但很多情况下也依赖于低维复动力系统的结果. 自上世纪 80 年代开始, Bedford, Fornæss, Hubbard, Lyubich, Oberste-Vorth, Sibony, Smillie, Ueda, 张广远, 张文俊等做了大量关于高维复动力系统的工作 (见 Bedford-Smillie [59], Fornæss-Sibony [307] 的系列论文, 以及 [801], [805]). 新世纪以来, Abate, Berteloot, Bianchi, Benini, Dinh, Dujardin, Ishii, Peters, Raissy, 戎锋, 冀诸超等促进了高维复动力系统的进一步发展 (见综述 [2], [242], [645] 以及 [304], [381]).

传统的复动力系统考虑的是复数域上的迭代. 如果将复数域换成其它数域, 则会产生相应数域上的动力系统. 这其中得到广泛研究的是算术和非阿 (特别地, p -adic) 动力系统, 它们和传统的复动力系统有紧密的联系. 一些传统复动力系统中无法证明的结论可以通过算术动力系统解决. 这其中比较著名的是“不太可能相交 (unlikely intersection)”问题 [49], 与之有关联的包括 André-Oort 猜想, Manin-Mumford 猜想等. 张寿武, DeMarco, Ghioca, Krieger, Nguyen, 袁新意, 叶和溪等做了

很多工作 (见 [218], [219] 及其中的参考文献). Benedetto, Berkovich, Favre, Kiwi, Rivera-Letelier, Silverman, 以及范爱华, 王跃飞, 廖灵敏, 邱彦奇, 凡石磊, 谢俊逸, 史汝西, 聂洪明, 杨静桦等研究了非阿域上的动力系统 (见 [292], [595], [141], [291], [382], [531] 及其中的参考文献). 算术动力系统的著作可参看 [682], [62], 综述和相关问题可见 [64], [63].

除了经典的一维复动力系统, 高维复动力系统和算术动力系统, 以下动力系统也与经典的复动力系统有密切联系:

- 反全纯 (anti-holomorphic) 动力系统. 主要研究反全纯函数的迭代, 比如 $f(z) = \bar{z}^d + c$, 见 [526], [368], [373], [806]. 该类型动力系统最先出现在三次实多项式的研究中 [505].
- 拟正则映射的动力系统. 杨乐院士和孙道椿是国际上研究拟正则映射动力系统的先驱, 见 [712] 及他们的后续文献. 之后, Bergweiler 等对该领域作了进一步的发展 [77], [78], [87], [198], [81].
- 随机迭代动力系统. Fornæss 和 Sibony 在 90 年代初提出了有理函数的随机迭代 [305]. 任福尧, 邱维元, 周维民, 龚志民, 周吉等从 90 年代中期开始在这方面做了很多工作 [812], [333], [811], [332]. 近年来 Stankewitz 和 Sumi 等则进一步发展了随机函数的迭代并进行了有理半群的研究 (见 [700] 及其中的参考文献).

除了极少数情况 (圆周, 线段和球面), 次数大于 1 的有理函数 Julia 集都是一个分形, 因此复动力系统和分形几何有着天然的联系. 分形几何中的一些研究方法也适用于有理函数的迭代. Falconer 的著作 [290] 是分形几何的经典文献.

拟共形几何领域中的一个重要问题是判断两个同胚的度量空间是否是拟对称等价的. 此类问题也出现于 Gromov 双曲群和双曲空间的分类中. Bonk, Kleiner, Merenkov 等研究了分形集上的拟共形几何 (见 [116] 和 [789] 其中的参考文献) 并将相关理论应用到有理函数的动力系统中 [117], [598].

在计算机上作动力平面 (包括 Julia 集, Fatou 分支, 外射线, 拼图等) 和参数空间 (包括分歧迹, 双曲分支, 参数射线) 的图像是研究复动力系统的重要辅助手段. 相关算法可见 [511, 附录 H], [544], [128]. 除了自编程序作图外, 常用的辅助软件包括⁵⁴⁾ “超级分形” (Ultra Fractal) 和 Jung 开发的 “Mandel”.

致谢 感谢邱维元教授对本文初稿的仔细阅读并提出大量的修改意见! 感谢崔贵珍教授, 乔建永教授, 沈维孝教授, 王跃飞教授, 尹永成教授, 张高飞教授和审稿人对本文撰写提出的宝贵意见和勉励! 感谢 Arnaud Chéritat 研究员分享了文中部分图像的生成算法. 感谢杨依依在本文撰写过程中的持续鼓励. 限于作者的研究水平, 视野和兴趣, 该领域的一些子方向和研究人员在本文中可能没有提及或无法进行详细展开, 在此表示歉意. 本文得到了国家自然科学基金 (NSFC) 的资助, 在此表示感谢.

参考文献

- 1 Aarts J M, Oversteegen L G. The geometry of Julia sets. *Trans Amer Math Soc*, 1993, 338: 897–918
- 2 Abate M. Discrete holomorphic local dynamical systems. In: *Holomorphic dynamical systems. Lecture Notes in Math*, vol. 1998. Berlin: Springer, 2010, 1–55
- 3 Agol I. Tameness of hyperbolic 3-manifolds. *ArXiv*: 0405568, 2004
- 4 Ahlfors L V. *Lectures on quasiconformal mappings*, second ed. With supplemental chapters by C J Earle, I Kra, M Shishikura and J H Hubbard. *University Lecture Series*, vol. 38. Providence: AMS, 2006
- 5 Ahlfors L V, Bers L. Riemann’s mapping theorem for variable metrics. *Ann of Math*, 1960, 72: 385–404
- 6 Albrecht S, Bishop C J. Speiser class Julia sets with dimension near one. *J Anal Math*, 2020, 141: 49–98
- 7 Alexander D S. A history of complex dynamics, from Schröder to Fatou and Julia. *Aspects of Mathematics*, E24. Braunschweig: Friedr Vieweg & Sohn, 1994

54) 见 <https://www.ultrafractal.com> 和 <http://www.mndynamics.com/index.html>.

- 8 Alexander D S, Devaney R L. A century of complex dynamics. In: A century of advancing mathematics. Washington, DC: Math Assoc America, 2015, 15–34
- 9 Alexander D S, Iavernaro F, Rosa A. Early days in complex dynamics, a history of complex dynamics in one variable during 1906–1942. *History of Mathematics*, vol. 38. Providence: AMS, 2012
- 10 Alhabib N, Rempe L. Escaping endpoints explode. *Comput Methods Funct Theory*, 2017, 17: 65–100
- 11 Alhamed M, Rempe L, Sixsmith D. Geometrically finite transcendental entire functions. *J Lond Math Soc*, 2022, 106: 485–527
- 12 Arfeux M, Kiwi J. Irreducibility of periodic curves in cubic polynomial moduli space. *Proc Lond Math Soc*, 2023, 127: 792–835
- 13 Arnol'd V I. Small denominators I. Mapping the circle onto itself. *Izv Akad Nauk SSSR Ser Mat*, 1961, 25: 21–86
- 14 Aspenberg M. The Collet-Eckmann condition for rational functions on the Riemann sphere. *Math Z*, 2013, 273: 935–980
- 15 Aspenberg M, Bergweiler W. Entire functions with Julia sets of positive measure. *Math Ann*, 2012, 352: 27–54
- 16 Aspenberg M, Cui W. Hausdorff dimension of escaping sets of meromorphic functions. *Trans Amer Math Soc*, 2021, 374: 6145–6178
- 17 Aspenberg M, Cui W. Hausdorff dimension of escaping sets of meromorphic functions II. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2023, 43: 1471–1491
- 18 Aspenberg M, Roesch P. Newton maps as matings of cubic polynomials. *Proc Lond Math Soc*, 2016, 113: 77–112
- 19 Aspenberg M, Yampolsky M. Mating non-renormalizable quadratic polynomials. *Comm Math Phys*, 2009, 287: 1–40
- 20 Astala K, Iwaniec T, Martin G. Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane. *Princeton Mathematical Series*, vol. 48. Princeton: Princeton University Press, 2009
- 21 Astorg M, Boc T L, Peters H. Wandering domains arising from Lavaurs maps with Siegel disks. *Anal PDE*, 2023, 16: 35–88
- 22 Astorg M, Buff X, Dujardin R, et al. A two-dimensional polynomial mapping with a wandering Fatou component. *Ann of Math*, 2016, 184: 263–313
- 23 Astorg M, Gauthier T, Mihalache N, et al. Collet, Eckmann and the bifurcation measure. *Invent Math*, 2019, 217: 749–797
- 24 Audin M. Fatou, Julia, Montel, the great prize of mathematical sciences of 1918, and beyond. *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 2014. Heidelberg: Springer, 2011
- 25 Avila A, Buff X, Chéritat A. Siegel disks with smooth boundaries. *Acta Math*, 2004, 193: 1–30
- 26 Avila A, Buff X, Chéritat A. Smooth Siegel disks everywhere. *Astérisqué*, 2020, 416: 133–180
- 27 Avila A, Cheraghi D. Statistical properties of quadratic polynomials with a neutral fixed point. *J Eur Math Soc (JEMS)*, 2018, 20: 2005–2062
- 28 Avila A, Kahn J, Lyubich M, et al. Combinatorial rigidity for unicritical polynomials. *Ann of Math*, 2009, 170: 783–797
- 29 Avila A, Lyubich M. Hausdorff dimension and conformal measures of Feigenbaum Julia sets. *J Amer Math Soc*, 2008, 21: 305–363
- 30 Avila A, Lyubich M. The full renormalization horseshoe for unimodal maps of higher degree: exponential contraction along hybrid classes. *Publ Math Inst Hautes Études Sci*, 2011, 114: 171–223
- 31 Avila A, Lyubich M. Lebesgue measure of Feigenbaum Julia sets. *Ann of Math*, 2022, 195: 1–88
- 32 Avila A, Lyubich M, de Melo W. Regular or stochastic dynamics in real analytic families of unimodal maps. *Invent Math*, 2003, 154: 451–550
- 33 Avila A, Lyubich M, Shen W. Parapuzzle of the Multibrot set and typical dynamics of unimodal maps. *J Eur Math Soc (JEMS)*, 2011, 13: 27–56
- 34 Avila A, Moreira C G. Phase-parameter relation and sharp statistical properties for general families of unimodal maps. In: *Geometry and dynamics*. *Contemp Math*, vol. 389. Providence: AMS, 2005, 1–42
- 35 Bailesteanu M, Balan H V, Schleicher D. Hausdorff dimension of exponential parameter rays and their endpoints. *Nonlinearity*, 2008, 21: 113–120
- 36 Baker I N. Multiply connected domains of normality in iteration theory. *Math Z*, 1963, 81: 206–214
- 37 Baker I N. Fixpoints of polynomials and rational functions. *J London Math Soc*, 1964, 39: 615–622
- 38 Baker I N. Limit functions and sets of non-normality in iteration theory. *Ann Acad Sci Fenn Ser A I*, 1970, 467: 11 pp
- 39 Baker I N. The domains of normality of an entire function. *Ann Acad Sci Fenn Ser A I Math*, 1975, 1: 277–283
- 40 Baker I N. An entire function which has wandering domains. *J Austral Math Soc Ser A*, 1976, 22: 173–176
- 41 Baker I N. The iteration of polynomials and transcendental entire functions. *J Austral Math Soc Ser A*, 1980/81, 30: 483–495
- 42 Baker I N. Wandering domains in the iteration of entire functions. *Proc London Math Soc*, 1984, 49: 563–576
- 43 Baker I N, Domínguez P. Residual Julia sets. *J Anal*, 2000, 8: 121–137

- 44 Baker I N, Domínguez P. Some connectedness properties of Julia sets. *Complex Variables Theory Appl*, 2000, 41: 371–389
- 45 Baker I N, Eremenko A. A problem on Julia sets. *Ann Acad Sci Fenn Ser A I Math*, 1987, 12: 229–236
- 46 Baker I N, Kotus J, Lü Y. Iterates of meromorphic functions II: Examples of wandering domains. *J London Math Soc*, 1990, 42: 267–278
- 47 Baker I N, Kotus J, Lü Y. Iterates of meromorphic functions III: Preperiodic domains. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 1991, 11: 603–618
- 48 Baker I N, Kotus J, Lü Y. Iterates of meromorphic functions IV: Critically finite functions. *Results Math*, 1992, 22: 651–656
- 49 Baker M, DeMarco L. Preperiodic points and unlikely intersections. *Duke Math J*, 2011, 159: 1–29
- 50 Barański K. Trees and hairs for some hyperbolic entire maps of finite order. *Math Z*, 2007, 257: 33–59
- 51 Barański K, Fagella N, Jarque X, et al. On the connectivity of the Julia sets of meromorphic functions. *Invent Math*, 2014, 198: 591–636
- 52 Barański K, Jarque X, Rempe L. Brushing the hairs of transcendental entire functions. *Topology Appl*, 2012, 159: 2102–2114
- 53 Barański K, Karpińska B, Zdunik A. Conformal measures for meromorphic maps. *Ann Acad Sci Fenn Math*, 2018, 43: 247–266
- 54 Barreira L. Thermodynamic formalism and applications to dimension theory. *Progress in Mathematics*, vol. 294. Basel: Birkhäuser/Springer Basel AG, 2011
- 55 Bartholdi L, Nekrashevych V. Thurston equivalence of topological polynomials. *Acta Math*, 2006, 197: 1–51
- 56 Bassanelli G, Berteloot F. Bifurcation currents in holomorphic dynamics on \mathbb{P}^k . *J Reine Angew Math*, 2007, 608: 201–235
- 57 Beardon A F. The components of a Julia set. *Ann Acad Sci Fenn Ser A I Math*, 1991, 16: 173–177
- 58 Beardon A F. Iteration of rational functions. *Graduate Texts in Mathematics*, vol. 132. New York: Springer-Verlag, 1991
- 59 Bedford E, Smillie J. Polynomial diffeomorphisms of \mathbf{C}^2 , VIII. Quasi-expansion. *Amer J Math*, 2002, 124: 221–271
- 60 Bedford E, Smillie J, Ueda T. Semi-parabolic bifurcations in complex dimension two. *Comm Math Phys*, 2017, 350: 1–29
- 61 Belk J, Lanier J, Margalit D, et al. Recognizing topological polynomials by lifting trees. *Duke Math J*, 2022, 171: 3401–3480
- 62 Benedetto R L. Dynamics in one non-Archimedean variable. *Graduate Studies in Mathematics*, vol. 198. Providence: AMS, 2019
- 63 Benedetto R L. A survey of non-Archimedean dynamics. *Notices Amer Math Soc*, 2022, 69: 715–723
- 64 Benedetto R L, Ingram P, Jones R, et al. Current trends and open problems in arithmetic dynamics. *Bull Amer Math Soc (NS)*, 2019, 56: 611–685
- 65 Benedicks M, Carleson L. On iterations of $1 - ax^2$ on $(-1, 1)$. *Ann of Math*, 1985, 122: 1–25
- 66 Benini A M. A survey on MLC, rigidity and related topics. *ArXiv: 1709.09869v2*, 2018
- 67 Benini A M, Evdoridou V, Fagella N, et al. Classifying simply connected wandering domains. *Math Ann*, 2022, 383: 1127–1178
- 68 Benini A M, Fagella N. Singular values and bounded Siegel disks. *Math Proc Cambridge Philos Soc*, 2018, 165: 249–265
- 69 Benini A M, Fagella N. Singular values and non-repelling cycles for entire transcendental maps. *Indiana Univ Math J*, 2020, 69: 1543–1558
- 70 Benini A M, Lyubich M. Repelling periodic points and landing of rays for post-singularly bounded exponential maps. *Ann Inst Fourier (Grenoble)*, 2014, 64: 1493–1520
- 71 Benini A M, Rempe L. A landing theorem for entire functions with bounded post-singular sets. *Geom Funct Anal*, 2020, 30: 1465–1530
- 72 Benini A M, Rippon P J, Stallard G M. Permutable entire functions and multiply connected wandering domains. *Adv Math*, 2016, 287: 451–462
- 73 Berger P, Dujardin R. On stability and hyperbolicity for polynomial automorphisms of \mathbf{C}^2 . *Ann Sci Éc Norm Supér*, 2017, 50: 449–477
- 74 Bergweiler W. Iteration of meromorphic functions. *Bull Amer Math Soc (NS)*, 1993, 29: 151–188
- 75 Bergweiler W. The role of the Ahlfors five islands theorem in complex dynamics. *Conform Geom Dyn*, 2000, 4: 22–34
- 76 Bergweiler W. Bloch’s principle. *Comput Methods Funct Theory*, 2006, 6: 77–108
- 77 Bergweiler W. Iteration of quasiregular mappings. *Comput Methods Funct Theory*, 2010, 10: 455–481
- 78 Bergweiler W. Karpińska’s paradox in dimension 3. *Duke Math J*, 2010, 154: 599–630
- 79 Bergweiler W. Lebesgue measure of Julia sets and escaping sets of certain entire functions. *Fund Math*, 2018, 242:

