第一讲

石亚龙

1 引言

我们从微积分开始：对于一元连续函数 $f \in C^0(a,b)$，我们总能找到原函数 g，即 $g'(x) = f(x)$。例如任意取定一点 $x_0 \in (a,b)$，令 $g(x) := \int_{x_0}^x f(t)dt$ 即可。

问题: 多元函数是否也存在原函数？以 2 维为例，设 $U \subset \mathbb{R}^2$ 为非空开集，$f_1, f_2 \in C^\infty(U)$，是否存在 $F \in C^\infty(U)$ 使得

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = f_i, \quad i = 1,2\ ? \tag{1}$$

一般不对！ 如果存在这样的 F，那么根据二阶混合偏导数可以交换顺序，我们一定有

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}.$$

所以该问题有解的一个必要条件是

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}. \tag{2}$$

该条件是否充分？我们先看两个例子：

例 1 假设 $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$，并且

$$f_1(x_1,x_2) = -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad f_2(x_1,x_2) = \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2},$$

则有

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2+x_2^2)^2}.$$

Claim: 不可能存在 $F \in C^\infty(U)$ 使得 $\frac{\partial F}{\partial x_i} = f_i, \quad i = 1,2$。

事实上，如果存在这样的 F，我们用两种方法计算 $\int_0^{2\pi} \frac{d}{d\theta} F(\cos\theta, \sin\theta) d\theta$:

一方面，由于 $F(\cos\theta,\sin\theta)$ 是关于 θ 的光滑函数，由 *Newton-Leibniz* 公式可得

$$\int_0^{2\pi} \frac{d}{d\theta} F(\cos\theta,\sin\theta)d\theta = F(\cos\theta,\sin\theta)\big|_0^{2\pi} = F(1,0) - F(1,0) = 0.$$

另一方面，直接计算，我们有

$$\frac{d}{d\theta}F(\cos\theta,\sin\theta) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(-\sin\theta) + \frac{\partial F}{\partial x_2}\cos\theta = \big(-x_2 f_1 + x_1 f_2\big)(\cos\theta,\sin\theta) = 1,$$

进而得到 $\int_0^{2\pi} \frac{d}{d\theta}F(\cos\theta,\sin\theta)d\theta = 2\pi \neq 0$，从而导致矛盾。

例 2 假设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是所谓的“星形区域”（*star-shaped*），即存在 $p_0 \in U$ 使得对任意的 $p \in U$，连接 p 与 p_0 的直线段都在 U 中，即 $\big\{tp + (1-t)p_0 \mid t \in [0,1]\big\} \subset U$[1]。则有如下结论：

[1] 此时我们称 U 关于 p_0 是星形的。

命题 1 假设 $U \subset \mathbb{R}^2$ 为星形区域，并且 $f_1, f_2 \in C^\infty(U)$ 满足(2)，则一定存在 $F \in C^\infty(U)$ 满足(1)。

证明 不妨假设 U 关于 O 是星形的。如果方程(1)有解，则 F 加上一个常数也是解，所以不妨设 $F(O) = 0$。由 Newton-Leibniz 公式，得到

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} F(tx_1, tx_2) dt \\ &= \int_0^1 x_1 f_1(tx_1, tx_2) + x_2 f_2(tx_1, tx_2) dt. \end{aligned}$$

反过来，我们用上式作为 F 的定义，则它良好定义（由区域关于 O 星形，(tx_1, tx_2) 都在 f_i 的定义域中)，存在任意阶连续偏导数，并且 (利用(2))

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, x_2) &= \int_0^1 f_1(tx_1, tx_2) + tx_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(tx_1, tx_2) + tx_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(tx_1, tx_2)\, dt \\ &= \int_0^1 f_1(tx_1, tx_2) + tx_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(tx_1, tx_2) + tx_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(tx_1, tx_2)\, dt \\ &= \int_0^1 f_1(tx_1, tx_2) + t \frac{d}{dt} f_1(tx_1, tx_2)\, dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt}\Big(t f_1(tx_1, tx_2)\Big) dt = f_1(tx_1, tx_2). \end{aligned}$$

类似有 $\frac{\partial F}{\partial x_2} = f_2$。 □

这两个例子说明：必要条件(2)是否充分，依赖于区域 U 的“形状”！我们换一个观点：可以利用(2)是否充分这件事来定义一个区域 U 的一个“不变量”：定义两个线性映射：

$$\begin{aligned} grad &: C^\infty(U, \mathbb{R}) \to C^\infty(U, \mathbb{R}^2) \quad grad(\phi) := (\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2}); \\ rot &: C^\infty(U, \mathbb{R}^2) \to C^\infty(U, \mathbb{R}) \quad rot(\phi_1, \phi_2) := -\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1}. \end{aligned}$$

