第二讲

石亚龙

1 回顾

假设 V 是一个 n-维的实线性空间。一个 k-线性映射 $\omega: V^k \to \mathbb{R}$ 称为交错的，（记为 $\omega \in Alt^k(V)$）如果对任何 $(v_1, \ldots, v_k) \in V^k$，只要有某个 $i \neq j$ 使得 $v_i = v_j$，就有 $\omega(v_1, \ldots, v_k) = 0$。或者等价地，对任何 $\sigma \in S_k$，有 $\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = sgn(\sigma)\omega(v_1, \ldots, v_k)$. 我们定义了外积 $\wedge: Alt^p(V) \times Alt^q(V) \to Alt^{p+q}(V)$

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(v_1, \ldots, v_{p+q}) := \sum_{\sigma \in S(p,q)} sgn(\sigma)\omega_1(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)})\omega_2(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}).$$

上次我们也证明了反交换律：$\omega_2 \wedge \omega_1 = (-1)^{pq}\omega_1 \wedge \omega_2$。一个特别的情形是 $p = 1$，此时若 $\sigma \in S(1,q)$ 满足 $\sigma(1) = k$, 则有 $\sigma(2) = 1, \ldots, \sigma(k) = k-1, \sigma(k+1) = k+1, \ldots, \sigma(1+q) = 1+q$。易见 $sgn(\sigma) = (-1)^{k-1}$，从而

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(v_1, \ldots, v_{1+q}) := \sum_{k=1}^{q+1} (-1)^{k-1}\omega_1(v_k)\omega_2(v_1, \ldots, \hat{v_k}, v_{1+q}).$$

2 外代数（续）

今天从结合律开始：

引理 1 (结合律) 设 $\omega_1 \in Alt^p(V), \omega_2 \in Alt^q(V), \omega_3 \in Alt^r(V)$，则有

$$(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3).$$

证明 与前面的 (p,q)-shuffle 类似，我们引入 (p,q,r)-shuffle: $\sigma \in S(p,q,r) \subset S_{p+q+r}$ 当且仅当

$$\begin{aligned} \sigma(1) &< \cdots < & \sigma(p), \\ \sigma(p+1) &< \cdots < & \sigma(p+q), \\ \sigma(p+q+1) &< \cdots < & \sigma(p+q+r). \end{aligned}$$

考虑 $S(p,q,r)$ 的子集：$S(\bar{p},q,r)$ 表示 $S(p,q,r)$ 中在 $\{1, \ldots, p\}$ 上为恒同的元素构成的集合，$S(p,q,\bar{r})$ 表示 $S(p,q,r)$ 中在 $\{p+q+1, \ldots, p+q+r\}$ 上为恒同的元素构成的集合。易见存在双射：

$$\begin{aligned} S(p,q+r) \times S(\bar{p},q,r) &\to S(p,q,r), \quad (\sigma,\tau) \mapsto \sigma \circ \tau; \\ S(p+q,r) \times S(p,q,\bar{r}) &\to S(p,q,r), \quad (\sigma,\tau) \mapsto \sigma \circ \tau. \end{aligned}$$

(事实上容易验证这是单射，且确实映入对应的集合。然后通过计算集合基数即可说明是满射。) 于是有

$$\begin{aligned} \Big(\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3)\Big)(v_1, \ldots, v_{p+q+r}) &= \sum_{\sigma \in S(p,q+r)} sgn(\sigma)\omega_1(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)})(\omega_2 \wedge \omega_3)(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q+r)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S(p,q+r)} sgn(\sigma) \sum_{\tau \in S(\bar{p},q,r)} sgn(\tau)\omega_1(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) \\ &\quad \cdot\omega_2(v_{\sigma\tau(p+1)}, \ldots, v_{\sigma\tau(p+q)})\omega_3(v_{\sigma\tau(p+q+1)}, \ldots, v_{\sigma\tau(p+q+r)}) \\ &= \sum_{u \in S(p,q,r)} sgn(u)\omega_1(v_{u(1)}, \ldots, v_{u(p)})\omega_2(v_{u(p+1)}, \ldots, v_{u(p+q)}) \\ &\quad \cdot\omega_3(v_{u(p+q+1)}, \ldots, v_{u(p+q+r)}). \end{aligned}$$

同样的方法可得

$$\Big((\omega_1\wedge\omega_2)\wedge\omega_3\Big)(v_1,\dots,v_{p+q+r}) \;=\; \sum_{u\in S(p,q,r)} sgn(u)\omega_1(v_{u(1)},\dots,v_{u(p)})\omega_2(v_{u(p+1)},\dots,v_{u(p+q)}) \cdot\omega_3(v_{u(p+q+1)},\dots,v_{u(p+q+r)}).$$