- 281–301
- 80 Bergweiler W, Cui W. The Hausdorff dimension of Julia sets of meromorphic functions in the Speiser class. *Math Z*, 2022, 302: 2193–2205
- 81 Bergweiler W, Ding J. Non-escaping points of Zorich maps. *Israel J Math*, 2021, 243: 27–43
- 82 Bergweiler W, Eremenko A. On the Bank-Laine conjecture. *J Eur Math Soc (JEMS)*, 2017, 19: 1899–1909
- 83 Bergweiler W, Fagella N, Rempe L. Hyperbolic entire functions with bounded Fatou components. *Comment Math Helv*, 2015, 90: 799–829
- 84 Bergweiler W, Haruta M, Kriete H, et al. On the limit functions of iterates in wandering domains. *Ann Acad Sci Fenn Ser A I Math*, 1993, 18: 369–375
- 85 Bergweiler W, Hinkkanen A. On semiconjugation of entire functions. *Math Proc Cambridge Philos Soc*, 1999, 126: 565–574
- 86 Bergweiler W, Karpińska B. On the Hausdorff dimension of the Julia set of a regularly growing entire function. *Math Proc Cambridge Philos Soc*, 2010, 148: 531–551
- 87 Bergweiler W, Nicks D A. Foundations for an iteration theory of entire quasiregular maps. *Israel J Math*, 2014, 201: 147–184
- 88 Bergweiler W, Rippon P J, Stallard G M. Dynamics of meromorphic functions with direct or logarithmic singularities. *Proc Lond Math Soc*, 2008, 97: 368–400
- 89 Bergweiler W, Wang Y. On the dynamics of composite entire functions. *Ark Mat*, 1998, 36: 31–39
- 90 Bers L, Royden H L. Holomorphic families of injections. *Acta Math*, 1986, 157: 259–286
- 91 Berteloot F, Bianchi F, Dupont C. Dynamical stability and Lyapunov exponents for holomorphic endomorphisms of \mathbb{P}^k . *Ann Sci Éc Norm Supér*, 2018, 51: 215–262
- 92 Beurling A, Ahlfors L. The boundary correspondence under quasiconformal mappings. *Acta Math*, 1956, 96: 125–142
- 93 Bianchi F. Parabolic implosion for endomorphisms of \mathbb{C}^2 . *J Eur Math Soc (JEMS)*, 2019, 21: 3709–3737
- 94 Bielefeld B, Fisher Y, Hubbard J H. The classification of critically preperiodic polynomials as dynamical systems. *J Amer Math Soc*, 1992, 5: 721–762
- 95 Bielefeld B, Lyubich M. Holomorphic dynamics. In: *Linear and complex analysis. Problem book 3, Part II. Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1574. Berlin: Springer-Verlag, 1994, 423–462
- 96 Bishop C. Constructing entire functions by quasiconformal folding. *Acta Math*, 2015, 214: 1–60
- 97 Bishop C. A transcendental Julia set of dimension 1. *Invent Math*, 2018, 212: 407–460
- 98 Biswas K. Hedgehogs of Hausdorff dimension one. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2008, 28: 1713–1727
- 99 Biswas K. Positive area and inaccessible fixed points for hedgehogs. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2016, 36: 1839–1850
- 100 Blanchard P. Complex analytic dynamics on the Riemann sphere. *Bull Amer Math Soc (NS)*, 1984, 11: 85–141
- 101 Blanchard P, Devaney R L, Keen L. The dynamics of complex polynomials and automorphisms of the shift. *Invent Math*, 1991, 104: 545–580
- 102 Bleher P, Lyubich M. Julia sets and complex singularities in hierarchical Ising models. *Comm Math Phys*, 1991, 141: 453–474
- 103 Bleher P, Lyubich M, Roeder R. Lee-Yang zeros for the DHL and 2D rational dynamics, I. Foliation of the physical cylinder. *J Math Pures Appl*, 2017, 107: 491–590
- 104 Bleher P, Lyubich M, Roeder R. Lee-Yang-Fisher zeros for the DHL and 2D rational dynamics, II. Global pluripotential interpretation. *J Geom Anal*, 2020, 30: 777–833
- 105 Blokh A, Buff X, Chéritat A, et al. The solar Julia sets of basic quadratic Cremer polynomials. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2010, 30: 51–65
- 106 Blokh A, Childers D, Levin G, et al. An extended Fatou-Shishikura inequality and wandering branch continua for polynomials. *Adv Math*, 2016, 288: 1121–1174
- 107 Blokh A, Lyubich M. Measurable dynamics of S -unimodal maps of the interval. *Ann Sci École Norm Sup*, 1991, 24: 545–573
- 108 Blokh A, Misiurewicz M. Typical limit sets of critical points for smooth interval maps. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2000, 20: 15–45
- 109 Blokh A, Oversteegen L. Wandering gaps for weakly hyperbolic polynomials. In: *Complex dynamics*. Wellesley: A K Peters, 2009, 139–168
- 110 Boc T L. On the geometry of simply connected wandering domains. *Bull Lond Math Soc*, 2021, 53: 1663–1673
- 111 Bodelón C, Devaney R L, Hayes M, et al. Hairs for the complex exponential family. *Internat J Bifur Chaos Appl Sci Engrg*, 1999, 9: 1517–1534
- 112 Bonahon F, Devaney R L, Gardiner F P, et al eds. *Conformal dynamics and hyperbolic geometry*. Contemporary Mathematics, vol. 573. Providence: AMS, 2012
- 113 Bonifant A, Buff X, Milnor J. Antipode preserving cubic maps: the fjord theorem. *Proc Lond Math Soc*, 2018, 116: 670–728

- 114 Bonifant A, Kiwi J, Milnor J. Cubic polynomial maps with periodic critical orbit II. Escape regions. *Conform Geom Dyn*, 2010, 14: 68–112
- 115 Bonifant A, Lyubich M, Sutherland S, eds. *Frontiers in complex dynamics. In celebration of John Milnor’s 80th birthday.* Princeton Mathematical Series, vol. 51. Princeton: Princeton University Press, 2014
- 116 Bonk M. Quasiconformal geometry of fractals. In: *International Congress of Mathematicians vol. II.* Zürich: Eur Math Soc, 2006, 1349–1373
- 117 Bonk M, Lyubich M, Merenkov S. Quasisymmetries of Sierpiński carpet Julia sets. *Adv Math*, 2016, 301: 383–422
- 118 Bonk M, Meyer D. Expanding Thurston maps. *Mathematical Surveys, Monographs*, vol. 225. Providence: AMS, 2017
- 119 Böttcher L E. The principal laws of convergence of iterates and their application to analysis (in Russian). *Bull Kasan Math Soc*, 1904, 14: 155–234
- 120 Bowen R. Hausdorff dimension of quasicircles. *Inst Hautes Études Sci Publ Math*, 1979: 11–25
- 121 Boyd S H, Henriksen C. The Medusa algorithm for polynomial matings. *Conform Geom Dyn*, 2012, 16: 161–183
- 122 Branner B. The Mandelbrot set. In: *Chaos and fractals. Proc Sympos Appl Math*, vol. 39. Providence: AMS, 1989, 75–105
- 123 Branner B, Douady A. Surgery on complex polynomials. In: *Holomorphic dynamics. Lecture Notes in Math*, vol. 1345. Berlin: Springer, 1988, 11–72
- 124 Branner B, Fagella N. Quasiconformal surgery in holomorphic dynamics. *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, vol. 141. Cambridge: Cambridge University Press, 2014
- 125 Branner B, Hjorth P, eds. *Real and complex dynamical systems. NATO Advanced Science Institutes Series C, Mathematical, Physical Sciences*, vol. 464. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995
- 126 Branner B, Hubbard J H. The iteration of cubic polynomials I. The global topology of parameter space. *Acta Math*, 1988, 160: 143–206
- 127 Branner B, Hubbard J H. The iteration of cubic polynomials II. Patterns and parapatterns. *Acta Math*, 1992, 169: 229–325
- 128 Braverman M, Yampolsky M. Computability of Julia sets. *Algorithms and Computation in Mathematics*, vol. 23. Berlin: Springer-Verlag, 2009
- 129 Brjuno A D. Convergence of transformations of differential equations to normal forms. *Dokl Akad Nauk USSR*, 1965, 165: 987–989
- 130 Brjuno A D. Analytic form of differential equations I, II. *Trudy Moskov Mat Obsč*, 1971, 25: 119–262; *ibid* 1972, 26: 199–239
- 131 Brock J F, Bromberg K W. On the density of geometrically finite Kleinian groups. *Acta Math*, 2004, 192: 33–93
- 132 Brolin H. Invariant sets under iteration of rational functions. *Ark Mat*, 1965, 6: 103–144
- 133 Brooks R, Matelski J P. The dynamics of 2-generator subgroups of $PSL(2, \mathbf{C})$. In: *Riemann surfaces and related topics, Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference.* *Ann of Math Stud*, vol. 97. Princeton: Princeton Univ Press, 1981, 65–71
- 134 Brucks K M, Bruin H. *Topics from one-dimensional dynamics. London Mathematical Society Student Texts*, vol. 62. Cambridge: Cambridge University Press, 2004
- 135 Bruin H, Keller G, Nowicki T, et al. Wild Cantor attractors exist. *Ann of Math*, 1996, 143: 97–130
- 136 Bruin H, Rivera-Letelier J, W Shen, et al. Large derivatives, backward contraction and invariant densities for interval maps. *Invent Math*, 2008, 172: 509–533
- 137 Bruin H, Shen W, van Strien S. Invariant measures exist without a growth condition. *Comm Math Phys*, 2003, 241: 287–306
- 138 Bruin H, Shen W, van Strien S. Existence of unique SRB-measures is typical for real unicritical polynomial families. *Ann Sci École Norm Sup*, 2006, 39: 381–414
- 139 Bruin H, van Strien S. Expansion of derivatives in one-dimensional dynamics. *Israel J Math*, 2003, 137: 223–263
- 140 Bruin H, van Strien S. Monotonicity of entropy for real multimodal maps. *J Amer Math Soc*, 2015, 28: 1–61
- 141 Bufetov A I, Qiu Y. Ergodic measures on spaces of infinite matrices over non-Archimedean locally compact fields. *Compos Math*, 2017, 153: 2482–2533
- 142 Buff X. Ensembles de Julia de mesure positive (d’après van Strien et Nowicki). *Séminaire Bourbaki*, 1997, 245: 7–39
- 143 Buff X, Canela J, Roesch P. Julia sets with a wandering branching point. *Indiana Univ Math J*, 2020, 69: 2241–2265
- 144 Buff X, Chéritat A. Upper bound for the size of quadratic Siegel disks. *Invent Math*, 2004, 156: 1–24
- 145 Buff X, Chéritat A. Ensembles de Julia quadratiques de mesure de Lebesgue strictement positive. *C R Math Acad Sci Paris*, 2005, 341: 669–674
- 146 Buff X, Chéritat A. The Brjuno function continuously estimates the size of quadratic Siegel disks. *Ann of Math*, 2006, 164: 265–312
- 147 Buff X, Chéritat A. How regular can the boundary of a quadratic Siegel disk be?. *Proc Amer Math Soc*, 2007, 135: 1073–1080

- 148 Buff X, Chéritat A. A new proof of a conjecture of Yoccoz. *Ann Inst Fourier (Grenoble)*, 2011, 61: 319–350
- 149 Buff X, Chéritat A. Quadratic Julia sets with positive area. *Ann of Math*, 2012, 176: 673–746
- 150 Buff X, Cui G, Tan L. Teichmüller spaces and holomorphic dynamics. In: *Handbook of Teichmüller theory vol. IV. IRMA Lect Math Theor Phys*, vol. 19. Zürich: Eur Math Soc, 2014, 717–756
- 151 Buff X, Écalle J, Epstein A L. Limits of degenerate parabolic quadratic rational maps. *Geom Funct Anal*, 2013, 23: 42–95
- 152 Buff X, Epstein A L. Bifurcation measure and postcritically finite rational maps. In: *Complex dynamics*. Wellesley: A K Peters, 2009, 491–512
- 153 Buff X, Epstein A L, Koch S, et al. On Thurston’s pullback map. In: *Complex dynamics*. Wellesley: A K Peters, 2009, 561–583
- 154 Buff X, Epstein A L, Koch S, et al. Questions about polynomial matings. *Ann Fac Sci Toulouse Math*, 2012, 21: 1149–1176
- 155 Buff X, Fagella N, Geyer L, et al. Herman rings and Arnold disks. *J London Math Soc*, 2005, 72: 689–716
- 156 Buff X, Henriksen C. Scaling ratios and triangles in Siegel disks. *Math Res Lett*, 1999, 6: 293–305
- 157 Buff X, Henriksen C. Julia sets in parameter spaces. *Comm Math Phys*, 2001, 220: 333–375
- 158 Buff X, Henriksen C. On König’s root-finding algorithms. *Nonlinearity*, 2003, 16: 989–1015
- 159 Bullett S. Matings in holomorphic dynamics. In: *Geometry of Riemann surfaces*. London Math Soc. Lecture Note Ser, vol. 368. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2010, 88–119
- 160 Bullett S, Lomonaco L. Dynamics of modular matings. *Adv Math*, 2022, 410: Paper No 108758, 43 pp
- 161 Calegari D, Gabai D. Shrinkwrapping and the taming of hyperbolic 3-manifolds. *J Amer Math Soc*, 2006, 19: 385–446
- 162 Canela J. Singular perturbations of Blaschke products and connectivity of Fatou components. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2017, 37: 3567–3585
- 163 Cao J, Wang X, Yin Y. Boundaries of capture hyperbolic components. *ArXiv: 2206.07462*, 2022
- 164 Carleson L, Gamelin T W. *Complex dynamics*. Universitext: Tracts in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1993
- 165 Carleson L, Jones P W, Yoccoz J-C. Julia and John. *Bol Soc Brasil Mat (NS)*, 1994, 25: 1–30
- 166 Carrasco M P. On the conformal gauge of a compact metric space. *Ann Sci Éc Norm Supér*, 2013, 46: 495–548
- 167 Cayley M. The Newton-Fourier imaginary problem. *Amer J Math*, 1879: p 97
- 168 Cerveau D, Ghys É, Sibony N, et al. *Complex dynamics and geometry*. SMF/AMS Texts and Monographs, vol. 10. Providence: AMS; Paris: Société Mathématique de France, 2003
- 169 Chen T, Jiang Y. Canonical Thurston obstructions for sub-hyperbolic semi-rational branched coverings. *Conform Geom Dyn*, 2013, 17: 6–25
- 170 Chen T, Jiang Y, Keen L. Slices of parameter space for meromorphic maps with two asymptotic values. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2023, 43: 99–139
- 171 Cheraghi D. Combinatorial rigidity for some infinitely renormalizable unicritical polynomials. *Conform Geom Dyn*, 2010, 14: 219–255
- 172 Cheraghi D. Typical orbits of quadratic polynomials with a neutral fixed point: Brjuno type. *Comm Math Phys*, 2013, 322: 999–1035
- 173 Cheraghi D. Typical orbits of quadratic polynomials with a neutral fixed point: non-Brjuno type. *Ann Sci Éc Norm Supér*, 2019, 52: 59–138
- 174 Cheraghi D. Topology of irrationally indifferent attractors. *ArXiv: 1706.02678v3*, 2022
- 175 Cheraghi D, Chéritat A. A proof of the Marmi-Moussa-Yoccoz conjecture for rotation numbers of high type. *Invent Math*, 2015, 202: 677–742
- 176 Cheraghi D, DeZotti A, Yang F. Dimension paradox of irrationally indifferent attractors. *ArXiv: 2003.12340*, 2020
- 177 Cheraghi D, Shishikura M. Satellite renormalization of quadratic polynomials. *ArXiv: 1509.07843*, 2015
- 178 Chéritat A. Ghys-like models for Lavaurs and simple entire maps. *Conform Geom Dyn*, 2006, 10: 227–256
- 179 Chéritat A. The hunt for Julia sets with positive measure. In: *Complex dynamics*. Wellesley: A K Peters, 2009, 539–559
- 180 Chéritat A. Relatively compact Siegel disks with non-locally connected boundaries. *Math Ann*, 2011, 349: 529–542
- 181 Chéritat A. Tan Lei and Shishikura’s example of non-mateable degree 3 polynomials without a Levy cycle. *Ann Fac Sci Toulouse Math*, 2012, 21: 935–980
- 182 Chéritat A. Near parabolic renormalization for unicritical holomorphic maps. *Arnold Math J*, 2022, 8: 169–270
- 183 Chéritat A, Epstein A L. Bounded type Siegel disks of finite type maps with few singular values. *Sci China Math*, 2018, 61: 2139–2156
- 184 Chéritat A, Epstein A L, Petersen C L. Perspectives on parabolic points in holomorphic dynamics. *Workshop report*, 2015
- 185 Chéritat A, Roesch P. Herman’s condition and Siegel disks of bi-critical polynomials. *Comm Math Phys*, 2016, 344:

- 397–426
- 186 Chéritat A, Yang F. Self-similarity of the boundaries of the high type Siegel disks in the quadratic family. Preprint, 2016
- 187 Cherry W, Yang C-C, eds. Value distribution theory and complex dynamics. Contemporary Mathematics, vol. 303. Providence: AMS, 2002
- 188 Childers D K. Are there critical points on the boundaries of mother hedgehogs?. In: Holomorphic dynamics and renormalization, Fields Inst Commun, vol. 53. Providence: AMS, 2008, 75–87
- 189 Chirka E M. On the propagation of holomorphic motions. Dokl Akad Nauk, 2004, 397: 37–40
- 190 Chu H. Surgery on Herman rings of the standard Blaschke family. Discrete Contin Dyn Syst, 2018, 38: 63–74
- 191 Clark T, Drach K, Kozlovski O, et al. The dynamics of complex box mappings. Arnold Math J, 2022, 8: 319–410
- 192 Clark T, van Strien S. Quasisymmetric rigidity in one-dimensional dynamics. ArXiv: 1805.09284, 2018
- 193 Clark T, van Strien S, Trejo S. Complex bounds for real maps. Comm Math Phys, 2017, 355: 1001–1119
- 194 Collet P, Dobbertin R, Moussa P. Multifractal analysis of nearly circular Julia set and thermodynamical formalism. Ann Inst H Poincaré Phys Théor, 1992, 56: 91–122
- 195 Collet P, Eckmann J-P. Iterated maps on the interval as dynamical systems. Progress in Physics, vol. 1. Boston: Birkhäuser, 1980
- 196 Collet P, Eckmann J-P. Positive Liapunov exponents and absolute continuity for maps of the interval. Ergodic Theory Dynam Systems, 1983, 3: 13–46
- 197 Comdühr P. Nowhere differentiable hairs for entire maps. Math Z, 2019, 292: 343–359
- 198 Comdühr P. On the differentiability of hairs for Zorich maps. Ergodic Theory Dynam Systems, 2019, 39: 1824–1842
- 199 Cremer H. Zum Zentrumproblem. Math Ann, 1928, 98: 151–163
- 200 Cui G. Conjugacies between rational maps and extremal quasiconformal maps. Proc Amer Math Soc, 2001, 129: 1949–1953
- 201 Cui G, Gao Y. Wandering continua for rational maps. Discrete Contin Dyn Syst, 2016, 36: 1321–1329
- 202 Cui G, Gao Y, Zeng J. Invariant graphs of rational maps. Adv Math, 2022, 404: Paper No 108454, 50 pp
- 203 Cui G, Jiang Y. Geometrically finite and semi-rational branched coverings of the two-sphere. Trans Amer Math Soc, 2011, 363: 2701–2714
- 204 Cui G, Jiang Y, Sullivan D. On geometrically finite branched coverings I. II. In: Complex dynamics and related topics: lectures from the Morningside Center of Mathematics. New Stud Adv Math, vol. 5. Somerville: Int Press, 2003, 1–14, 15–29
- 205 Cui G, Peng W. On the cycles of components of disconnected Julia sets. Math Ann, 2021, 381: 971–1003
- 206 Cui G, Peng W, Tan L. On a theorem of Rees-Shishikura. Ann Fac Sci Toulouse Math, 2012, 21: 981–993
- 207 Cui G, Peng W, Tan L. Renormalizations and wandering Jordan curves of rational maps. Comm Math Phys, 2016, 344: 67–115
- 208 Cui G, Tan L. A characterization of hyperbolic rational maps. Invent Math, 2011, 183: 451–516
- 209 Cui G, Tan L. Hyperbolic-parabolic deformations of rational maps. Sci China Math, 2018, 61: 2157–2220
- 210 Cui W. Lebesgue measure of escaping sets of entire functions. Ergodic Theory Dynam Systems, 2020, 40: 89–116
- 211 Curry C P, Mayer J C, Meddaugh J, et al. Any counterexample to Makienko’s conjecture is an indecomposable continuum. Ergodic Theory Dynam Systems, 2009, 29: 875–883
- 212 Curry J H, Garnett L, Sullivan D. On the iteration of a rational function: computer experiments with Newton’s method. Comm Math Phys, 1983, 91: 267–277
- 213 David G. Solutions de l’équation de Beltrami avec $\|\mu\|_\infty = 1$. Ann Acad Sci Fenn Ser A I Math, 1988, 13: 25–70
- 214 Dawson S P, Galeeva R, Milnor J, et al. A monotonicity conjecture for real cubic maps. In: Real and complex dynamical systems. Math Phys Sci, vol. 464. Dordrecht: Kluwer Acad Publ, 1995, 165–183
- 215 DeMarco L. Dynamics of rational maps: a current on the bifurcation locus. Math Res Lett, 2001, 8: 57–66
- 216 DeMarco L. The moduli space of quadratic rational maps. J Amer Math Soc, 2007, 20: 321–355
- 217 DeMarco L. Critical orbits and arithmetic equidistribution. In: Proceedings of the ICM—Rio de Janeiro, 2018 vol. III. Invited lectures. Hackensack: World Sci Publ, 2018, 1867–1886
- 218 DeMarco L, Krieger H, Ye H. Uniform Manin-Mumford for a family of genus 2 curves. Ann of Math, 2020, 191: 949–1001
- 219 DeMarco L, Krieger H, Ye H. Common preperiodic points for quadratic polynomials. J Mod Dyn, 2022, 18: 363–413
- 220 DeMarco L, Pilgrim K M. Polynomial basins of infinity. Geom Funct Anal, 2011, 21: 920–950
- 221 DeMarco L, Pilgrim K M. The classification of polynomial basins of infinity. Ann Sci Éc Norm Supér, 2017, 50: 799–877
- 222 Denjoy A. Sur l’itération des fonctions analytiques. C R Acad Sci Paris Sér I Math, 1926, 182: 255–257
- 223 Denjoy A. Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore. J Math Pures Appl, 1932, 11: 333–376
- 224 Denker M, Urbański M. Hausdorff and conformal measures on Julia sets with a rationally indifferent periodic point.

- J London Math Soc, 1991, 43: 107–118
- 225 Derrida B, de Seze L, Itzykson C. Fractal structure of zeros in hierarchical models. *J Statist Phys*, 1983, 33: 559–569
- 226 Devaney R L. Knaster-like continua and complex dynamics. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 1993, 13: 627–634
- 227 Devaney R L, ed. *Complex dynamical systems, the mathematics behind the Mandelbrot and Julia sets*. Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, vol. 49. Providence: AMS, 1994
- 228 Devaney R L. Intertwined internal rays in Julia sets of rational maps. *Fund Math*, 2009, 206: 139–159
- 229 Devaney R L. Singular perturbations of complex polynomials. *Bull Amer Math Soc (NS)*, 2013, 50: 391–429
- 230 Devaney R L. *A first course in chaotic dynamical systems*, second ed. Taylor & Francis Group: CRC Press, 2020
- 231 Devaney R L. *An introduction to chaotic dynamical systems*, third ed. Boca Raton: CRC Press, 2022
- 232 Devaney R L, Fagella N, Garijo A, et al. Sierpiński curve Julia sets for quadratic rational maps. *Ann Acad Sci Fenn Math*, 2014, 39: 3–22
- 233 Devaney R L, Jarque X. Indecomposable continua in exponential dynamics. *Conform Geom Dyn*, 2002, 6: 1–12
- 234 Devaney R L, Keen L. Dynamics of tangent. In: *Dynamical systems*. Lecture Notes in Math, vol. 1342. Berlin: Springer, 1988, 105–111
- 235 Devaney R L, Keen L, eds. *Chaos and fractals, the mathematics behind the computer graphics*. Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, vol. 39. Providence: AMS, 1989
- 236 Devaney R L, Keen L, eds. *Complex dynamics, 25 years after the appearance of the Mandelbrot set*. Contemporary Mathematics, vol. 396. Providence: AMS, 2006
- 237 Devaney R L, Krych M. Dynamics of $\exp(z)$. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 1984, 4: 35–52
- 238 Devaney R L, Look D M, Uminsky D. The escape trichotomy for singularly perturbed rational maps. *Indiana Univ Math J*, 2005, 54: 1621–1634
- 239 Devaney R L, Russell E D. Connectivity of Julia sets for singularly perturbed rational maps. In: *Chaos, CNN, Memristors and Beyond*. World Scientific, 2013, 239–245
- 240 Devaney R L, Tangerman F. Dynamics of entire functions near the essential singularity. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 1986, 6: 489–503
- 241 DeZotti A, Roesch P. On (non-)local connectivity of some Julia sets. In: *Frontiers in complex dynamics*. Princeton Math Ser, vol. 51. Princeton: Princeton Univ Press, 2014, 135–162
- 242 Dinh T-C, Sibony N. Dynamics in several complex variables: endomorphisms of projective spaces and polynomial-like mappings. In: *Holomorphic dynamical systems*. Lecture Notes in Math, vol. 1998. Berlin: Springer, 2010, 165–294
- 243 Domínguez P. Connectedness properties of Julia sets of transcendental entire functions. *Complex Variables Theory Appl*, 1997, 32: 199–215
- 244 Domínguez P. Dynamics of transcendental meromorphic functions. *Ann Acad Sci Fenn Math*, 1998, 23: 225–250
- 245 Domínguez P, Fagella N. Existence of Herman rings for meromorphic functions. *Complex Var Theory Appl*, 2004, 49: 851–870
- 246 Domínguez P, Fagella N. Residual Julia sets of rational and transcendental functions. In: *Transcendental dynamics and complex analysis*. London Math Soc Lecture Note Ser, vol. 348. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2008, 138–164
- 247 Domínguez P, Sienna G. A study of the dynamics of $\lambda \sin z$. *Internat J Bifur Chaos Appl Sci Engrg*, 2002, 12: 2869–2883
- 248 Douady A. Systèmes dynamiques holomorphes. In: *Bourbaki seminar, Astérisque*, vol. 105. Paris: Soc Math France, 1983, 39–63
- 249 Douady A. Disques de Siegel et anneaux de Herman. In: *Bourbaki seminar, Astérisque*, no 152-153. Paris: Soc Math France, 1987, 151–172
- 250 Douady A. Descriptions of compact sets in \mathbf{C} . In: *Topological methods in modern mathematics*. Houston: Publish or Perish, 1993, 429–465
- 251 Douady A. Does a Julia set depend continuously on the polynomial?. In: *Complex dynamical systems*. Proc Sympos Appl Math, vol. 49. Providence: AMS, 1994, 91–138
- 252 Douady A. Prolongement de mouvements holomorphes (d'après Ślodkowski et autres). *Séminaire Bourbaki*, vol. 1993/94, Exp No 775, 3, 7–20
- 253 Douady A. Topological entropy of unimodal maps: monotonicity for quadratic polynomials. In: *Real and complex dynamical systems*. Math Phys Sci, vol. 464. Dordrecht: Kluwer Acad Publ, 1995, 65–87
- 254 Douady A, Earle C J. Conformally natural extension of homeomorphisms of the circle. *Acta Math*, 1986, 157: 23–48
- 255 Douady A, Hubbard J H. Itération des polynômes quadratiques complexes. *C R Acad Sci Paris Sér I Math*, 1982, 294: 123–126
- 256 Douady A, Hubbard J H. Étude dynamique des polynômes complexes, Partie I. II. *Publications Mathématiques d'Orsay*, vol. 84-85. Orsay: Université de Paris-Sud, 1984-1985
- 257 Douady A, Hubbard J H. On the dynamics of polynomial-like mappings. *Ann Sci École Norm Sup*, 1985, 18: 287–343

- 258 Douady A, Hubbard J H. A proof of Thurston's topological characterization of rational functions. *Acta Math*, 1993, 171: 263–297
- 259 Douady A, Sentenac P, Zinsmeister M. Implosion parabolique et dimension de Hausdorff. *C R Acad Sci Paris Sér I Math*, 1997, 325: 765–772
- 260 Drach K, Schleicher D. Rigidity of Newton dynamics. *Adv Math*, 2022, 408: Paper No 108591, 64 pp
- 261 Dudko A, Sutherland S. On the Lebesgue measure of the Feigenbaum Julia set. *Invent Math*, 2020, 221: 167–202
- 262 Dudko D. Matings with laminations. *ArXiv*: 1112.4780, 2011
- 263 Dudko D, Lyubich M. Uniform a priori bounds for neutral renormalization. *ArXiv*: 2210.09280, 2022
- 264 Dudko D, Lyubich M. Local connectivity of the Mandelbrot set at some satellite parameters of bounded type. *Geom Funct Anal*, 2023, 33: 912–1047
- 265 Dudko D, Lyubich M. MLC at Feigenbaum points. *ArXiv*: 2309.02107, 2023
- 266 Dudko D, Lyubich M, Selinger N. Pacman renormalization and self-similarity of the Mandelbrot set near Siegel parameters. *J Amer Math Soc*, 2020, 33: 653–733
- 267 Dudko D, Schleicher D. Core entropy of quadratic polynomials. With an appendix by W Jung. *Arnold Math J*, 2020, 6: 333–385
- 268 Dujardin R. Non-density of stability for holomorphic mappings on \mathbb{P}^k . *J Éc polytech Math*, 2017, 4: 813–843
- 269 Dujardin R, Favre C. Distribution of rational maps with a preperiodic critical point. *Amer J Math*, 2008, 130: 979–1032
- 270 Dujardin R, Favre C, Gauthier T. When do two rational functions have locally biholomorphic Julia sets?. *Trans Amer Math Soc*, 2023, 376: 1601–1624
- 271 Dujardin R, Lyubich M. Stability and bifurcations for dissipative polynomial automorphisms of \mathbb{C}^2 . *Invent Math*, 2015, 200: 439–511
- 272 Epstein A. Counterexamples to the quadratic mating conjecture. *Manuscript*, 1998
- 273 Epstein A. Bounded hyperbolic components of quadratic rational maps. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2000, 20: 727–748
- 274 Epstein A, Yampolsky M. Geography of the cubic connectedness locus: intertwining surgery. *Ann Sci École Norm Sup*, 1999, 32: 151–185
- 275 Eremenko A E. On the iteration of entire functions. In: *Dynamical systems and ergodic theory*. Warsaw: Banach Center Publ, vol. 23, PWN, 1989, 339–345
- 276 Eremenko A E. Some functional equations connected with the iteration of rational functions. *Algebra i Analiz*, 1989, 1: 102–116
- 277 Eremenko A E, Levin G M. Periodic points of polynomials. *Ukrain Mat Zh*, 1989, 41: 1467–1471, 1581
- 278 Eremenko A E, Lyubich M. Examples of entire functions with pathological dynamics. *J London Math Soc*, 1987, 36: 458–468
- 279 Eremenko A E, Lyubich M. The dynamics of analytic transformations. *Leningrad Math J*, 1990, 1: 563–634
- 280 Eremenko A E, Lyubich M. Dynamical properties of some classes of entire functions. *Ann Inst Fourier (Grenoble)*, 1992, 42: 989–1020
- 281 Essén M, Wu S. Repulsive fixpoints of analytic functions with applications to complex dynamics. *J London Math Soc*, 2000, 62: 139–148
- 282 Evdoridou V, Rippon P J, Stallard G M. Oscillating simply connected wandering domains. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2023, 43: 1239–1268
- 283 Fagella N. Dynamics of the complex standard family. *J Math Anal Appl*, 1999, 229: 1–31
- 284 Fagella N, Geyer L. Surgery on Herman rings of the complex standard family. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2003, 23: 493–508
- 285 Fagella N, Godillon S, Jarque X. Wandering domains for composition of entire functions. *J Math Anal Appl*, 2015, 429: 478–496
- 286 Fagella N, Henriksen C. The Teichmüller space of an entire function. In: *Complex dynamics*. Wellesley: A K Peters, 2009, 297–330
- 287 Fagella N, Jarque X, Lazebnik K. Univalent wandering domains in the Eremenko-Lyubich class. *J Anal Math*, 2019, 139: 369–395
- 288 Fagella N, Keen L. Stable components in the parameter plane of transcendental functions of finite type. *J Geom Anal*, 2021, 31: 4816–4855
- 289 Fagella N, Martí-Pete D. Dynamic rays of bounded-type transcendental self-maps of the punctured plane. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2017, 37: 3123–3160
- 290 Falconer K. *Fractal geometry*, third ed. Chichester: John Wiley & Sons, Ltd, 2014
- 291 Fan A, Fan S, Liao L, et al. Fuglede's conjecture holds in \mathbb{Q}_p . *Math Ann*, 2019, 375: 315–341
- 292 Fan A, Fan S, Liao L, et al. On minimal decomposition of p -adic homographic dynamical systems. *Adv Math*, 2014, 257: 92–135