易见 $rot \circ grad(\phi) = 0$，从而 $Im\, grad \subset Ker\, rot$。方程(1)是说 $(f_1, f_2) \in Im\, grad$，而条件(2)是说 $(f_1, f_2) \in Ker\, rot$。所以问条件(2)是否充分，等价于问是否 $Im\, grad = Ker\, rot$。定义

$$H^1(U) := Ker\, rot \big/ Im\, grad. \tag{3}$$

所以区域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 满足 $H^1(U) = 0$ 当且仅当在 U 上(2)也是方程(1)有解的充分条件。特别的，由命题 1，星形区域总满足 $H^1(U) = 0$，而 $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}) \neq 0$。我们将会看到：在很多时候 $H^1(U) = 0$ 是有限维线性空间，并且其维数就是“洞的个数”。

我们还可以定义 H^0：假设 $U \subset \mathbb{R}^2$ 是非空开集，定义

$$grad : C^\infty(U, \mathbb{R}) \to C^\infty(U, \mathbb{R}^2) \quad grad(\phi) := (\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2}),$$

以及 $H^0(U) := Ker\, grad$。显然，常值函数总在 $Ker\, grad$ 中。

命题 2 假设 $U \subset \mathbb{R}^2$ 是非空开集，则 $H^0(U) \cong \mathbb{R}$ 当且仅当 U 连通。[2]

证明 如果 $grad(f) = 0$，$f \in C^\infty(U)$，则 f 是局部常值的：任一点 $x \in U$，都存在开球 $x \in V_x \subset U$ 使得 $f|_{V_x} \equiv f(x)$。所以集合 $F := \{x \in U \mid f(x) = f(x_0)\} = f^{-1}\big(f(x_0)\big)$ 是 U 的开子集。而由 f 的连续性，它

[2]不难看出该结果适用于一般的 $\mathbb{R}^n$ 中的非空开集。

也是 U 的闭子集。如果 U 连通，则必有 $F=U$，从而 $f\equiv f(x_0)$。于是 $Ker\ grad$ 中只有常值函数，从而 $H^0(U)\cong\mathbb{R}$。

另一方面，如果 U 不连通，可找到非空开集 $V,W\subset U$，$V\cap W=\emptyset$，且 $V\cup W=U$。考虑函数 $f\in C^\infty(U)$，$f|_V\equiv 1, f|_W\equiv 0$，则 f 不是 U 上常值函数，但 $f\in Ker\ grad$。于是 $\dim H^0(U)>1$。 □

下面看 $\mathbb{R}^3$ 中的非空开集 U：定义

$$
\begin{aligned}
grad &: C^\infty(U,\mathbb{R})\to C^\infty(U,\mathbb{R}^3) \quad grad(\phi):=(\frac{\partial\phi}{\partial x_1},\frac{\partial\phi}{\partial x_2},\frac{\partial\phi}{\partial x_3}),\\
rot &: C^\infty(U,\mathbb{R}^3)\to C^\infty(U,\mathbb{R}^3) \quad rot(\phi_1,\phi_2,\phi_3):=(\frac{\partial\phi_3}{\partial x_2}-\frac{\partial\phi_2}{\partial x_3},\frac{\partial\phi_1}{\partial x_3}-\frac{\partial\phi_3}{\partial x_1},\frac{\partial\phi_2}{\partial x_1}-\frac{\partial\phi_1}{\partial x_2}),\\
div &: C^\infty(U,\mathbb{R}^3)\to C^\infty(U,\mathbb{R}) \quad div(\phi_1,\phi_2,\phi_3):=\frac{\partial\phi_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\phi_2}{\partial x_2}+\frac{\partial\phi_3}{\partial x_3}.
\end{aligned}
$$

容易验证：$rot\circ grad=0$, $div\circ rot=0$。定义

$$H^0(U):=Ker(grad),\quad H^1(U):=Ker(rot)\Big/Im(grad),\quad H^2(U):=Ker(div)\Big/Im(rot).$$

命题 3 设 $U\subset\mathbb{R}^3$ 为星形区域，则有 $H^0(U)\cong\mathbb{R}, H^1(U)=0, H^2(U)=0$。