从而 $(\omega_1\wedge\omega_2)\wedge\omega_3=\omega_1\wedge(\omega_2\wedge\omega_3)$. □

由结合律，在定义多个交错线性函数外积的时候可以不必区分顺序。

下面我们来仔细分析 $Alt^k(V)$ 的结构。上次在假设结合律成立的情况下我们证明了对于 $\omega_1,\dots,\omega_k\in Alt^1(V)=V^*$，以及任何 $(v_1,\dots,v_k)\in V^k$，都有

$$(\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_k)(v_1,\dots,v_k)=\det(\omega_i(v_j)).$$

作为应用，我们有

引理 2 设 $\omega_1,\dots,\omega_k\in Alt^1(V)=V^*$，则 $\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_k\neq 0$ 当且仅当 $\omega_1,\dots,\omega_k$ 线性无关。

证明 假设 $\omega_1,\dots,\omega_k$ 线性相关且不全为 0，可以不妨设 $\omega_k=\sum_{i=1}^{k-1}c_i\omega_i$，于是

$$\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_k=\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_{k-1}\wedge(\sum_{i=1}^{k-1}c_i\omega_i)=0.$$

如果 $\omega_1,\dots,\omega_k$ 线性无关，可以扩充为 V^* 的一组基，取 V 中的对偶基 $\{v_i\}$，则有

$$\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_k(v_1,\dots,v_k)=\det(\delta_{ij})=1\neq 0.$$

□

定理 1 设 $e_1,\dots,e_n$ 是 V 的一组基，$\omega_1,\dots,\omega_n\in Alt^1(V)$ 是其对偶基，则对 $1\le p\le n$，$\{\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_p}\}_{1\le i_1<\cdots<i_p\le n}$ 是 $Alt^p(V)$ 的一组基。特别地，

$$\dim Alt^p(V)=\binom{n}{p}=\frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

证明 由引理??，有

$$(\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_p})(e_{j_1},\dots,e_{j_p})=\begin{cases}0 & \text{if } \{i_1,\dots,i_p\}\neq\{j_1,\dots,j_p\};\\ sgn(\sigma) & \text{if } (j_1,\dots,j_p)=\sigma(i_1,\dots,i_p).\end{cases}$$

由此前的讨论 $\omega\in Alt^p(V)$ 由它在 $\{(e_{j_1},\dots,e_{j_p})\}_{j_k\in\{1,\dots,n\}}$ 上的取值唯一决定，于是得到

$$\omega=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_p\le n}\omega(e_{i_1},\dots,e_{i_p})\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_p}\quad\Big(=\sum_{\sigma\in S(p,n-p)}\omega(e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(p)})\omega_{\sigma(1)}\wedge\cdots\wedge\omega_{\sigma(p)}\Big).$$

事实上，右边表达式在 $(e_{j_1},\dots,e_{j_p})$ 处的取值可以计算如下：如果 $j_1,\dots,j_p$ 中有相同的，则左右两边在 $(e_{j_1},\dots,e_{j_p})$ 取值都为 0。如果 $j_1,\dots,j_p$ 互不相同，假设 $\{j_1,\dots,j_p\}=\{i_1,\dots,i_p\}$, 于是有 $\sigma\in S_n$ 满足 $\sigma(i_k)=j_k,k=1,\dots,p$ 以及 $\sigma(r)=r,\forall r\notin\{i_1,\dots,i_p\}$. 所以右端在 $(e_{j_1},\dots,e_{j_p})$ 取值为[1]

$$\omega(e_{i_1},\dots,e_{i_p})sgn(\sigma)=\omega(e_{\sigma(i_1)},\dots,e_{\sigma(i_p)})=\omega(e_{j_1},\dots,e_{j_p}).$$

[1]细心的同学可能会注意到这里的结果跟我们前面证明的略有区别：那里的 $\sigma\in S_p$ 而非 S_n。考虑含有 n 个元素的集合 E 的一个 k 元子集 F，它们的对称群（置换群）分别同构于 S_n 和 S_k。包含映射 $F\to E$ 诱导了 S_k 到 S_n 的单的群同态（在 $E\setminus F$ 上做恒同扩张），它将对换映为对换，从而保持 sgn 不变。

这证明了 $Alt^p(V)$ 可由 $\{\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_p}\}_{1\le i_1<\cdots<i_p\le n}$ 线性生成。下面说明它们线性无关：

假设存在 $\lambda_{i_1\dots i_p}\in\mathbb{R}$ 满足

$$\sum_{1\le i_1<\cdots<i_p\le n}\lambda_{i_1\dots i_p}\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_p}=0,$$

则考虑左右两边在 $(e_{i_1},\dots,e_{i_p})$ 处的取值，即得 $\lambda_{i_1\dots i_p}=0$。由此得到线性无关性。 □