- 293 Fang L. On the iteration of holomorphic self-maps of \mathbf{C}^* . *Acta Math Sinica (NS)*, 1998, 14: 139–144
- 294 de Faria E, Guarino P. Dynamics of circle mappings. 33^o Colóquio Brasileiro de Matemática. Rio de Janeiro: IMPA, 2022
- 295 de Faria E, de Melo W. Rigidity of critical circle mappings I. *J Eur Math Soc (JEMS)*, 1999, 1: 339–392
- 296 de Faria E, de Melo W. Rigidity of critical circle mappings II. *J Amer Math Soc*, 2000, 13: 343–370
- 297 de Faria E, de Melo W. Mathematical tools for one-dimensional dynamics. *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, vol. 115. Cambridge: Cambridge University Press, 2008
- 298 Fatou P. Sur les solutions uniformes de certaines équations fonctionnelles. *C R Acad Sci Paris Sér I Math*, 1906, 143: 546–548
- 299 Fatou P. Sur les équations fonctionnelles. *Bull Soc Math France*, 1919, 47: 161–271; 1920, 48: 33–94, 208–314
- 300 Fatou P. Sur l'itération des fonctions transcendentes entières. *Acta Math*, 1926, 47: 337–370
- 301 Faught D. Local connectivity in a family of cubic polynomials. PhD Thesis. New York: Cornell University, 1992
- 302 Feigenbaum M J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *J Statist Phys*, 1978, 19: 25–52
- 303 Flexor M, Sentenac P, Yoccoz J-C, eds. Géométrie complexe et systèmes dynamiques. Paris: Société Mathématique de France, 2000
- 304 Fornæss J E, Rong F. Estimate of the squeezing function for a class of bounded domains. *Math Ann*, 2018, 371: 1087–1094
- 305 Fornæss J E, Sibony N. Random iterations of rational functions. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 1991, 11: 687–708
- 306 Fornæss J E, Sibony N. Complex dynamics in higher dimensions. In: *Complex potential theory*. *Math Phys Sci*, vol. 439. Dordrecht: Kluwer Acad Publ, 1994, 131–186
- 307 Fornæss J E, Sibony N. Complex dynamics in higher dimension II. In: *Modern methods in complex analysis*. *Ann of Math Stud*, vol. 137. Princeton: Princeton Univ Press, 1995, 135–182
- 308 Fu J, Yang F. On the dynamics of a family of singularly perturbed rational maps. *J Math Anal Appl*, 2015, 424: 104–121
- 309 Fu J, Zhang G. On the accumulation sets of exponential rays. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2019, 39: 370–391
- 310 Fu J, Zhang S. A new type of non-landing exponential rays. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2020, 40: 4179–4196
- 311 Fu Y, Yang F. Area and Hausdorff dimension of Sierpiński carpet Julia sets. *Math Z*, 2020, 294: 1441–1456
- 312 Fu Y, Yang F. Mating Siegel and parabolic quadratic polynomials. *ArXiv*: 2305.15180, 2023
- 313 Fu Y, Yang F, Zhang G. Quadratic rational maps with a 2-cycle of Siegel disks. *J Geom Anal*, 2022, 32: Paper No 244, 26 pp
- 314 Fu Y, Zhang Y. Mating Siegel and Thurston quadratic polynomials. *ArXiv*: 2402.17475, 2024
- 315 Gaidashev D. On the scaling ratios for Siegel disks. *Comm Math Phys*, 2015, 333: 931–957
- 316 Gao B, Shen W. Summability implies Collet-Eckmann almost surely. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2014, 34: 1184–1209
- 317 Gao J, Liu G. On connectivity of Fatou components concerning a family of rational maps. *Abstr Appl Anal*, 2014: Art ID 621312, 7 pp
- 318 Gao R. Viana maps driven by Benedicks-Carleson quadratic maps. *Trans Amer Math Soc*, 2021, 374: 1449–1495
- 319 Gao Y. On Thurston's core entropy algorithm. *Trans Amer Math Soc*, 2020, 373: 747–776
- 320 Gao Y, Tiozzo G. The core entropy for polynomials of higher degree. *J Eur Math Soc (JEMS)*, 2022, 24: 2555–2603
- 321 Gao Y, Yang L, Zeng J. Subhyperbolic rational maps on boundaries of hyperbolic components. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2022, 42: 319–326
- 322 Garber V. On the iteration of rational functions. *Math Proc Cambridge Philos Soc*, 1978, 84: 497–505
- 323 Gardiner F P, Jiang Y, Wang Z. Holomorphic motions and related topics. In: *Geometry of Riemann surfaces*. *London Math Soc Lecture Note Ser*, vol. 368. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2010, 156–193
- 324 Gauthier T. Strong bifurcation loci of full Hausdorff dimension. *Ann Sci Éc Norm Supér*, 2012, 45: 947–984
- 325 Geyer L. Siegel discs, Herman rings and the Arnold family. *Trans Amer Math Soc*, 2001, 353: 3661–3683
- 326 Geyer L. Linearizability of saturated polynomials. *Indiana Univ Math J*, 2019, 68: 1551–1578
- 327 Ghys É. Transformations holomorphes au voisinage d'une courbe de Jordan. *C R Acad Sci Paris Sér I Math*, 1984, 298: 385–388
- 328 Ghys É, Goldberg L R, Sullivan D. On the measurable dynamics of $z \mapsto e^z$. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 1985, 5: 329–335
- 329 Godillon S. A family of rational maps with buried Julia components. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2015, 35: 1846–1879
- 330 Goldberg L R, Keen L. A finiteness theorem for a dynamical class of entire functions. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 1986, 6: 183–192
- 331 Goldberg L R, Milnor J. Fixed points of polynomial maps II. Fixed point portraits. *Ann Sci École Norm Sup*, 1993, 26: 51–98
- 332 Gong Z, Qiu W, Li Y. Connectedness of Julia sets for a quadratic random dynamical system. *Ergodic Theory*

- Dynam Systems, 2003, 23: 1807–1815
- 333 Gong Z, Ren F. A random dynamical system formed by infinitely many functions. *J Fudan Univ Nat Sci*, 1996, 35: 387–392
- 334 Graczyk J, Jones P. Dimension of the boundary of quasiconformal Siegel disks. *Invent Math*, 2002, 148: 465–493
- 335 Graczyk J, Sands D, Świątek G. Metric attractors for smooth unimodal maps. *Ann of Math*, 2004, 159: 725–740
- 336 Graczyk J, Sands D, Świątek G. Decay of geometry for unimodal maps: negative Schwarzian case. *Ann of Math*, 2005, 161: 613–677
- 337 Graczyk J, Smirnov S. Collet, Eckmann and Hölder. *Invent Math*, 1998, 133: 69–96
- 338 Graczyk J, Smirnov S. Non-uniform hyperbolicity in complex dynamics. *Invent Math*, 2009, 175: 335–415
- 339 Graczyk J, Świątek G. Polynomial-like mappings induced by real polynomials. In: *Dynamical systems and applications*. World Sci Ser Appl Anal, vol. 4. River Edge: World Sci Publ, 1995, 315–328
- 340 Graczyk J, Świątek G. Polynomial-like property for real quadratic polynomials. *Topology Proc*, 1996, 21: 33–112
- 341 Graczyk J, Świątek G. Generic hyperbolicity in the logistic family. *Ann of Math*, 1997, 146: 1–52
- 342 Graczyk J, Świątek G. The real Fatou conjecture. *Annals of Mathematics Studies*, vol. 144. Princeton: Princeton University Press, 1998
- 343 Graczyk J, Świątek G. Siegel disks with critical points in their boundaries. *Duke Math J*, 2003, 119: 189–196
- 344 Grispolakis J, Mayer J C, Oversteegen L G. Building blocks for quadratic Julia sets. *Trans Amer Math Soc*, 1999, 351: 1171–1201
- 345 Haïssinsky P. Chirurgie parabolique. *C R Acad Sci Paris Sér I Math*, 1998, 327: 195–198
- 346 Haïssinsky P. Modulation dans l'ensemble de Mandelbrot. In: *The Mandelbrot set, theme and variations*. London Math Soc Lecture Note Ser, vol. 274. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2000, 37–65
- 347 Haïssinsky P. Rigidity and expansion for rational maps. *J London Math Soc*, 2001, 63: 128–140
- 348 Haïssinsky P, Tan L. Convergence of pinching deformations and matings of geometrically finite polynomials. *Fund Math*, 2004, 181: 143–188
- 349 Havard G, Zinsmeister M. Thermodynamic formalism and variations of the Hausdorff dimension of quadratic Julia sets. *Comm Math Phys*, 2000, 210: 225–247
- 350 Hayman W K, Lingham E F. *Research problems in function theory*. Problem Books in Mathematics. Cham: Springer, 2019
- 351 Heinonen J, Koskela P. Definitions of quasiconformality. *Invent Math*, 1995, 120: 61–79
- 352 Hemke J-M. Recurrence of entire transcendental functions with simple post-singular sets. *Fund Math*, 2005, 187: 255–289
- 353 Henriksen C. The combinatorial rigidity conjecture is false for cubic polynomials. *Trans Amer Math Soc*, 2003, 355: 3625–3639
- 354 Herman M R. Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations. *Inst Hautes Études Sci Publ Math*, 1979: 5–233
- 355 Herman M R. Exemples de fractions rationnelles ayant une orbite dense sur la sphère de Riemann. *Bull Soc Math France*, 1984, 112: 93–142
- 356 Herman M R. Are there critical points on the boundaries of singular domains?. *Comm Math Phys*, 1985, 99: 593–612
- 357 Herman M R. Conjugaison quasi-symétrique des difféomorphismes du cercle à des rotations et applications aux disques singuliers de Siegel. Manuscript, 1986
- 358 Herman M R, Yoccoz J-C. Generalizations of some theorems of small divisors to non-Archimedean fields. In: *Geometric dynamics*. Lecture Notes in Math, vol. 1007. Berlin: Springer, 1983, 408–447
- 359 Hjorth P G, Petersen C L, eds. *Dynamics on the Riemann sphere*. A Bodil Branner Festschrift. Zürich: European Mathematical Society, 2006
- 360 Hu J, Jiang Y. The Julia set of the Feigenbaum quadratic polynomial is locally connected. Preprint, 1993
- 361 Hu J, Xiao Y. No Herman rings for regularly ramified rational maps. *Proc Amer Math Soc*, 2019, 147: 1587–1596
- 362 Hua X H, Yang C C. *Dynamics of transcendental functions*. Asian Mathematics Series, vol. 1. Amsterdam: Gordon, Breach Science Publishers, 1998
- 363 Huang X, Qiu W. The dimension paradox in parameter space of cosine family. *Chinese Ann Math Ser B*, 2020, 41: 645–656
- 364 Hubbard J H. The Hénon mapping in the complex domain. In: *Chaotic dynamics and fractals*. Notes Rep Math Sci Engrg, vol. 2. Orlando: Academic Press, 1986, 101–111
- 365 Hubbard J H. Local connectivity of Julia sets and bifurcation loci: three theorems of J-C Yoccoz. In: *Topological methods in modern mathematics*. Houston: Publish or Perish, 1993, 467–511
- 366 Hubbard J H. *Teichmüller theory and applications to geometry, topology, and dynamics*, vol. 2. Surface homeomorphisms and rational functions. Ithaca: Matrix Editions, 2016
- 367 Hubbard J H, Schleicher D. The spider algorithm. In: *Complex dynamical Systems*. Proc Sympos Appl Math, vol. 49. Providence: AMS, 1994, 155–180