证明 易见命题 1和命题 2的证明适用于 n 维，于是在这里得到 $H^0(U)\cong\mathbb{R}$ 和 $H^1(U)=0$。这里略去细节。下面证明 $H^2(U)=0$。

不妨设 U 关于原点 O 是星形的，$F=(f_1,f_2,f_3)\in C^\infty(U,\mathbb{R}^3)$ 满足 $div(F)=\sum_i\frac{\partial f_i}{\partial x_i}=0$。要找到 $G=(g_1,g_2,g_3)\in C^\infty(U,\mathbb{R}^3)$ 使得 $rot(G)=F$。令[3]

$$G(x)=\int_0^1 F(tx)\times(tx)\,dt$$

即可。 □

练习 1 验证：当 $div(F)=0$ 时，总有 $rot(F(tx)\times tx)=\frac{d}{dt}(t^2F(tx))$，从而 $rot(G)=F$。

例 3 设 $U=\mathbb{R}^3\setminus\{O\}$，则我们已经看到 $H^0(U)=\mathbb{R}$。我们断言 $H^2(U)\neq 0$。事实上，考虑如下的

$$F(x):=\Big(\frac{x_1}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^\alpha},\frac{x_2}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^\alpha},\frac{x_3}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^\alpha}\Big)\in C^\infty(U,\mathbb{R}^3),$$

其中 $\alpha>0$ 是待定的常数。直接计算得到 $div(F)=\frac{3-2\alpha}{\|x\|^{2\alpha}}$，于是当 $\alpha=\frac{3}{2}$ 时即有 $div(F)=0$。我们下面都取定 $\alpha=\frac{3}{2}$。

Claim: 不存在 $G=(g_1,g_2,g_3)\in C^\infty(U,\mathbb{R}^3)$ 使得 $rot(G)=F$。

我们用两种方式计算单位球面上的第二型曲面积分 $\int_{S^2}F\cdot\mathbf{n}\,d\sigma=\int_{S^2}f_1dydz+f_2dzdx+f_3dxdy$。

一方面，在单位球面上，$\mathbf{n}=(x_1,x_2,x_3)$，于是

$$\int_{S^2}F\cdot\mathbf{n}\,d\sigma=\int_{S^2}\frac{\|x\|^2}{\|x\|^3}d\sigma=\int_{S^2}d\sigma=4\pi.$$

另一方面，将 S^2 分为上半球面 Σ_+ 和下半球面 Σ_-。它们的边界相同，但定向相反。利用 *Stokes* 公式，得到

$$\int_{\Sigma_+}F\cdot\mathbf{n}\,d\sigma=\int_{\Sigma_+}rot(G)\cdot\mathbf{n}\,d\sigma=\int_{\partial\Sigma_+}g_1dx_1+g_2dx_2+g_3dx_3,$$

[3] 更一般的做法以及背后的动机后面会讲，此处不去细究。

$$\int_{\Sigma_-} F\cdot\mathbf{n}\,d\sigma=\int_{\Sigma_-} rot(G)\cdot\mathbf{n}\,d\sigma=\int_{\partial\Sigma_-} g_1dx_1+g_2dx_2+g_3dx_3,$$

从而 $\int_{S^2} F\cdot\mathbf{n}\,d\sigma=\int_{\Sigma_+} F\cdot\mathbf{n}\,d\sigma+\int_{\Sigma_-} F\cdot\mathbf{n}\,d\sigma=0$，矛盾！这说明 $F\in Ker(div)\setminus Im(rot)$，从而 $H^2(U)\neq 0$。

一个自然的问题是：是否也有 $H^1(U)\neq 0$？事实上 $H^1(\mathbb{R}^3\setminus\{O\})=0$。我们这里给出一个不严谨的解释，严格的讨论留待以后。

假设 $F\in C^\infty(U,\mathbb{R}^3)$ 满足 $rot(F)=0$，即 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}=\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ 对任意 $i,j=1,2,3$ 成立。任意取定一点 $p\in U$，定义 $G(x):=\int_p^x f_1dx_1+f_2dx_2+f_3dx_3$，该记号表示任取一条 U 中从 p 到 x 的分段光滑曲线，做第二型曲线积分。该函数是 *well-defined*：假如 C_1 和 C_2 是两条这样的曲线，取一个 U 中曲面 Σ 以 $C_1\cup(-C_2)$ 为边界，其中 $-C_2$ 为反定向的 C_2。则由 *Stokes* 公式 $\int_{C_1}F\cdot d\mathbf{l}-\int_{C_2}F\cdot d\mathbf{l}=\oint_{\partial\Sigma}F\cdot d\mathbf{l}=\int_\Sigma rot(F)\cdot\mathbf{n}\,d\sigma=0$。利用合适的分段光滑曲线，不难验证 $\frac{\partial G}{\partial x_i}=f_i, i=1,2,3$，即 $grad(G)=F$。从而 $Ker(rot)=Im(grad)$。