作为特例，我们得到 $Alt^n(\mathbb{R}^n)\cong\mathbb{R}$ 是 1 维线性空间，$\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_n$ 是一组基。

另一个常用的例子是 $Alt^2(V)$，我们陈述如下简单的 Cartan 引理，它在微分几何中很有用。

引理 3 (Cartan 引理) 假设 $\omega_1,\dots,\omega_r\in Alt^1(V)$ 线性无关，$\eta_1,\dots,\eta_r\in Alt^1(V)$ 满足

$$\sum_{i=1}^r\eta_i\wedge\omega_i=0.$$

则存在 $a_{ij}\in\mathbb{R},i,j=1,\dots,r$，$a_{ij}=a_{ji}$，使得

$$\eta_i=\sum_{j=1}^r a_{ij}\omega_j.$$

练习 1 证明 *Cartan* 引理。（提示：将 ω_i 扩充为一组基，$Alt^2(V)$ 的基是什么？）

练习 2 假设 $\omega_1,\dots,\omega_r\in Alt^1(V)$ 线性无关，$\eta\in Alt^p(V)$。证明：$\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_r\wedge\eta=0$ 的充分必要条件是：存在 $\eta_1,\dots,\eta_r\in Alt^{p-1}(V)$，使得

$$\eta=\omega_1\wedge\eta_1+\cdots+\omega_r\wedge\eta_r.$$

练习 3 假设 $V\cong\mathbb{R}^4$，且 $\omega_1,\dots,\omega_4\in Alt^1(V)$ 是一组基，$A=(a_{ij})$ 是 *4* 阶反对称方阵，即 $A^T=-A$。令 $\eta=\sum_{i<j}a_{ij}\omega_i\wedge\omega_j$。证明：$\eta\wedge\eta=0$ 当且仅当 $\det A=0$。

令

$$Alt^*(V):=\bigoplus_{p=0}^n Alt^p(V),$$

其中 $Alt^0(V):=\mathbb{R}$，称为 V 上的“外代数”或“交错代数”或“Grassmann 代数”，其乘法就是外积。

注 1 理论上讲，$Alt^*(V)$ 是一个形式和 $\eta_0+\eta_1+\cdots+\eta_n$，其中 $\eta_0\in\mathbb{R},\eta_p\in Alt^p(V),p=1,\dots,n$。但是在绝大多数情形，我们只把同次的交错线性函数相加减，只在课程最后一部分会用到这样不同次形式和的情况（只是为了记号的简洁、方便，不是本质的）。

最后，我们想说：任给一个有限维实线性空间 V，我们赋予一个外代数 $Alt^*(V)$ 这一“操作”是一个“函子”（functor）：（不熟悉范畴论语言的同学可以忽略这些名词，只关注背后的含义。）任给一个有限维线性空间之间的线性映射 $f:V\to W$，会诱导一个自然的线性映射 $f^*:Alt^*(W)\to Alt^*(V)$：对每一个 $p=1,\dots,n$ 和 $(v_1,\dots,v_p)\in V^p$，$\omega\in Alt^p(W)$ 定义

$$(f^*\omega)(v_1,\dots,v_p):=\omega\big(f(v_1),\dots,f(v_p)\big).$$

显然 $f^*\omega\in Alt^p(V)$。我们称 f^* 为“**拉回**”。

引理 4 假设 $f:V\to W$ 是线性映射，$\omega\in Alt^p(W),\eta\in Alt^q(W)$，则有

$$f^*(\omega\wedge\eta)=f^*\omega\wedge f^*\eta.$$

证明 任取 $(v_1,\dots,v_{p+q})\in V^{p+q}$，由定义：

$$\begin{aligned}
f^*(\omega\wedge\eta)(v_1,\dots,v_{p+q}) &= (\omega\wedge\eta)\big(f(v_1),\dots,f(v_{p+q})\big)\\
&= \sum_{\sigma\in S(p,q)} sgn(\sigma)\omega\big(f(v_{\sigma(1)}),\dots,f(v_{\sigma(p)})\big)\eta\big(f(v_{\sigma(p+1)}),\dots,f(v_{\sigma(p+q)})\big)\\
&= \sum_{\sigma\in S(p,q)} sgn(\sigma)f^*\omega\big(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(p)}\big)f^*\eta\big(v_{\sigma(p+1)},\dots,v_{\sigma(p+q)}\big)\\
&= \Big(f^*\omega\wedge f^*\eta\Big)(v_1,\dots,v_{p+q}).
\end{aligned}$$