- 368 Hubbard J H, Schleicher D. Multicorns are not path connected. In: *Frontiers in complex dynamics*. Princeton Math Ser, vol. 51. Princeton: Princeton Univ Press, 2014, 73–102
- 369 Hubbard J H, Schleicher D, Shishikura M. Exponential Thurston maps and limits of quadratic differentials. *J Amer Math Soc*, 2009, 22: 77–117
- 370 Hubbard J H, Schleicher D, Sutherland S. How to find all roots of complex polynomials by Newton’s method. *Invent Math*, 2001, 146: 1–33
- 371 Inou H. Combinatorics and topology of straightening maps, II: Discontinuity. ArXiv: 0903.4289v4, 2018
- 372 Inou H, Kiwi J. Combinatorics and topology of straightening maps, I: Compactness and bijectivity. *Adv Math*, 2012, 231: 2666–2733
- 373 Inou H, Mukherjee S. Non-landing parameter rays of the multicorns. *Invent Math*, 2016, 204: 869–893
- 374 Inou H, Shishikura M. The renormalization for parabolic fixed points and their perturbation. Preprint, 2008
- 375 Jakobson M V. Smooth mappings of the circle into itself. *Mat Sb (NS)*, 1971, 85: 163–188
- 376 Jakobson M V. Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps. *Comm Math Phys*, 1981, 81: 39–88
- 377 Jaksztas L. On the derivative of the Hausdorff dimension of the quadratic Julia sets. *Trans Amer Math Soc*, 2011, 363: 5251–5291
- 378 Jaksztas L, Zinsmeister M. On the derivative of the Hausdorff dimension of the Julia sets for $z^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$ at parabolic parameters with two petals. *Adv Math*, 2020, 363: 106981, 59 pp
- 379 Jenkinson O, Pollicott M. Calculating Hausdorff dimensions of Julia sets and Kleinian limit sets. *Amer J Math*, 2002, 124: 495–545
- 380 Ji Z. Non-wandering Fatou components for strongly attracting polynomial skew products. *J Geom Anal*, 2020, 30: 124–152
- 381 Ji Z. Structure of Julia sets for post-critically finite endomorphisms on \mathbb{P}^2 . *Math Ann*, 2022, 384: 857–880
- 382 Ji Z, Xie J. Homoclinic orbits, multiplier spectrum and rigidity theorems in complex dynamics. *Forum Math Pi*, 2023, 11: Paper No e11, 37 pp
- 383 Jiang Y. Infinitely renormalizable quadratic polynomials. *Trans Amer Math Soc*, 2000, 352: 5077–5091
- 384 Jiang Y. Local connectivity of the Mandelbrot set at certain infinitely renormalizable points. In: *Complex dynamics and related topics: lectures from the Morningside Center of Mathematics*. New Stud Adv Math, vol. 5. Somerville: Int Press, 2003, 236–264
- 385 Jiang Y, Mitra S. Douady-Earle section, holomorphic motions, and some applications. In: *Quasiconformal mappings, Riemann surfaces, and Teichmüller spaces*. Contemp Math, vol. 575. Providence: AMS, 2012, 219–251
- 386 Julia G. Mémoire sur l’itération des fonctions rationnelles. *J Math Pure Appl*, 1918, 8: 47–246
- 387 Jung W. The Thurston algorithm for quadratic matings. ArXiv: 1706.04177, 2017
- 388 Kahn J. Holomorphic removability of Julia sets. ArXiv: 9812164, 1998
- 389 Kahn J. A priori bounds for some infinitely renormalizable quadratics I: bounded primitive combinatorics. ArXiv: 0609045, 2006
- 390 Kahn J, Lyubich M. A priori bounds for some infinitely renormalizable quadratics II, Decorations. *Ann Sci Éc Norm Supér*, 2008, 41: 57–84
- 391 Kahn J, Lyubich M. Local connectivity of Julia sets for unicritical polynomials. *Ann of Math*, 2009, 170: 413–426
- 392 Kahn J, Lyubich M. A priori bounds for some infinitely renormalizable quadratics III, Molecules. In: *Complex dynamics*. Wellesley: A K Peters, 2009, 229–254
- 393 Kahn J, Lyubich M. The quasi-additivity law in conformal geometry. *Ann of Math*, 2009, 169: 561–593
- 394 Kallunki S, Koskela P. Exceptional sets for the definition of quasiconformality. *Amer J Math*, 2000, 122: 735–743
- 395 Kameyama A. The Thurston equivalence for postcritically finite branched coverings. *Osaka J Math*, 2001, 38: 565–610
- 396 Kapiamba A. An optimal Yoccoz inequality for near-parabolic quadratic polynomials. ArXiv: 2103.03211v2, 2022
- 397 Kapiamba A. Non-degenerate near-parabolic renormalization. ArXiv: 2210.06647, 2022
- 398 Karpińska B. Area and Hausdorff dimension of the set of accessible points of the Julia sets of λe^z and $\lambda \sin z$. *Fund Math*, 1999, 159: 269–287
- 399 Karpińska B. Hausdorff dimension of the hairs without endpoints for $\lambda \exp z$. *C R Acad Sci Paris Sér I Math*, 1999, 328: 1039–1044
- 400 Katok A, Hasselblatt B. Introduction to the modern theory of dynamical systems. *Encyclopedia of Mathematics, its Applications*, vol. 54. Cambridge: Cambridge University Press, 1995
- 401 Kawahira T. Semiconjugacies between the Julia sets of geometrically finite rational maps. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2003, 23: 1125–1152
- 402 Kawahira T. Semiconjugacies between the Julia sets of geometrically finite rational maps II. In: *Dynamics on the Riemann sphere*. Zürich: Eur Math Soc, 2006, 131–138
- 403 Keen L, Zhang G. Bounded-type Siegel disks of a one-dimensional family of entire functions. *Ergodic Theory Dynam*

- Systems, 2009, 29: 137–164
- 404 Kinneberg K. Conformal dimension and boundaries of planar domains. *Trans Amer Math Soc*, 2017, 369: 6511–6536
- 405 Kisaka M, Shishikura M. On multiply connected wandering domains of entire functions. In: *Transcendental dynamics and complex analysis*. London Math Soc Lecture Note Ser, vol. 348. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2008, 217–250
- 406 Kiwi J. Non-accessible critical points of Cremer polynomials. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2000, 20: 1391–1403
- 407 Kiwi J. Real laminations and the topological dynamics of complex polynomials. *Adv Math*, 2004, 184: 207–267
- 408 Kiwi J. Puiseux series dynamics of quadratic rational maps. *Israel J Math*, 2014, 201: 631–700
- 409 Kiwi J, Rees M. Counting hyperbolic components. *J Lond Math Soc*, 2013, 88: 669–698
- 410 Koch S, Pilgrim K M, Selinger N. Pullback invariants of Thurston maps. *Trans Amer Math Soc*, 2016, 368: 4621–4655
- 411 Koenigs G. Recherches sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles. *Ann Sci École Norm Sup*, 1884, 1: 3–41
- 412 Kotus J, Urbański M. Fractal measures and ergodic theory of transcendental meromorphic functions. In: *Transcendental dynamics and complex analysis*. London Math Soc Lecture Note Ser, vol. 348. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2008, 251–316
- 413 Kozlovski O S. Getting rid of the negative Schwarzian derivative condition. *Ann of Math*, 2000, 152: 743–762
- 414 Kozlovski O S. Axiom A maps are dense in the space of unimodal maps in the C^k topology. *Ann of Math*, 2003, 157: 1–43
- 415 Kozlovski O, Shen W, van Strien S. Rigidity for real polynomials. *Ann of Math*, 2007, 165: 749–841
- 416 Kozlovski O, Shen W, van Strien S. Density of hyperbolicity in dimension one. *Ann of Math*, 2007, 166: 145–182
- 417 Kozlovski O, van Strien S. Local connectivity and quasi-conformal rigidity of non-renormalizable polynomials. *Proc Lond Math Soc*, 2009, 99: 275–296
- 418 Kriete H, ed. *Progress in holomorphic dynamics*. Pitman Research Notes in Mathematics Series, vol. 387. Harlow: Longman, 1998
- 419 Lanford O E III, Yampolsky M. Fixed point of the parabolic renormalization operator. *Springer Briefs in Mathematics*. Cham: Springer, 2014
- 420 Lattès S. Sur l’itération des substitutions rationnelles et les fonctions de Poincaré. *C R Acad Sci Paris Sér I Math*, 1918, 166: 26–28
- 421 Lavaurs P. Systèmes dynamiques holomorphes: explosion de points periodiques paraboliques. PhD Thesis. Orsay: Université de Paris-Sud, 1989
- 422 Lazebnik K. Several constructions in the Eremenko-Lyubich class. *J Math Anal Appl*, 2017, 448: 611–632
- 423 Leau L. Étude sur les équations fonctionnelles à une ou à plusieurs variables. *Ann Fac Sci Toulouse Math*, 1897, 11: E1–E110
- 424 Lee S-Y, Lyubich M, Makarov N G, et al. Schwarz reflections and anti-holomorphic correspondences. *Adv Math*, 2021, 385: Paper No 107766, 88 pp
- 425 Lehto O, Virtanen K I. *Quasiconformal mappings in the plane*, second ed. New York-Heidelberg: Springer-Verlag, 1973
- 426 Letherman S, Schleicher D, Wood R. The $3n + 1$ -problem and holomorphic dynamics. *Experiment Math*, 1999, 8: 241–251
- 427 Levin G. On Pommerenke’s inequality for the eigenvalues of fixed points. *Colloq Math*, 1991, 62: 167–177
- 428 Levin G. On backward stability of holomorphic dynamical systems. *Fund Math*, 1998, 158: 97–107
- 429 Levin G. Rigidity and non-local connectivity of Julia sets of some quadratic polynomials. *Comm Math Phys*, 2011, 304: 295–328
- 430 Levin G. Addendum to: Rigidity and non-local connectivity of Julia sets of some quadratic polynomials. *Comm Math Phys*, 2014, 325: 1171–1178
- 431 Levin G, Przytycki F. When do two rational functions have the same Julia set?. *Proc Amer Math Soc*, 1997, 125: 2179–2190
- 432 Levin G, Shen W, van Strien S. Positive transversality via transfer operators and holomorphic motions with applications to monotonicity for interval maps. *Nonlinearity*, 2020, 33: 3970–4012
- 433 Levin G, van Strien S. Local connectivity of the Julia set of real polynomials. *Ann of Math*, 1998, 147: 471–541
- 434 Levin G, van Strien S. Bounds for maps of an interval with one critical point of inflection type II. *Invent Math*, 2000, 141: 399–465
- 435 Levin G, van Strien S. Total disconnectedness of Julia sets and absence of invariant linefields for real polynomials. In: *Géométrie complexe et systèmes dynamiques*. Astérisqué, no 261, 2000, 161–172
- 436 Levy S. Critically finite rational maps. PhD Thesis. Princeton: Princeton University, 1985
- 437 Li H, Rivera-Letelier J. Equilibrium states of weakly hyperbolic one-dimensional maps for Hölder potentials. *Comm Math Phys*, 2014, 328: 397–419

- 438 Li H, Shen W. Dimensions of the Julia sets of rational maps with the backward contraction property. *Fund Math*, 2008, 198: 165–176
- 439 Li S, Shen W. Hausdorff dimension of Cantor attractors in one-dimensional dynamics. *Invent Math*, 2008, 171: 345–387
- 440 Li T. A monotonicity conjecture for the entropy of Hubbard trees. PhD Thesis. New York: State University of New York at Stony Brook, 2007
- 441 Li Z. Ergodic theory of expanding Thurston maps. *Atlantis Studies in Dynamical Systems*, vol. 4. Paris: Atlantis Press, 2017
- 442 Lim W R. A priori bounds and degeneration of Herman rings with bounded type rotation number. *ArXiv*: 2302.07794, 2023
- 443 Lim W R. Rigidity of J -rotational rational maps and critical quasicircle maps. *ArXiv*: 2308.07217, 2023
- 444 Lindsey K A, Younsi M. Fekete polynomials and shapes of Julia sets. *Trans Amer Math Soc*, 2019, 371: 8489–8511
- 445 Lu H, Qiu W, Yang F. Asymptotics of the Hausdorff dimensions of the Julia sets of McMullen maps with error bounds. *Nonlinearity*, 2022, 35: 787–816
- 446 Luo J. Combinatorics and holomorphic dynamics: Captures, matings, Newton’s method. PhD Thesis. New York: Cornell University, 1995
- 447 Luo Y. On geometrically finite degenerations II: Convergence and divergence. *Trans Amer Math Soc*, 2022, 375: 3469–3527
- 448 Luo Y. On hyperbolic rational maps with finitely connected Fatou sets. *J Lond Math Soc*, 2022, 105: 500–542
- 449 Luo Y. On geometrically finite degenerations I: Boundaries of main hyperbolic components. *J Eur Math Soc (JEMS)*, 2023: 69 pp
- 450 Lyubich M. Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 1983, 3: 351–385
- 451 Lyubich M. Some typical properties of the dynamics of rational mappings. *Uspekhi Mat Nauk*, 1983, 38: 197–198
- 452 Lyubich M. Typical behavior of trajectories of the rational mapping of a sphere. *Dokl Akad Nauk SSSR*, 1983, 268: 29–32
- 453 Lyubich M. Dynamics of rational transformations: topological picture. *Uspekhi Mat Nauk*, 1986, 41: 35–95
- 454 Lyubich M. The measurable dynamics of the exponential. *Sibirsk Mat Zh*, 1987, 28: 111–127
- 455 Lyubich M. Ergodic theory for smooth one-dimensional dynamical systems. *ArXiv*: 9201286, 1991
- 456 Lyubich M. On the Lebesgue measure of the Julia set of a quadratic polynomial. *ArXiv*: 9201285, 1991
- 457 Lyubich M. Combinatorics, geometry and attractors of quasi-quadratic maps. *Ann of Math*, 1994, 140: 347–404
- 458 Lyubich M. Renormalization ideas in conformal dynamics. In: *Current developments in mathematics*. Cambridge: Int Press, 1994, 155–190
- 459 Lyubich M. Dynamics of quadratic polynomials I. II. *Acta Math*, 1997, 178: 185–247, 247–297
- 460 Lyubich M. How big is the set of infinitely renormalizable quadratics?. In: *Voronezh Winter Math Schools*, Amer Math Soc Transl Ser 2, vol. 184. Providence: AMS, 1998, 131–143
- 461 Lyubich M. Feigenbaum-Couillet-Tresser universality and Milnor’s hairiness conjecture. *Ann of Math*, 1999, 149: 319–420
- 462 Lyubich M. Dynamics of quadratic polynomials III. Parapuzzle and SBR measures. In: *Géométrie complexe et systèmes dynamiques*. *Astérisqué*, no 261, 2000, 173–200
- 463 Lyubich M. Almost every real quadratic map is either regular or stochastic. *Ann of Math*, 2002, 156: 1–78
- 464 Lyubich M. Conformal geometry and dynamics of quadratic polynomials, vol. I-II. Preprint, 2022
- 465 Lyubich M, Minsky Y. Laminations in holomorphic dynamics. *J Differential Geom*, 1997, 47: 17–94
- 466 Lyubich M, Yampolsky M. Dynamics of quadratic polynomials: complex bounds for real maps. *Ann Inst Fourier (Grenoble)*, 1997, 47: 1219–1255
- 467 Lyubich M, Yampolsky M, eds. *Holomorphic dynamics and renormalization*. Fields Institute Communications, vol. 53. Providence: AMS, 2008
- 468 Ma L. A continuity result on quadratic matings with respect to parameters of odd denominator rationals. *Math Proc Cambridge Philos Soc*, 2019, 167: 369–388
- 469 Mackay J M, Tyson J T. *Conformal dimension*. University Lecture Series, vol. 54. Providence: AMS, 2010
- 470 Makienko P M. Unbounded components in parameter space of rational maps. *Conform Geom Dyn*, 2000, 4: 1–21
- 471 Makienko P M. Remarks on the Ruelle operator and the invariant line fields problem II. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2005, 25: 1561–1581
- 472 Mañé R. On the instability of Herman rings. *Invent Math*, 1985, 81: 459–471
- 473 Mañé R. A proof of the C^1 stability conjecture. *Inst Hautes Études Sci Publ Math*, 1988: 161–210
- 474 Mañé R. On a theorem of Fatou. *Bol Soc Brasil Mat (NS)*, 1993, 24: 1–11
- 475 Mañé R, da Rocha L F. Julia sets are uniformly perfect. *Proc Amer Math Soc*, 1992, 116: 251–257
- 476 Mañé R, Sad P, Sullivan D. On the dynamics of rational maps. *Ann Sci École Norm Sup*, 1983, 16: 193–217