例 4 考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的坐标平面 $x_3=0$ 中的单位圆周 $S=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_3=0,x_1^2+x_2^2=1\}$，令 $U=\mathbb{R}^3\setminus S$。则 $H^1(U)\neq 0$。

练习 2 令 U 同上。考虑 $F\in C^\infty(U,\mathbb{R}^3)$:

$$F(x):=\Big(\frac{-2x_1x_3}{x_3^2+(x_1^2+x_2^2-1)^2},\frac{-2x_2x_3}{x_3^2+(x_1^2+x_2^2-1)^2},\frac{x_1^2+x_2^2-1}{x_3^2+(x_1^2+x_2^2-1)^2}\Big).$$

验证 $rot(F)=0$，并证明：不存在 $G\in C^\infty(U,\mathbb{R})$ 使得 $grad(G)=F$。（提示：考虑在闭曲线 $\gamma(t)=(\sqrt{1+\cos t},0,\sin t)$ 上的第二型曲线积分。）

练习 3 令 $V=\mathbb{R}^3\setminus\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_3=0,x_1^2+x_2^2\geq 1\}$。令 F 同上，则 $F\in C^\infty(V,\mathbb{R}^3)$ 且 $rot(F)=0$。求 $G\in C^\infty(V,\mathbb{R})$，使得 $F=grad(G)$ 且 $G(O)=0$。

问题：如何计算这些 $H^i(U)$？如何推广到高维？

核心的工具是微分形式，对应的 H^i 称为 de Rham 上同调，这是本课程的中心内容。

在课程的第一部分，我们将系统地介绍欧氏空间开集中的微分形式与 de Rham 上同调。特别地，我们将介绍一些计算工具，例如 Mayer-Vieroris 序列、同伦不变性等等。

在第二部分中，我们将微分形式推广到 “弯曲” 的空间——微分流形上去，并在微分流形的框架下讨论 de Rham 上同调及其应用。

微分形式不仅在几何、拓扑中有着广泛的应用，在物理中也有很多应用。例如在理论力学中，Hamilton 力学从数学上看就是一个流形余切丛上一个 “非退化闭 2-形式” 的几何（symplectic geometry）。而电磁学中的 Maxwell 方程组如果用一个合适的 2-形式 F 来表述，则可以简单地写成 $dF=0$ 和 $d*F=0$，这也是现代理论物理中 Yang-Mills 理论（规范场论）的开端。在课程的最后部分，我们会简要地介绍规范场的数学理论——纤维丛的联络、曲率和示性类。

一些相关的参考书：

- I. Madsen and J. Tornehave *“From Calculus to Cohomology: De Rham cohomology and characteristic classes”*, 剑桥大学出版社。国内清华大学出版社曾影印出版。这是本课程主要参考书。
- 梅加强《*流形与几何初步*》，科学出版社。本课程的内容几乎完全包含在梅老师这本书里。与同名研究生课相比，本课程内容侧重点在梅老师书的第四章，而梅老师的课侧重前两章和第三章的前一半。
- J. Milnor *“Topology from the Differentiable Viewpoint”*，普林斯顿大学出版社。中译本《从微分观点看拓扑》。数学界的经典名著，任何对几何、拓扑感兴趣的学生都不应错过。内容几乎与本课程互补，更侧重微分学的工具，深度与本课程相仿。
- R. Bott and L. Tu *“Differential Forms in Algebraic Topology”*, Springer。另一本经典名著，也是系统地利用微分形式研究代数拓扑学和示性类，但是深度远高于本课程。

2 外代数

假设 V 是一个 n-维的实线性空间。回忆：V 的对偶空间 V^* 是 V 上的线性函数（即 V 到 $\mathbb{R}$ 的线性映射）全体构成的线性空间。假设 $e_1,\ldots,e_n$ 是 V 的一组基，则可以定义"对偶基" $e_i^*, i=1,\ldots,n$ 如下：令 $e_i^*(e_j)=\delta_{ij}$，并做线性扩充。等价地，若 $v=\sum_i c_i e_i$，则 $e_i^*(v):=c_i$。

Claim: $\{e_i^*\}_{i=1}^n$ 是 V^* 的一组基，从而 $\dim V^*=\dim V=n$。

事实上，假设 $f\in V^*$，令 $\lambda_i:=f(e_i), i=1,\ldots,n$，则有 $f(v)=(\sum_i\lambda_i e_i^*)(v), \forall v\in V$。又，如果存在 $\lambda_i\in\mathbb{R}$ 使得 $\sum_i\lambda_i e_i^*=0\in V^*$，则 $\lambda_i=(\sum_i\lambda_i e_i^*)(e_i)=0, \forall i=1,\ldots,n$，从而 $\{e_i^*\}_{i=1}^n$ 线性无关。

定义 1 一个映射 $\omega: V^k=V\times V\times\cdots\times V\to\mathbb{R}$ 称为 k-线性的，如果它对每一个变量都是线性的。一个 k-线性映射 $\omega: V^k\to\mathbb{R}$ 称为交错的（*alternating*），如果对任何 $(v_1,\ldots,v_k)\in V^k$，只要有某个 $i\neq j$ 使得 $v_i=v_j$，就有 $\omega(v_1,\ldots,v_k)=0$。V 上交错 k-线性映射的全体构成的集合记为 $Alt^k(V)$。容易看出它也是一个实线性空间。注意 $Alt^1(V)=V^*$。

易见当 $k>n$ 时必有 $Alt^k(V)=0$：任取 V 的一组基 $\{e_i\}$，可将 v_i 唯一地写为 $v_i=\sum_j c_{ij}e_j$，于是

$$\omega(v_1,\ldots,v_k)=\sum_{j_1,\ldots,j_k} c_{1j_1}\cdots c_{k,j_k}\omega(e_{j_1},\ldots,e_{j_k}).$$

若 $k>n$ 且 $\omega\in Alt^k(V)$，则 $e_{j_1},\ldots,e_{j_k}$ 中必有相同的，于是 $\omega(e_{j_1},\ldots,e_{j_k})=0$，从而 $\omega(v_1,\ldots,v_k)=0$。

为陈述下一条基本性质，我们回忆：如果 S_k 为 k-个元素的对称群（置换群），则任一元素 $\sigma\in S_k$ 可写为一些对换 (i,j) 的乘积（复合），如果对换的个数是偶数个，则称 σ 为偶置换，否则称为奇置换。对偶置换，定义 $sgn(\sigma)=1$，对奇置换，定义 $sgn(\sigma)=-1$。

引理 1 假设 $\omega\in Alt^k(V)$，$\sigma\in S_k$，则有

$$\omega(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(k)})=sgn(\sigma)\omega(v_1,\ldots,v_k).$$

证明 只需要对 $\sigma=(i,j)$ 证明即可，这里 $1\leq i<j\leq k$。即，只要证明 $\omega(v_1,\ldots,v_j,\ldots,v_i,\ldots,v_k)=-\omega(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_j,\ldots,v_k)$。由于 $\omega\in Alt^k(V)$，有

$$\begin{aligned}0 &= \omega(v_1,\ldots,v_i+v_j,\ldots,v_i+v_j,\ldots,v_k)\\ &= 0+\omega(v_1,\ldots,v_j,\ldots,v_i,\ldots,v_k)+\omega(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_j,\ldots,v_k)+0.\end{aligned}$$

□

显然，该性质可以作为交错 k-线性函数的等价定义。

例 5 假设 $V=\mathbb{R}^n$，其元素写为列向量。令 $\det: V^n\to\mathbb{R}$

$$\det(v_1,\ldots,v_n):=\det(\xi_{ij}),$$

其中 $v_j=(\xi_{1j},\ldots,\xi_{nj})^T$。则 $\det\in Alt^n(\mathbb{R}^n)$。我们后面将看到：这其实是最基本而重要的例子。

基本运算：外积 $\wedge: Alt^p(V)\times Alt^q(V)\to Alt^{p+q}(V)$

为了定义外积运算，我们先讨论一类特殊的置换 $\sigma\in S_k$: 设 $p+q=k$

定义 2 称 $\sigma\in S_k$ 为一个 *"(p,q)-shuffle"*（几何直观：洗牌），如果它满足

$$\sigma(1)<\sigma(2)<\cdots<\sigma(p),\quad \sigma(p+1)<\sigma(p+2)<\cdots<\sigma(p+q).$$