- 477 Martens M. Distortion results and invariant Cantor sets of unimodal maps. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 1994, 14: 331–349
- 478 Martens M, Nowicki T. Invariant measures for typical quadratic maps. In: *Géométrie complexe et systèmes dynamiques*. Astérisqué, no 261, 2000, 239–252
- 479 Martí-Pete D. The escaping set of transcendental self-maps of the punctured plane. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2018, 38: 739–760
- 480 Martí-Pete D, Rempe L, Waterman J. Eremenko’s conjecture, wandering Lakes of Wada, and maverick points. ArXiv: 2108.10256v3, 2022
- 481 Martí-Pete D, Rempe L, Waterman J. Bounded Fatou and Julia components of meromorphic functions. ArXiv: 2204.11781v2, 2023
- 482 Martí-Pete D, Shishikura M. Wandering domains for entire functions of finite order in the Eremenko-Lyubich class. *Proc Lond Math Soc*, 2020, 120: 155–191
- 483 Mattila P. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 44. Cambridge: Cambridge University Press, 1995
- 484 Mayer J C. An explosion point for the set of endpoints of the Julia set of $\lambda \exp(z)$. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 1990, 10: 177–183
- 485 Mayer J C, Rogers J T. Indecomposable continua and the Julia sets of polynomials. *Proc Amer Math Soc*, 1993, 117: 795–802
- 486 Mayer V, Urbański M. Ergodic properties of semi-hyperbolic functions with polynomial Schwarzian derivative. *Proc Edinb Math Soc*, 2010, 53: 471–502
- 487 McMullen C T. Area and Hausdorff dimension of Julia sets of entire functions. *Trans Amer Math Soc*, 1987, 300: 329–342
- 488 McMullen C T. Automorphisms of rational maps. In: *Holomorphic functions and moduli*, vol. I. Math Sci Res Inst Publ, vol. 10. New York: Springer, 1988, 31–60
- 489 McMullen C T. The classification of conformal dynamical systems. In: *Current developments in mathematics*. Cambridge: Int Press, 1994, 323–360
- 490 McMullen C T. *Complex dynamics and renormalization*. Annals of Mathematics Studies, vol. 135. Princeton: Princeton University Press, 1994
- 491 McMullen C T. Frontiers in complex dynamics. *Bull Amer Math Soc (NS)*, 1994, 31: 155–172
- 492 McMullen C T. Renormalization and 3-manifolds which fiber over the circle. *Annals of Mathematics Studies*, vol. 142. Princeton: Princeton University Press, 1996
- 493 McMullen C T. Hausdorff dimension and conformal dynamics III. Computation of dimension. *Amer J Math*, 1998, 120: 691–721
- 494 McMullen C T. Self-similarity of Siegel disks and Hausdorff dimension of Julia sets. *Acta Math*, 1998, 180: 247–292
- 495 McMullen C T. Hausdorff dimension and conformal dynamics II. Geometrically finite rational maps. *Comment Math Helv*, 2000, 75: 535–593
- 496 McMullen C T. The Mandelbrot set is universal. In: *The Mandelbrot set, theme and variations*. London Math Soc Lecture Note Ser, vol. 274. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2000, 1–17
- 497 McMullen C T. Thermodynamics, dimension and the Weil-Petersson metric. *Invent Math*, 2008, 173: 365–425
- 498 McMullen C T, Sullivan D. Quasiconformal homeomorphisms and dynamics III. The Teichmüller space of a holomorphic dynamical system. *Adv Math*, 1998, 135: 351–395
- 499 de Melo W, van Strien S. *One-dimensional dynamics*. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, vol. 25. Berlin: Springer-Verlag, 1993
- 500 Meyer D. Expanding Thurston maps as quotients. ArXiv: 0910.2003v2, 2012
- 501 Meyer D. Unmating of rational maps: sufficient criteria and examples. In: *Frontiers in complex dynamics*. Princeton Math Ser, vol. 51. Princeton: Princeton Univ Press, 2014, pp, 197–233
- 502 Mihaljević-Brandt H. A landing theorem for dynamic rays of geometrically finite entire functions. *J Lond Math Soc*, 2010, 81: 696–714
- 503 Milnor J. On the concept of attractor. *Comm Math Phys*, 1985, 99: 177–195
- 504 Milnor J. Self-similarity and hairiness in the Mandelbrot set. In: *Computers in geometry and topology*. Lecture Notes in Pure, Appl Math, vol. 114. New York: Dekker, 1989, 211–257
- 505 Milnor J. Remarks on iterated cubic maps. *Experiment Math*, 1992, 1: 5–24
- 506 Milnor J. Geometry and dynamics of quadratic rational maps. With an appendix by the author and Tan L. *Experiment Math*, 1993, 2: 37–83
- 507 Milnor J. Local connectivity of Julia sets: expository lectures. In: *The Mandelbrot set, theme and variations*. London Math Soc Lecture Note Ser, vol. 274. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2000, 67–116
- 508 Milnor J. On rational maps with two critical points. *Experiment Math*, 2000, 9: 481–522
- 509 Milnor J. Periodic orbits, external rays and the Mandelbrot set: an expository account. In: *Géométrie complexe*

- et systèmes dynamiques. *Astérisqué*, no 261, 2000, 277–333
- 510 Milnor J. Pasting together Julia sets: a worked out example of mating. *Experiment Math*, 2004, 13: 55–92
- 511 Milnor J. Dynamics in one complex variable, third ed. *Annals of Mathematics Studies*, vol. 160. Princeton: Princeton University Press, 2006
- 512 Milnor J. On Lattès maps. In: *Dynamics on the Riemann sphere*. Zürich: Eur Math Soc, 2006, 9–43
- 513 Milnor J. Cubic polynomial maps with periodic critical orbit I. In: *Complex dynamics*. Wellesley: A K Peters, 2009, 333–411
- 514 Milnor J. Hyperbolic components. With an appendix by Poirier A. In: *Conformal dynamics and hyperbolic geometry*. *Contemp Math*, vol. 573. Providence: AMS, 2012, 183–232
- 515 Milnor J. Hyperbolic component boundaries. [Talk at Gyeongju](#), 2014
- 516 Milnor J, Thurston W. On iterated maps of the interval. In: *Dynamical systems*. *Lecture Notes in Math*, vol. 1342. Berlin: Springer, 1988, 465–563
- 517 Milnor J, Tresser C. On entropy and monotonicity for real cubic maps. With an appendix by A Douady and P Sentenac. *Comm Math Phys*, 2000, 209: 123–178
- 518 Misiurewicz M. Absolutely continuous measures for certain maps of an interval. *Inst Hautes Études Sci Publ Math*, 1981: 17–51
- 519 Misiurewicz M. On iterates of e^z . *Ergodic Theory Dynamical Systems*, 1981, 1: 103–106
- 520 Misiurewicz M, Szlenk W. Entropy of piecewise monotone mappings. *Studia Math*, 1980, 67: 45–63
- 521 Morosawa S. On the residual Julia sets of rational functions. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 1997, 17: 205–210
- 522 Morosawa S. Local connectedness of Julia sets for transcendental entire functions. In: *Nonlinear analysis and convex analysis*. River Edge: World Sci Publ, 1999, 266–273
- 523 Morosawa S. Julia sets of subhyperbolic rational functions. *Complex Variables Theory Appl*, 2000, 41: 151–162
- 524 Morosawa S, Nishimura Y, Taniguchi M, et al. Holomorphic dynamics. *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, vol. 66. Cambridge: Cambridge University Press, 2000
- 525 Naïshul' V A. Topological invariants of analytic and area-preserving mappings and their application to analytic differential equations in \mathbf{C}^2 and $\mathbf{C}P^2$. *Trudy Moskov Mat Obshch*, 1982, 44: 235–245
- 526 Nakane S. Connectedness of the tricorn. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 1993, 13: 349–356
- 527 Nayak T. Herman rings of meromorphic maps with an omitted value. *Proc Amer Math Soc*, 2016, 144: 587–597
- 528 Newhouse S E. Nondensity of axiom A(a) on S^2 . In: *Global Analysis (Proc Sympos Pure Math, vol. XIV)*. Providence: AMS, 1970, 191–202
- 529 Ng T W. Permutable entire functions and their Julia sets. *Math Proc Cambridge Philos Soc*, 2001, 131: 129–138
- 530 Nicks D A, Rippon P J, Stallard G M. Baker's conjecture for functions with real zeros. *Proc Lond Math Soc*, 2018, 117: 100–124
- 531 Nie H. Berkovich dynamics of Newton maps. *Math Z*, 2023, 304: Paper No 67, 41 pp
- 532 Nie H, Pilgrim K M. Bounded hyperbolic components of bicritical rational maps. *J Mod Dyn*, 2022, 18: 533–553
- 533 Nowicki T, van Strien S. Invariant measures exist under a summability condition for unimodal maps. *Invent Math*, 1991, 105: 123–136
- 534 Okuyama Y. Linearization problem on structurally finite entire functions. *Kodai Math J*, 2005, 28: 347–358
- 535 Osborne J W. Spiders' webs and locally connected Julia sets of transcendental entire functions. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2013, 33: 1146–1161
- 536 Osborne J W, Sixsmith D J. On the set where the iterates of an entire function are neither escaping nor bounded. *Ann Acad Sci Fenn Math*, 2016, 41: 561–578
- 537 Oudkerk R. The parabolic implosion: Lavaurs maps and strong convergence for rational maps. In: *Value distribution theory and complex dynamics*. *Contemp Math*, vol. 303. Providence: AMS, 2002, 79–105
- 538 Pacifico M J, Guarino P, eds. *New trends in one-dimensional dynamics*. *Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, vol. 285. Cham: Springer, 2019
- 539 Palis J. A global view of dynamics and a conjecture on the denseness of finitude of attractors. In: *Géométrie complexe et systèmes dynamiques*. *Astérisqué*, no 261, 2000, 335–347
- 540 Pansu P. Dimension conforme et sphère à l'infini des variétés à courbure négative. *Ann Acad Sci Fenn Ser A I Math*, 1989, 14: 177–212
- 541 Pardo-Simón L. Orbifold expansion and entire functions with bounded Fatou components. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2022, 42: 1807–1846
- 542 Pardo-Simón L, Sixsmith D J. Wandering domains with nearly bounded orbits. [ArXiv: 2307.16682](#), 2023
- 543 Park I. Julia sets with Ahlfors regular conformal dimension one. *PhD Thesis*. Bloomington: Indiana University, 2021
- 544 Peitgen H-O, Saupe D, eds. *The science of fractal images*. New York: Springer-Verlag, 1988
- 545 Peng W, Qiu W, Roesch P, et al. A tableau approach of the KSS nest. *Conform Geom Dyn*, 2010, 14: 35–67
- 546 Peng W, Tan L. Combinatorial rigidity of unicritical maps. *Sci China Math*, 2010, 53: 831–848

- 547 Peng W, Tan L. Quasi-conformal rigidity of multicritical maps. *Trans Amer Math Soc*, 2015, 367: 1151–1182
- 548 Peng W, Yin Y, Zhai Y. Density of hyperbolicity for rational maps with Cantor Julia sets. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2012, 32: 1711–1726
- 549 Pérez-Marco R. Sur la dynamique des germes de difféomorphismes holomorphes de $(\mathbb{C}, 0)$ et des difféomorphismes analytiques du cercle. PhD Thesis. Orsay: Université de Paris-Sud, 1990
- 550 Pérez-Marco R. Solution complète au problème de Siegel de linéarisation d’une application holomorphe au voisinage d’un point fixe (d’après J-C Yoccoz). *Astérisqué*, 1992: 273–310
- 551 Pérez-Marco R. Sur les dynamiques holomorphes non linéarisables et une conjecture de V I Arnold. *Ann Sci École Norm Sup*, 1993, 26: 565–644
- 552 Pérez-Marco R. Sur une question de Dulac et Fatou. *C R Acad Sci Paris Sér I Math*, 1995, 321: 1045–1048
- 553 Pérez-Marco R. Fixed points and circle maps. *Acta Math*, 1997, 179: 243–294
- 554 Petersen C L. On the Pommerenke-Levin-Yoccoz inequality. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 1993, 13: 785–806
- 555 Petersen C L. Local connectivity of some Julia sets containing a circle with an irrational rotation. *Acta Math*, 1996, 177: 163–224
- 556 Petersen C L. No elliptic limits for quadratic maps. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 1999, 19: 127–141
- 557 Petersen C L. The Herman-Świątek theorems with applications. In: *The Mandelbrot set, theme and variations*. London Math Soc Lecture Note Ser, vol. 274. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2000, 211–225
- 558 Petersen C L. On holomorphic critical quasi-circle maps. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2004, 24: 1739–1751
- 559 Petersen C L, Meyer D. On the notions of mating. *Ann Fac Sci Toulouse Math*, 2012, 21: 839–876
- 560 Petersen C L, Roesch P. The parabolic Mandelbrot set. *ArXiv*: 2107.09407, 2021
- 561 Petersen C L, Tan L. Analytic coordinates recording cubic dynamics. In: *Complex dynamics*. Wellesley: A K Peters, 2009, 413–449
- 562 Petersen C L, Zakeri S. On the Julia set of a typical quadratic polynomial with a Siegel disk. *Ann of Math*, 2004, 159: 1–52
- 563 Pilgrim K M. Cylinders for iterated rational maps. PhD Thesis. Berkeley: University of California, 1994
- 564 Pilgrim K M. Canonical Thurston obstructions. *Adv Math*, 2001, 158: 154–168
- 565 Pilgrim K M. An algebraic formulation of Thurston’s combinatorial equivalence. *Proc Amer Math Soc*, 2003, 131: 3527–3534
- 566 Pilgrim K M, Tan L. Combining rational maps and controlling obstructions. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 1998, 18: 221–245
- 567 Pilgrim K M, Tan L. On disc-annulus surgery of rational maps. In: *Dynamical systems, Proceedings of the International Conference in Honor of Professor Shantao Liao*. Singapore: World Scientific, 1999, 237–250
- 568 Pilgrim K M, Tan L. Rational maps with disconnected Julia set. In: *Géométrie complexe et systèmes dynamiques*. *Astérisqué*, no 261, 2000, 349–384
- 569 Poirier A. Critical portraits for postcritically finite polynomials. *Fund Math*, 2009, 203: 107–163
- 570 Poirier A. Hubbard trees. *Fund Math*, 2010, 208: 193–248
- 571 Pommerenke C. On conformal mapping and iteration of rational functions. *Complex Variables Theory Appl*, 1986, 5: 117–126
- 572 Prado E A. Ergodicity of conformal measures for unimodal polynomials. *Conform Geom Dyn*, 1998, 2: 29–44
- 573 Przytycki F. Iterations of holomorphic Collet-Eckmann maps: conformal and invariant measures. Appendix: on non-renormalizable quadratic polynomials. *Trans Amer Math Soc*, 1998, 350: 717–742
- 574 Przytycki F. On the hyperbolic Hausdorff dimension of the boundary of a basin of attraction for a holomorphic map and of quasirepellers. *Bull Pol Acad Sci Math*, 2006, 54: 41–52
- 575 Przytycki F. Thermodynamic formalism methods in one-dimensional real and complex dynamics. In: *Proc of the ICM—Rio de Janeiro, 2018 vol. III. Invited lectures*. Hackensack: World Sci Publ, 2018, 2087–2112
- 576 Przytycki F, Rohde S. Porosity of Collet-Eckmann Julia sets. *Fund Math*, 1998, 155: 189–199
- 577 Przytycki F, Rivera-Letelier J. Statistical properties of topological Collet-Eckmann maps. *Ann Sci École Norm Sup*, 2007, 40: 135–178
- 578 Przytycki F, Rohde S. Rigidity of holomorphic Collet-Eckmann repellers. *Ark Mat*, 1999, 37: 357–371
- 579 Przytycki F, Urbański M. Conformal fractals: ergodic theory methods. *London Mathematical Society Lecture Note Series*, vol. 371. Cambridge: Cambridge University Press, 2010
- 580 Przytycki F, Zdunik A. On Hausdorff dimension of polynomial not totally disconnected Julia sets. *Bull Lond Math Soc*, 2021, 53: 1674–1691
- 581 Qiao J. Julia sets of entire functions and their derivatives. *Chinese Sci Bull*, 1994, 39: 186–188
- 582 Qiao J. The Julia set of the mapping $z \mapsto z \exp(z + \mu)$. *Chinese Sci Bull*, 1994, 39: 529–533
- 583 Qiao J. The buried points on the Julia sets of rational and entire functions. *Sci China Ser A*, 1995, 38: 1409–1419
- 584 Qiao J. Topological complexity of Julia sets. *Sci China Ser A*, 1997, 40: 1158–1165
- 585 Qiao J. On limiting directions of Julia sets. *Ann Acad Sci Fenn Math*, 2001, 26: 391–399