(p,q)-shuffle 的全体记为 $S(p,q)$。

定义 3 (外积（exterior product 或 wedge product）) 设 $\omega_1 \in Alt^p(V), \omega_2 \in Alt^q(V)$，定义 $\omega_1 \wedge \omega_2$ 为：

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(v_1, \ldots, v_{p+q}) := \sum_{\sigma \in S(p,q)} sgn(\sigma)\omega_1(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)})\omega_2(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}).$$

显然 $\omega_1 \wedge \omega_2$ 是一个 $p+q$-线性函数，进一步，我们还有：

引理 2 若 $\omega_1 \in Alt^p(V), \omega_2 \in Alt^q(V)$，则 $\omega_1 \wedge \omega_2 \in Alt^{p+q}(V)$。

证明 我们首先说明：当 $v_1 = v_2$ 时 $(\omega_1 \wedge \omega_2)(v_1, v_2, \ldots, v_{p+q}) = 0$。为此，注意到：对于 (p,q)-shuffle σ，如果 1,2 都在 $\{\sigma(1), \ldots, \sigma(p)\}$ 中或都在 $\{\sigma(p+1), \ldots, \sigma(p+q)\}$ 中，则由于 ω_1, ω_2 都是交错的，有 $\omega_1(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)})\omega_2(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}) = 0$。所以只需考虑两类 (p,q)-shuffle:

$$\sigma \in S_{1,2} \iff \sigma \in S(p,q), \sigma(1) = 1, \sigma(p+1) = 2;$$

$$\sigma \in S_{2,1} \iff \sigma \in S(p,q), \sigma(1) = 2, \sigma(p+1) = 1.$$

令 $\tau = (1,2) \in S_k$，则通过与 τ 复合，可将 $S_{1,2}$ 1-1 地映到 $S_{2,1}$。于是有

$$\begin{aligned}
(\omega_1 \wedge \omega_2)(v_1, \ldots, v_{p+q}) &= \sum_{\sigma \in S(p,q)} sgn(\sigma)\omega_1(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)})\omega_2(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_{1,2}} sgn(\sigma)\omega_1(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)})\omega_2(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}) \\
&\quad + \sum_{\sigma \in S_{2,1}} sgn(\sigma)\omega_1(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)})\omega_2(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_{1,2}} sgn(\sigma)\omega_1(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)})\omega_2(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}) \\
&\quad + \sum_{\sigma \in S_{1,2}} sgn(\tau \circ \sigma)\omega_1(v_{\tau\circ\sigma(1)}, \ldots, v_{\tau\circ\sigma(p)})\omega_2(v_{\tau\circ\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\tau\circ\sigma(p+q)}).
\end{aligned}$$

注意到 $sgn(\tau \circ \sigma) = -sgn(\sigma)$，并且当 $\sigma \in S_{1,2}$ 时，$\tau \circ \sigma(1) = \tau(1) = 2$，$\tau \circ \sigma(p+1) = \tau(2) = 1$，而当 $i \notin \{1, p+1\}$ 时，$\tau \circ \sigma(i) = \sigma(i)$。注意此时 $v_1 = v_2$，所以最后一式的上下两行每一项都差一个负号，于是其和为 0。

容易看到：几乎同样的论证说明只要对某个 $i = 1, \ldots, p+q-1$ 有 $v_i = v_{i+1}$，则必有 $(\omega_1 \wedge \omega_2)(v_1, \ldots, v_{p+q}) = 0$。由下一引理即可说明 $\omega_1 \wedge \omega_2 \in Alt^{p+q}(V)$。 □

引理 3 一个 k-线性函数 ω 是交错的，当且仅当对任何满足 $v_i = v_{i+1}, i = 1, \ldots, k-1$ 的 k-元向量组 $(v_1, \ldots, v_k)$ 都有 $\omega(v_1, \ldots, v_k) = 0$。

证明 由引理 1的证明可知：

$$\omega(v_1, \ldots, v_{i+1}, v_i, \ldots, v_k) = -\omega(v_1, \ldots, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k).$$

注意到任何对换 (i,j) 都可以写成奇数个形如 $(s, s+1)$ 的对换的乘积：

$$(i,j) = (i,i+1)(i+1,i+2)\ldots(j-1,j)(j-2,j-1)\ldots(i+1,i+2)(i,i+1).$$

于是可知

$$\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = sgn(\sigma)\omega(v_1, \ldots, v_k).$$

从而 $\omega \in Alt^k(V)$。 □

外积有一些简单的性质，可以由定义很容易看出来：

- $(\omega_1+\omega_2)\wedge\omega_3=\omega_1\wedge\omega_3+\omega_2\wedge\omega_3$;
- $(\lambda\omega_1)\wedge\omega_2=\lambda(\omega_1\wedge\omega_2)=\omega_1\wedge(\lambda\omega_2),\lambda\in\mathbb{R}$;
- $\omega_3\wedge(\omega_1+\omega_2)=\omega_3\wedge\omega_1+\omega_3\wedge\omega_2$.

下面一条性质非常重要:

引理 4 (反交换律) 设 $\omega_1\in Alt^p(V),\omega_2\in Alt^q(V)$，则有 $\omega_2\wedge\omega_1=(-1)^{pq}\omega_1\wedge\omega_2$。

证明 定义 $\tau\in S_{p+q}$ 如下:

$$\tau(1)=p+1,\tau(2)=p+2,\dots,\tau(q)=p+q;$$
$$\tau(q+1)=1,\tau(q+2)=2,\dots,\tau(p+q)=p.$$

则有 $sgn(\tau)=(-1)^{pq}$（最简单的方式是数“逆序数”）。易见 $\sigma\mapsto\sigma\circ\tau$ 是 $S(p,q)$ 到 $S(q,p)$ 的 1-1 对应。于是有

$$\omega_2(v_{\sigma\circ\tau(1)},\dots,v_{\sigma\circ\tau(q)})=\omega_2(v_{\sigma(p+1)},\dots,v_{\sigma(p+q)}),$$
$$\omega_1(v_{\sigma\circ\tau(q+1)},\dots,v_{\sigma\circ\tau(q+p)})=\omega_1(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(p)}),$$

从而

$$\begin{aligned}(\omega_2\wedge\omega_1)(v_1,\dots,v_{p+q}) &= \sum_{\tilde\sigma\in S(q,p)} sgn(\tilde\sigma)\omega_2(v_{\tilde\sigma(1)},\dots,v_{\tilde\sigma(q)})\omega_1(v_{\tilde\sigma(q+1)},\dots,v_{\tilde\sigma(q+p)})\\ &= \sum_{\sigma\in S(p,q)} sgn(\sigma\circ\tau)\omega_2(v_{\sigma\circ\tau(1)},\dots,v_{\sigma\circ\tau(q)})\omega_1(v_{\sigma\circ\tau(q+1)},\dots,v_{\sigma\circ\tau(q+p)})\\ &= (-1)^{pq}\sum_{\sigma\in S(p,q)} sgn(\sigma)\omega_1(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(p)})\omega_2(v_{\sigma(p+1)},\dots,v_{\sigma(p+q)})\\ &= (-1)^{pq}(\omega_1\wedge\omega_2)(v_1,\dots,v_{p+q}).\end{aligned}$$

即 $\omega_2\wedge\omega_1=(-1)^{pq}\omega_1\wedge\omega_2$。 □

引理 5 (结合律) 设 $\omega_1\in Alt^p(V),\omega_2\in Alt^q(V),\omega_3\in Alt^r(V)$，则有

$$(\omega_1\wedge\omega_2)\wedge\omega_3=\omega_1\wedge(\omega_2\wedge\omega_3).$$

证明 与前面的 (p,q)-shuffle 类似，我们引入 (p,q,r)-shuffle: $\sigma\in S(p,q,r)\subset S_{p+q+r}$ 当且仅当

$$\begin{aligned}\sigma(1) &<\dots< \sigma(p),\\ \sigma(p+1) &<\dots< \sigma(p+q),\\ \sigma(p+q+1) &<\dots< \sigma(p+q+r).\end{aligned}$$

考虑 $S(p,q,r)$ 的子集: $S(\bar p,q,r)$ 表示 $S(p,q,r)$ 中在 $\{1,\dots,p\}$ 上为恒同的元素构成的集合，$S(p,q,\bar r)$ 表示 $S(p,q,r)$ 中在 $\{p+q+1,\dots,p+q+r\}$ 上为恒同的元素构成的集合。易见存在双射:

$$\begin{aligned}S(p,q+r)\times S(\bar p,q,r) &\to S(p,q,r), \quad (\sigma,\tau)\mapsto\sigma\circ\tau;\\ S(p+q,r)\times S(p,q,\bar r) &\to S(p,q,r), \quad (\sigma,\tau)\mapsto\sigma\circ\tau.\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}\Big(\omega_1\wedge(\omega_2\wedge\omega_3)\Big)(v_1,\dots,v_{p+q+r}) &= \sum_{\sigma\in S(p,q+r)} sgn(\sigma)\omega_1(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(p)})(\omega_2\wedge\omega_3)(v_{\sigma(p+1)},\dots,v_{\sigma(p+q+r)})\\ &= \sum_{\sigma\in S(p,q+r)} sgn(\sigma)\sum_{\tau\in S(\bar p,q,r)} sgn(\tau)\omega_1(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(p)})\\ &\quad\cdot\omega_2(v_{\sigma\tau(p+1)},\dots,v_{\sigma\tau(p+q)})\omega_3(v_{\sigma\tau(p+q+1)},\dots,v_{\sigma\tau(p+q+r)})\\ &= \sum_{u\in S(p,q,r)} sgn(u)\omega_1(v_{u(1)},\dots,v_{u(p)})\omega_2(v_{u(p+1)},\dots,v_{u(p+q)})\\ &\quad\cdot\omega_3(v_{u(p+q+1)},\dots,v_{u(p+q+r)}).\end{aligned}$$

同样的方法可得

$$\begin{aligned}\Big((\omega_1\wedge\omega_2)\wedge\omega_3\Big)(v_1,\dots,v_{p+q+r}) &= \sum_{u\in S(p,q,r)} sgn(u)\omega_1(v_{u(1)},\dots,v_{u(p)})\omega_2(v_{u(p+1)},\dots,v_{u(p+q)})\\ &\quad\cdot\omega_3(v_{u(p+q+1)},\dots,v_{u(p+q+r)}).\end{aligned}$$

从而 $(\omega_1\wedge\omega_2)\wedge\omega_3=\omega_1\wedge(\omega_2\wedge\omega_3)$. □

由结合律，在定义多个交错线性函数外积的时候可以不必区分顺序。

下面我们来仔细分析 $Alt^k(V)$ 的结构。首先考虑 k 个线性函数的外积：

引理 6 设 $\omega_1,\dots,\omega_k\in Alt^1(V)=V^*$，则对任何 $(v_1,\dots,v_k)\in V^k$，都有

$$(\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_k)(v_1,\dots,v_k)=\det(\omega_i(v_j)).$$

证明 我们用数学归纳法证明。首先 $k=2$ 时，由定义：

$$\omega_1\wedge\omega_2(v_1,v_2)=\omega_1(v_1)\omega_2(v_2)-\omega_1(v_2)\omega_2(v_1)=\det(\omega_i(v_j)).$$

假设 $k=p-1$ 时结论成立。现在 $k=p$ 时

$$\begin{aligned}\omega_1\wedge(\omega_2\wedge\cdots\wedge\omega_p)(v_1,\dots,v_p) &= \sum_{\sigma\in S(1,p-1)}\omega_1(v_{\sigma(1)})(\omega_2\wedge\cdots\wedge\omega_p)(v_{\sigma(2)},\dots,v_{\sigma(p)})\\ &= \sum_{j=1}^{p}(-1)^{j+1}\omega_1(v_j)(\omega_2\wedge\cdots\wedge\omega_p)(v_1,\dots,\hat{v}_j,\dots,v_p).\end{aligned}$$

由归纳假设，$(\omega_2\wedge\cdots\wedge\omega_p)(v_1,\dots,\hat{v}_j,\dots,v_p)$ 可以表示为一个行列式——恰好是 $\det(\omega_i(v_j))$ 关于第 j 列展开的余子式。于是根据行列式的展开性质，右端等于 $\det(\omega_i(v_j))$。 □

作为应用，我们有

引理 7 设 $\omega_1,\dots,\omega_k\in Alt^1(V)=V^*$，则 $\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_k\neq 0$ 当且仅当 $\omega_1,\dots,\omega_k$ 线性无关。

证明 假设 $\omega_1,\dots,\omega_k$ 线性相关且不全为 0，可以不妨设 $\omega_k=\sum_{i=1}^{k-1}c_i\omega_i$，于是

$$\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_k=\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_{k-1}\wedge(\sum_{i=1}^{k-1}c_i\omega_i)=0.$$

如果 $\omega_1,\dots,\omega_k$ 线性无关，可以扩充为 V^* 的一组基，取 V 中的对偶基 $\{v_i\}$，则有

$$\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_k(v_1,\dots,v_k)=\det(\delta_{ij})=1\neq 0.$$

□