- 586 Qiao J. Julia sets and complex singularities of free energies. *Mem Amer Math Soc*, 2015, 234: no 1102, vi+89
- 587 Qiao J, Li Y. On connectivity of Julia sets of Yang-Lee zeros. *Comm Math Phys*, 2001, 222: 319–326
- 588 Qiao J, Qu H. Area of Julia sets of non-renormalizable cubic polynomials. *ArXiv*: 2004.08088, 2020
- 589 Qiao J, Yin Y, Gao J. Feigenbaum Julia sets of singularities of free energy. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2010, 30: 1573–1591
- 590 Qiu W. Hausdorff dimension of the M -set of $\lambda \exp(z)$. *Acta Math Sinica (NS)*, 1994, 10: 362–368
- 591 Qiu W, Roesch P, Wang X, et al. Hyperbolic components of McMullen maps. *Ann Sci Éc Norm Supér*, 2015, 48: 703–737
- 592 Qiu W, Roesch P, Wang Y. Escape components of McMullen maps. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2023, 43: 3745–3775
- 593 Qiu W, Wang X, Yin Y. Dynamics of McMullen maps. *Adv Math*, 2012, 229: 2525–2577
- 594 Qiu W, Wang Y. Intersections between boundaries of bounded hyperbolic components of cubic polynomials. *Math Z*, 2023, 305: Paper No 55, 36 pp
- 595 Qiu W, Wang Y, Yang J, et al. On metric properties of limit sets of contractive analytic non-Archimedean dynamical systems. *J Math Anal Appl*, 2014, 414: 386–401
- 596 Qiu W, Yang F. Quasisymmetric uniformization and Hausdorff dimensions of Cantor circle Julia sets. *Trans Amer Math Soc*, 2021, 374: 5191–5223
- 597 Qiu W, Yang F, Yin Y. Rational maps whose Julia sets are Cantor circles. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2015, 35: 499–529
- 598 Qiu W, Yang F, Zeng J. Quasisymmetric geometry of Sierpiński carpet Julia sets. *Fund Math*, 2019, 244: 73–107
- 599 Qiu W, Yin Y. Proof of the Branner-Hubbard conjecture on Cantor Julia sets. *Sci China Ser A*, 2009, 52: 45–65
- 600 Rees M. The exponential map is not recurrent. *Math Z*, 1986, 191: 593–598
- 601 Rees M. Positive measure sets of ergodic rational maps. *Ann Sci École Norm Sup*, 1986, 19: 383–407
- 602 Rees M. Realization of matings of polynomials as rational maps of degree two. *Manuscript*, 1986
- 603 Rees M. Components of degree two hyperbolic rational maps. *Invent Math*, 1990, 100: 357–382
- 604 Rees M. A partial description of parameter space of rational maps of degree two I. *Acta Math*, 1992, 168: 11–87
- 605 Rees M. A partial description of the parameter space of rational maps of degree two II. *Proc London Math Soc*, 1995, 70: 644–690
- 606 Rees M. Views of parameter space: Topographer and Resident. *Astérisqué*, 2003: no 288, vi+418
- 607 Rees M. One hundred years of complex dynamics. *Proc A*, 2016, 472: Paper No, 20150453, 16 pp
- 608 Rempe L. Topological dynamics of exponential maps on their escaping sets. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2006, 26: 1939–1975
- 609 Rempe L. On a question of Eremenko concerning escaping components of entire functions. *Bull Lond Math Soc*, 2007, 39: 661–666
- 610 Rempe L. On nonlanding dynamic rays of exponential maps. *Ann Acad Sci Fenn Math*, 2007, 32: 353–369
- 611 Rempe L. Siegel disks and periodic rays of entire functions. *J Reine Angew Math*, 2008, 624: 81–102
- 612 Rempe L. Hyperbolic dimension and radial Julia sets of transcendental functions. *Proc Amer Math Soc*, 2009, 137: 1411–1420
- 613 Rempe L. Rigidity of escaping dynamics for transcendental entire functions. *Acta Math*, 2009, 203: 235–267
- 614 Rempe L. Hyperbolic entire functions with full hyperbolic dimension and approximation by Eremenko-Lyubich functions. *Proc Lond Math Soc*, 2014, 108: 1193–1225
- 615 Rempe L. Arc-like continua, Julia sets of entire functions, and Eremenko’s Conjecture. *ArXiv*: 1610.06278v4, 2019
- 616 Rempe L, Schleicher D. Bifurcation loci of exponential maps and quadratic polynomials: local connectivity, triviality of fibers, and density of hyperbolicity. In: *Holomorphic dynamics and renormalization*. Fields Inst Commun, vol. 53. Providence: AMS, 2008, 177–196
- 617 Rempe L, Schleicher D. Bifurcations in the space of exponential maps. *Invent Math*, 2009, 175: 103–135
- 618 Rempe L, van Strien S. Absence of line fields and Mañé’s theorem for nonrecurrent transcendental functions. *Trans Amer Math Soc*, 2011, 363: 203–228
- 619 Rempe L, van Strien S. Density of hyperbolicity for classes of real transcendental entire functions and circle maps. *Duke Math J*, 2015, 164: 1079–1137
- 620 Ren H, Shen W. A dichotomy for the Weierstrass-type functions. *Invent Math*, 2021, 226: 1057–1100
- 621 Rippon P J. Baker domains. In: *Transcendental dynamics and complex analysis*. London Math Soc Lecture Note Ser, vol. 348. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2008, 371–395
- 622 Rippon P J, Stallard G M. On questions of Fatou and Eremenko. *Proc Amer Math Soc*, 2005, 133: 1119–1126
- 623 Rippon P J, Stallard G M, eds. *Transcendental dynamics and complex analysis, A tribute to Noel Baker*. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 348. Cambridge: Cambridge University Press, 2008
- 624 Rippon P J, Stallard G M. Boundaries of escaping Fatou components. *Proc Amer Math Soc*, 2011, 139: 2807–2820
- 625 Rippon P J, Stallard G M. Fast escaping points of entire functions. *Proc Lond Math Soc*, 2012, 105: 787–820

- 626 Risler E. Linéarisation des perturbations holomorphes des rotations et applications. *Mém Soc Math Fr (NS)*, 1999: no 77, viii+102
- 627 Ritt J F. On the iteration of rational functions. *Trans Amer Math Soc*, 1920, 21: 348–356
- 628 Ritt J F. Permutable rational functions. *Trans Amer Math Soc*, 1923, 25: 399–448
- 629 Rivera-Letelier J. Rational maps with decay of geometry: rigidity, Thurston’s algorithm and local connectivity. Stony Brook IMS preprint, 2000
- 630 Rivera-Letelier J. On the continuity of Hausdorff dimension of Julia sets and similarity between the Mandelbrot set and Julia sets. *Fund Math*, 2001, 170: 287–317
- 631 Rivera-Letelier J. A connecting lemma for rational maps satisfying a no-growth condition. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2007, 27: 595–636
- 632 Rivera-Letelier J, Shen W. Statistical properties of one-dimensional maps under weak hyperbolicity assumptions. *Ann Sci Éc Norm Supér*, 2014, 47: 1027–1083
- 633 Rocha M M. Herman rings of elliptic functions. *Arnold Math J*, 2020, 6: 551–570
- 634 Roesch P. Holomorphic motions and puzzles (following M Shishikura). In: *The Mandelbrot set, theme and variations*. London Math Soc Lecture Note Ser, vol. 274. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2000, 117–131
- 635 Roesch P. On capture zones for the family $f_\lambda(z) = z^2 + \lambda/z^2$. In: *Dynamics on the Riemann sphere*. Zürich: Eur Math Soc, 2006, 121–129
- 636 Roesch P. Some rational maps whose Julia sets are not locally connected. *Conform Geom Dyn*, 2006, 10: 125–135
- 637 Roesch P. Hyperbolic components of polynomials with a fixed critical point of maximal order. *Ann Sci École Norm Sup*, 2007, 40: 901–949
- 638 Roesch P. On local connectivity for the Julia set of rational maps: Newton’s famous example. *Ann of Math*, 2008, 168: 127–174
- 639 Roesch P, Wang X, Yin Y. Moduli space of cubic Newton maps. *Adv Math*, 2017, 322: 1–59
- 640 Roesch P, Yin Y. The boundary of bounded polynomial Fatou components. *C R Math Acad Sci Paris*, 2008, 346: 877–880
- 641 Roesch P, Yin Y. Bounded critical Fatou components are Jordan domains for polynomials. *Sci China Math*, 2022, 65: 331–358
- 642 Roesch P, Yin Y, Zeng J. Rigidity of non-renormalizable Newton maps. *Sci China Math*, 2023: 18 pp
- 643 Rogers J T. Singularities in the boundaries of local Siegel disks. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 1992, 12: 803–821
- 644 Rogers J T. Diophantine conditions imply critical points on the boundaries of Siegel disks of polynomials. *Comm Math Phys*, 1998, 195: 175–193
- 645 Rong F. A brief survey on local holomorphic dynamics in higher dimensions. In: *Complex analysis and geometry*. Springer Proc Math Stat, vol. 144. Tokyo: Springer, 2015, 295–307
- 646 Rottenfusser G, Rückert J, Rempe L, et al. Dynamic rays of bounded-type entire functions. *Ann of Math*, 2011, 173: 77–125
- 647 Rottenfusser G, Schleicher D. Escaping points of the cosine family. In: *Transcendental dynamics and complex analysis*. London Math Soc Lecture Note Ser, vol. 348. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2008, 396–424
- 648 Ruelle D. Repellers for real analytic maps. *Ergodic Theory Dynamical Systems*, 1982, 2: 99–107
- 649 Rüssmann H. Über die Iteration analytischer Funktionen. *J Math Mech*, 1967, 17: 523–532
- 650 Schleicher D. On fibers and local connectivity of Mandelbrot and Multibrot sets. In: *Fractal geometry and applications: a jubilee of Benoît Mandelbrot Part 1*. Proc Sympos Pure Math, vol. 72. Providence: AMS, 2004, 477–517
- 651 Schleicher D. The dynamical fine structure of iterated cosine maps and a dimension paradox. *Duke Math J*, 2007, 136: 343–356
- 652 Schleicher D, ed. *Complex dynamics, Families and friends*. Wellesley: A K Peters, Ltd, 2009
- 653 Schleicher D. Dynamics of entire functions. In: *Holomorphic dynamical systems*. Lecture Notes in Math, vol. 1998. Berlin: Springer, 2010, 295–339
- 654 Schleicher D, Zimmer J. Escaping points of exponential maps. *J London Math Soc*, 2003, 67: 380–400
- 655 Schleicher D, Zimmer J. Periodic points and dynamic rays of exponential maps. *Ann Acad Sci Fenn Math*, 2003, 28: 327–354
- 656 Schubert H. Area of Fatou sets of trigonometric functions. *Proc Amer Math Soc*, 2008, 136: 1251–1259
- 657 Selinger N. Thurston’s pullback map on the augmented Teichmüller space and applications. *Invent Math*, 2012, 189: 111–142
- 658 Selinger N. Topological characterization of canonical Thurston obstructions. *J Mod Dyn*, 2013, 7: 99–117
- 659 Sharland T. Matings of cubic polynomials with a fixed critical point, Part I: Thurston obstructions. *Conform Geom Dyn*, 2019, 23: 205–220
- 660 Shen L. An application of the degenerate Beltrami equation: quadratic polynomials with a Siegel disk. *Ann Acad Sci Fenn Math*, 2018, 43: 267–277

- 661 Shen W. On the measurable dynamics of real rational functions. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2003, 23: 957–983
- 662 Shen W. On the metric properties of multimodal interval maps and C^2 density of Axiom A. *Invent Math*, 2004, 156: 301–403
- 663 Shen W. Decay of geometry for unimodal maps: an elementary proof. *Ann of Math*, 2006, 163: 383–404
- 664 Shen W. Hausdorff dimension of the graphs of the classical Weierstrass functions. *Math Z*, 2018, 289: 223–266
- 665 Shen W, Wang Y. Primitive tuning via quasiconformal surgery. *Israel J Math*, 2021, 245: 259–293
- 666 Shen W Q. Rees-Shishikura’s theorem for geometrically finite rational maps. *Acta Math Sin (Engl Ser)*, 2017, 33: 1587–1596
- 667 Shishikura M. On the quasiconformal surgery of rational functions. *Ann Sci École Norm Sup*, 1987, 20: 1–29
- 668 Shishikura M. Trees associated with the configuration of Herman rings. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 1989, 9: 543–560
- 669 Shishikura M. Topological, geometric and complex analytic properties of Julia sets. In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*. vol. 1, 2. Basel: Birkhäuser, 1995, 886–895
- 670 Shishikura M. The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets. *Ann of Math*, 1998, 147: 225–267
- 671 Shishikura M. Bifurcation of parabolic fixed points. In: *The Mandelbrot set, Theme and variations*. London Math Soc Lecture Note Ser, vol. 274. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2000, 325–363
- 672 Shishikura M. On a theorem of M Rees for matings of polynomials. In: *The Mandelbrot set, theme and variations*. London Math Soc Lecture Note Ser, vol. 274. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2000, 289–305
- 673 Shishikura M. Herman’s theorem on quasiasymmetric linearization of analytic circle homomorphisms. Manuscript, 2001
- 674 Shishikura M. Complex dynamics and quasiconformal mappings. In: *Lectures on Quasiconformal Mappings*. University Lecture Series, vol. 38. Providence: AMS, 2006, 119–141
- 675 Shishikura M. The connectivity of the Julia set and fixed points. In: *Complex dynamics*. Wellesley: A K Peters, 2009, 257–276
- 676 Shishikura M. Conformality of quasiconformal mappings at a point, revisited. *Ann Acad Sci Fenn Math*, 2018, 43: 981–990
- 677 Shishikura M, Tan L. An alternative proof of Mañé’s theorem on non-expanding Julia sets. In: *The Mandelbrot set, theme and variations*. London Math Soc Lecture Note Ser, vol. 274. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2000, 265–279
- 678 Shishikura M, Tan L. A family of cubic rational maps and matings of cubic polynomials. *Experiment Math*, 2000, 9: 29–53
- 679 Shishikura M, Yang F. The high type quadratic Siegel disks are Jordan domains. ArXiv: 1608.04106v4, 2021
- 680 Siegel C L. Iteration of analytic functions. *Ann of Math*, 1942, 43: 607–612
- 681 da Silva M V. The differentiability of the hairs of $\exp(Z)$. *Proc Amer Math Soc*, 1988, 103: 1179–1184
- 682 Silverman J H. *The arithmetic of dynamical systems*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 241. New York: Springer, 2007
- 683 Silverman J H. *Moduli spaces and arithmetic dynamics*. CRM Monograph Series, vol. 30. Providence: AMS, 2012
- 684 Sixsmith D J. Dynamics in the Eremenko-Lyubich class. *Conform Geom Dyn*, 2018, 22: 185–224
- 685 Skorulski B. The existence of conformal measures for some transcendental meromorphic functions. In: *Complex dynamics*. *Contemp Math*, vol. 396. Providence: AMS, 2006, 169–201
- 686 Slodkowski Z. Holomorphic motions and polynomial hulls. *Proc Amer Math Soc*, 1991, 111: 347–355
- 687 Smale S. Structurally stable systems are not dense. *Amer J Math*, 1966, 88: 491–496
- 688 Smale S. Differentiable dynamical systems. *Bull Amer Math Soc*, 1967, 73: 747–817
- 689 Smale S. *Mathematical problems for the next century*. In: *Mathematics: frontiers and perspectives*. Providence: AMS, 2000, 271–294
- 690 Smania D. Complex bounds for multimodal maps: bounded combinatorics. *Nonlinearity*, 2001, 14: 1311–1330
- 691 Smania D. Puzzle geometry and rigidity: the Fibonacci cycle is hyperbolic. *J Amer Math Soc*, 2007, 20: 629–673
- 692 Smania D. Solenoidal attractors with bounded combinatorics are shy. *Ann of Math*, 2020, 191: 1–79
- 693 Sørensen D E K. Describing quadratic Cremer point polynomials by parabolic perturbations. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 1998, 18: 739–758
- 694 Sørensen D E K. Infinitely renormalizable quadratic polynomials, with non-locally connected Julia set. *J Geom Anal*, 2000, 10: 169–206
- 695 Stallard G M. The Hausdorff dimension of Julia sets of meromorphic functions. *J London Math Soc*, 1994, 49: 281–295
- 696 Stallard G M. The Hausdorff dimension of Julia sets of entire functions II. *Math Proc Cambridge Philos Soc*, 1996, 119: 513–536
- 697 Stallard G M. The Hausdorff dimension of Julia sets of entire functions IV. *J London Math Soc*, 2000, 61: 471–488

- 698 Stallard G M. The Hausdorff dimension of Julia sets of hyperbolic meromorphic functions II. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2000, 20: 895–910
- 699 Stallard G M. Dimensions of Julia sets of transcendental meromorphic functions. In: *Transcendental dynamics and complex analysis*. London Math Soc Lecture Note Ser, vol. 348. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2008, 425–446
- 700 Stankewitz R, Sumi H. Dynamical properties and structure of Julia sets of postcritically bounded polynomial semigroups. *Trans Amer Math Soc*, 2011, 363: 5293–5319
- 701 Steinmetz N. Rational iteration, Complex analytic dynamical systems. De Gruyter Studies in Mathematics, vol. 16. Berlin: Walter de Gruyter & Co, 1993
- 702 Steinmetz N. On the dynamics of the McMullen family $R(z) = z^m + \lambda/z^\ell$. *Conform Geom Dyn*, 2006, 10: 159–183
- 703 van Strien S. Misiurewicz maps unfold generically (even if they are critically non-finite). *Fund Math*, 2000, 163: 39–54
- 704 van Strien S. One-dimensional dynamics in the new millennium. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2010, 27: 557–588
- 705 van Strien S. Milnor’s conjecture on monotonicity of topological entropy: results and questions. In: *Frontiers in complex dynamics*. Princeton Math Ser, vol. 51. Princeton: Princeton Univ Press, 2014, 323–337
- 706 van Strien S, Vargas E. Real bounds, ergodicity and negative Schwarzian for multimodal maps. *J Amer Math Soc*, 2004, 17: 749–782
- 707 Sullivan D. Conformal dynamical systems. In: *Geometric dynamics*. Lecture Notes in Math, vol. 1007. Berlin: Springer, 1983, 725–752
- 708 Sullivan D. Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I. Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains. *Ann of Math*, 1985, 122: 401–418
- 709 Sullivan D. Quasiconformal homeomorphisms and dynamics II. Structural stability implies hyperbolicity for Kleinian groups. *Acta Math*, 1985, 155: 243–260
- 710 Sullivan D. Bounds, quadratic differentials, and renormalization conjectures. In: *American Mathematical Society centennial publications*. Providence: AMS, 1992, 417–466
- 711 Sullivan D, Thurston W. Extending holomorphic motions. *Acta Math*, 1986, 157: 243–257
- 712 Sun D, Yang L. Quasirational dynamical systems. *Chinese Ann Math Ser A*, 1999, 20: 673–684
- 713 Sun Y, Yang C C. Buried points and Lakes of Wada continua. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2003, 9: 379–382
- 714 Świątek G. Rational rotation numbers for maps of the circle. *Comm Math Phys*, 1988, 119: 109–128
- 715 Tan L. Similarity between the Mandelbrot set and Julia sets. *Comm Math Phys*, 1990, 134: 587–617
- 716 Tan L. Matings of quadratic polynomials. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 1992, 12: 589–620
- 717 Tan L. Branched coverings and cubic Newton maps. *Fund Math*, 1997, 154: 207–260
- 718 Tan L. Hausdorff dimension of subsets of the parameter space for families of rational maps (A generalization of Shishikura’s result). *Nonlinearity*, 1998, 11: 233–246
- 719 Tan L. Local properties of the Mandelbrot set at parabolic points. In: *The Mandelbrot set, theme and variations*. London Math Soc Lecture Note Ser, vol. 274. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2000, 133–160
- 720 Tan L, ed. *The Mandelbrot set, theme and variations*. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 274. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2000
- 721 Tan L. On pinching deformations of rational maps. *Ann Sci École Norm Sup*, 2002, 35: 353–370
- 722 Tan L, Yin Y. Local connectivity of the Julia set for geometrically finite rational maps. *Sci China Ser A*, 1996, 39: 39–47
- 723 Tan L, Yin Y. The unicritical Branner-Hubbard conjecture. In: *Complex dynamics*. Wellesley: A K Peters, 2009, 215–227
- 724 Thurston D P. A positive characterization of rational maps. *Ann of Math*, 2020, 192: 1–46
- 725 Thurston W P. On the geometry and dynamics of iterated rational maps. With an appendix by D Schleicher. In: *Complex dynamics*. Wellesley: A K Peters, 2009, 3–137
- 726 Thurston W P. Entropy in dimension one. In: *Frontiers in complex dynamics*. Princeton Math Ser, vol. 51. Princeton: Princeton Univ Press, 2014, 339–384
- 727 Thurston W P, Baik H, Gao Y, et al. Degree- d -invariant laminations. In: *What’s next?—the mathematical legacy of William P Thurston*. Ann of Math Stud, vol. 205. Princeton: Princeton Univ Press, 2020, 259–325
- 728 Timorin V. The external boundary of M_2 . In: *Holomorphic dynamics and renormalization*. Fields Inst Commun, vol. 53. Providence: AMS, 2008, 225–266
- 729 Timorin V. Topological regluing of rational functions. *Invent Math*, 2010, 179: 461–506
- 730 Tiozzo G. Topological entropy of quadratic polynomials and dimension of sections of the Mandelbrot set. *Adv Math*, 2015, 273: 651–715
- 731 Tiozzo G. Continuity of core entropy of quadratic polynomials. *Invent Math*, 2016, 203: 891–921
- 732 Tresser C, Coulet P. Itérations d’endomorphismes et groupe de renormalisation. *C R Acad Sci Paris Sér A-B*, 1978, 287: A577–A580
- 733 Tsujii M. A simple proof for monotonicity of entropy in the quadratic family. *Ergodic Theory Dynam Systems*,

- 2000, 20: 925–933
- 734 Ueda T. Local structure of analytic transformations of two complex variables I. *J Math Kyoto Univ*, 1986, 26: 233–261
- 735 Urbański M. On the Hausdorff dimension of a Julia set with a rationally indifferent periodic point. *Studia Math*, 1991, 97: 167–188
- 736 Urbański M. Rational functions with no recurrent critical points. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 1994, 14: 391–414
- 737 Urbański M. Measures and dimensions in conformal dynamics. *Bull Amer Math Soc (NS)*, 2003, 40: 281–321
- 738 Urbański M, Zdunik A. Geometry and ergodic theory of non-hyperbolic exponential maps. *Trans Amer Math Soc*, 2007, 359: 3973–3997
- 739 Wang J, Yao X. On Julia limiting directions of meromorphic functions. *Israel J Math*, 2020, 238: 405–430
- 740 Wang S, Yang F, Zhang G, et al. Local connectivity of Julia sets of some rational maps with Siegel disks. *ArXiv: 2106.07450*, 2021
- 741 Wang X. A decomposition theorem for Herman maps. *Adv Math*, 2014, 267: 307–359
- 742 Wang X. Hyperbolic components and cubic polynomials. *Adv Math*, 2021, 379: No 107554, 42 pp
- 743 Wang X, Yin Y. Global topology of hyperbolic components: Cantor circle case. *Proc Lond Math Soc*, 2017, 115: 897–923
- 744 Wang X, Yin Y, Zeng J. Dynamics of Newton maps. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2023, 43: 1035–1080
- 745 Wang Y M, Yang F. Julia sets as buried Julia components. *Trans Amer Math Soc*, 2020, 373: 7287–7326
- 746 Wang Y F. Bounded domains of the Fatou set of an entire function. *Israel J Math*, 2001, 121: 55–60
- 747 Whyburn G T. *Analytic Topology*. AMS Colloquium Publications, vol. 28. New York: AMS, 1942
- 748 Wilkerson M. Subdivision rule constructions on critically preperiodic quadratic matings. *New York J Math*, 2016, 22: 1055–1084
- 749 Wilkerson M. Thurston’s algorithm and rational maps from quadratic polynomial matings. *Discrete Contin Dyn Syst Ser S*, 2019, 12: 2403–2433
- 750 Wittner B S. On the bifurcation loci of rational maps of degree two. PhD Thesis. New York: Cornell University, 1988
- 751 Wolff J. Sur l’itération des fonctions bornées. *C R Acad Sci Paris Sér I Math*, 1926, 182: 200–201
- 752 Wu S. Continuity of Julia sets. *Sci China Ser A*, 1999, 42: 281–285
- 753 Xiao Y, Qiu W. The rational maps $F_\lambda(z) = z^m + \lambda/z^d$ have no Herman rings. *Proc Indian Acad Sci Math Sci*, 2010, 120: 403–407
- 754 Xiao Y, Qiu W, Yin Y. On the dynamics of generalized McMullen maps. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2014, 34: 2093–2112
- 755 Xiao Y, Yang F. Singular perturbations of the unicritical polynomials with two parameters. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2017, 37: 1997–2016
- 756 Xuan Z. On conformal measures of parabolic meromorphic functions. *Discrete Contin Dyn Syst Ser B*, 2015, 20: 249–257
- 757 Yampolsky M. Complex bounds for renormalization of critical circle maps. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 1999, 19: 227–257
- 758 Yampolsky M. Hyperbolicity of renormalization of critical circle maps. *Publ Math Inst Hautes Études Sci*, 2003: 1–41
- 759 Yampolsky M, Zakeri S. Mating Siegel quadratic polynomials. *J Amer Math Soc*, 2001, 14: 25–78
- 760 Yang C, Li Y. Bounded Fatou components of transcendental entire functions with order less than 1/2. *Acta Math Sin (Engl Ser)*, 2015, 31: 647–658
- 761 Yang F. On the dynamics of a family of entire functions. *Acta Math Sin (Engl Ser)*, 2013, 29: 2047–2072
- 762 Yang F. Rational maps without Herman rings. *Proc Amer Math Soc*, 2017, 145: 1649–1659
- 763 Yang F. A criterion to generate carpet Julia sets. *Proc Amer Math Soc*, 2018, 146: 2129–2141
- 764 Yang F. Cantor Julia sets with Hausdorff dimension two. *Int Math Res Not*, 2021: 4994–5006
- 765 Yang F. Parabolic and near-parabolic renormalizations for local degree three. *ArXiv: 1510.00043v4*, 2021
- 766 Yang F. On the formulas of meromorphic functions with periodic Herman rings. *Math Ann*, 2022, 384: 989–1015
- 767 Yang F. Rational maps with smooth degenerate Herman rings. *ArXiv: 2207.06770*, 2022
- 768 Yang F. Julia sets with positive area and Mañé’s conjecture. Manuscript in preparation, 2024
- 769 Yang F, Zeng J. On the dynamics of a family of generated renormalization transformations. *J Math Anal Appl*, 2014, 413: 361–377
- 770 Yang J. Local connectivity of polynomial Julia sets at bounded type Siegel boundaries. *ArXiv: 2010.14003v4*, 2023
- 771 Yarrington B W. Local connectivity and Lebesgue measure of polynomial Julia sets. PhD Thesis. New York: State University of New York at Stony Brook, 1995
- 772 Ye H. Rational functions with identical measure of maximal entropy. *Adv Math*, 2015, 268: 373–395
- 773 Ye Z. Structural instability of exponential functions. *Trans Amer Math Soc*, 1994, 344: 379–389

- 774 Yin Y. On the Julia sets of quadratic rational maps. *Complex Variables Theory Appl*, 1992, 18: 141–147
- 775 Yin Y. Continuity of Julia sets of polynomials. *Acta Math Sinica*, 1995, 38: 99–102
- 776 Yin Y. On the Julia sets of semi-hyperbolic rational maps. *Chinese J Contemp Math*, 1999, 20: 469–476
- 777 Yin Y, Zhai Y. No invariant line fields on Cantor Julia sets. *Forum Math*, 2010, 22: 75–94
- 778 Yoccoz J-C. Conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation vérifie une condition diophantienne. *Ann Sci École Norm Sup*, 1984, 17: 333–359
- 779 Yoccoz J-C. Il n’y a pas de contre-exemple de Denjoy analytique. *C R Acad Sci Paris Sér I Math*, 1984, 298: 141–144
- 780 Yoccoz J-C. Linéarisation des germes de difféomorphismes holomorphes de $(\mathbf{C}, 0)$. *C R Acad Sci Paris Sér I Math*, 1988, 306: 55–58
- 781 Yoccoz J-C. On the local connectivity of the Mandelbrot set. Unpublished, 1990
- 782 Yoccoz J-C. Théorème de Siegel, nombres de Bruno et polynômes quadratiques. *Astérisqué*, 1995: 3–88
- 783 Yoccoz J-C. Analytic linearization of circle diffeomorphisms. In: *Dynamical systems and small divisors. Lecture Notes in Math*, vol. 1784. Berlin: Springer, 2002, 125–173
- 784 Zakeri S. Dynamics of cubic Siegel polynomials. *Comm Math Phys*, 1999, 206: 185–233
- 785 Zakeri S. Biaccessibility in quadratic Julia sets. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2000, 20: 1859–1883
- 786 Zakeri S. Old and new on quadratic Siegel disks. In: *A volume dedicated to Siavash Shahshahani on the occasion of his 60th birthday*, 2002, 133–158
- 787 Zakeri S. On Siegel disks of a class of entire maps. *Duke Math J*, 2010, 152: 481–532
- 788 Zeng J. Criterion for rays landing together. *Trans Amer Math Soc*, 2020, 373: 6479–6502
- 789 Zeng J, Su W. Quasisymmetric rigidity of Sierpiński carpets $F_{n,p}$. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2015, 35: 1658–1680
- 790 Zhai Y. Rigidity for rational maps with Cantor Julia sets. *Sci China Ser A*, 2008, 51: 79–92
- 791 Zhai Y. A generalized version of Branner-Hubbard conjecture for rational functions. *Acta Math Sin (Engl Ser)*, 2010, 26: 2199–2208
- 792 Zhai Y. On the dimensions of Cantor Julia sets of rational maps. *J Math Anal Appl*, 2013, 402: 772–780
- 793 Zhan G, Liao L. Area of non-escaping parameters of the sine family. *Houston J Math*, 2012, 38: 493–524
- 794 Zhang G. On the dynamics of $e^{2\pi i\theta} \sin(z)$. *Illinois J Math*, 2005, 49: 1171–1179
- 795 Zhang G. All bounded type Siegel disks of rational maps are quasi-disks. *Invent Math*, 2011, 185: 421–466
- 796 Zhang G. Polynomial Siegel disks are typically Jordan domains. *ArXiv: 1208.1881v3*, 2014
- 797 Zhang G. On PZ type Siegel disks of the sine family. *Ergodic Theory Dynam Systems*, 2016, 36: 973–1006
- 798 Zhang G. Jordan mating is always possible for polynomials. *ArXiv: 2208.10069*, 2022
- 799 Zhang G. Topological characterisation of rational maps with Siegel disks. *Math Proc Cambridge Philos Soc*, 2022, 172: 1–41
- 800 Zhang G, Jiang Y. Combinatorial characterization of sub-hyperbolic rational maps. *Adv Math*, 2009, 221: 1990–2018
- 801 Zhang G Y. Bifurcations of periodic points of holomorphic maps from \mathbf{C}^2 into \mathbf{C}^2 . *Proc London Math Soc*, 1999, 79: 353–380
- 802 Zhang R. On the cubic polynomial slice $Per_1(e^{2\pi i \frac{p}{q}})$. *ArXiv: 2211.12537*, 2022
- 803 Zhang S, Fu J, Shi X. Bounded type Siegel disks of a family of sine families. *J Math Anal Appl*, 2020, 488: Paper No 124041, 12 pp
- 804 Zhang S, Yang F. Area of the complement of the fast escaping sets of a family of entire functions. *Kodai Math J*, 2018, 41: 531–553
- 805 Zhang W, Ren F. Iterations of holomorphic self-maps of \mathbf{C}^N . *J Fudan Univ Natur Sci*, 1994, 33: 452–462
- 806 Zhang X. Cross-sections of the multicorns. *Proc Indian Acad Sci Math Sci*, 2019, 129: Paper No 28, 6 pp
- 807 Zheng J. Remarks on Herman rings of transcendental meromorphic functions. *Indian J Pure Appl Math*, 2000, 31: 747–751
- 808 Zheng J. Singularities and wandering domains in iteration of meromorphic functions. *Illinois J Math*, 2000, 44: 520–530
- 809 Zheng J. Singularities and limit functions in iteration of meromorphic functions. *J London Math Soc*, 2003, 67: 195–207
- 810 Zheng J. On multiply-connected Fatou components in iteration of meromorphic functions. *J Math Anal Appl*, 2006, 313: 24–37
- 811 Zhou J. The Julia set of a random iteration system. *Bull Austral Math Soc*, 2000, 62: 45–50
- 812 Zhou W, Ren F. The Julia sets of the random iteration of rational functions. *Chinese Sci Bull*, 1992, 37: 969–971
- 813 Zinsmeister M. Fleur de Leau-Fatou et dimension de Hausdorff. *C R Acad Sci Paris Sér I Math*, 1998, 326: 1227–1232
- 814 Zinsmeister M. Thermodynamic formalism and holomorphic dynamical systems. *SMF/AMS Texts, Monographs*, vol. 2. Providence: AMS; Paris: Société Mathématique de France, 2000

A brief introduction to one-dimensional complex dynamics

Fei Yang

Abstract Complex dynamics is a field about the iterative theory of complex analytic functions. In this paper, we briefly survey the history, basic theory and developments of one-dimensional complex dynamics.

Keywords complex dynamics, Julia sets, Fatou sets, Mandelbrot set, hyperbolic conjecture, renormalization, quasiconformal surgery

MSC(2020) 37F05, 37F10

doi: 10.1360/SSM-2023-XXXX