于是 $f^*(\omega\wedge\eta)=f^*\omega\wedge f^*\eta$。 □

一个特例是 $f\in End(V)$ 是 V 到自身的线性变换，则 f^* 也是 $Alt^p(V)$ 到自身的线性变换。假设 $e_1,\dots,e_n$ 是 V 的一组基，$\omega_1,\dots,\omega_n\in Alt^1(V)$ 是相应的对偶基，假设 $f(e_i)=\sum_{j=1}^n a_{ij}e_j$，则

$$f^*(\omega_i)(e_j)=\omega_i(f(e_j))=\omega_i(\sum_k a_{jk}e_k)=\sum_k a_{jk}\delta_{ik}=a_{ji}$$

从而 $f^*(\omega_i)=\sum_{j=1}^n a_{ji}\omega_j$。

练习 4 证明

$$f^*(\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_n)=\det(a_{ij})\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_n.$$

我们最后陈述一个定理，证明留作思考题。

定理 2 设 $f\in End(V)$ 是 n 维实线性空间 V 到自身的线性变换，则 f 的特征多项式可表示为

$$\det(f-tI)=\sum_{p=0}^n(-1)^p tr\Big(f^*\big|_{Alt^{n-p}(V)}\Big)t^p.$$

练习 5 证明上述定理。

3 微分形式与 de Rham 上同调

有了外代数的准备，我们可以来定义微分形式了。假设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是非空开集，$\{e_1,\dots,e_n\}$ 为标准基，$\{\varepsilon_i\}$ 为相应的对偶基。对于多重指标 $I=(i_1,\dots,i_p)$，记 $\varepsilon_I:=\varepsilon_{i_1}\wedge\cdots\wedge\varepsilon_{i_p}\in Alt^p(\mathbb{R}^n)$。

定义 1 U 上的一个光滑 p-形式是指一个光滑映射 $\omega:U\to Alt^p(\mathbb{R}^n)$。$U$ 上光滑 p-形式的集合记为 $\Omega^p(U)$。

注意：因为 $Alt^p(\mathbb{R}^n)$ 是有限维线性空间，所以 U 到它的光滑映射就是指光滑的向量值函数，从而是良好定义的。这里的 $\Omega^0(U)=C^\infty(U,\mathbb{R})$。而对 $p=1,\dots,n$，前面已证 $\{\varepsilon_I\mid I=(i_1,\dots,i_p),1\le i_1<\cdots<i_p\le n\}$ 是 $Alt^p(\mathbb{R}^n)$ 的基，所以每一个 $\omega\in\Omega^p(U)$ 都形如 $\sum_I\omega_I(x)\varepsilon_I$，其中 $\omega_I(x)\in C^\infty(U,\mathbb{R})$。为了记号不致混淆，我们经常记 ω 在 $x\in U$ 处的取值为 $\omega_x\in Alt^p(\mathbb{R}^n)$。

回忆：对于可微的多元向量值函数 $F:U\to V\subset\mathbb{R}^m$，我们可以定义其在某一点 x 处的微分，记为 D_xF。按照定义，它是一个线性映射 $D_xF:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$，在 $\zeta\in\mathbb{R}^n$ 处的取值就是 F 在 x 处沿 ζ 方向的方向导数：

$$D_xF(\zeta):=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}F(x+t\zeta).$$

特别地，$D_xF(e_i)=\frac{\partial F}{\partial x_i}(x)$。现在对 $\omega=\sum_I\omega_I(x)\varepsilon_I\in\Omega^p(U)$，将其视为向量值函数，有

$$(D_x\omega)(\xi)=\sum_I D_x\omega_I(\xi)\varepsilon_I.$$

定义 2 (外微分运算) 假设 $\omega \in \Omega^p(U)$，我们定义 $d\omega : U \to Alt^{p+1}(\mathbb{R}^n)$ 为：

$$(d\omega)_x(v_1,\dots,v_{p+1}) := \sum_{l=1}^{p+1}(-1)^{l-1}(D_x\omega)(v_l)(v_1,\dots,\hat{v}_l,\dots,v_{p+1}).$$

验证 $(d\omega)_x \in Alt^{p+1}(\mathbb{R}^n)$：首先显然对每个变量都线性，其次若 $v_i = v_{i+1}$，则

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{p+1}(-1)^{l-1}(D_x\omega)(v_l)(v_1,\dots,\hat{v}_l,\dots,v_{p+1}) = \Big(\sum_{l<i}+\sum_{l=i}+\sum_{l=i+1}+\sum_{l>i+1}\Big)\cdots\\
=\ & 0+(-1)^{i-1}(D_x\omega)(v_i)(v_1,\dots,\hat{v}_i,v_{i+1}\dots,v_{p+1})+(-1)^i(D_x\omega)(v_{i+1})(v_1,\dots,v_i,\widehat{v_{i+1}}\dots,v_{p+1})+0\\
=\ & 0.
\end{aligned}$$

从而 $(d\omega)_x \in Alt^{p+1}(\mathbb{R}^n)$。

例 1 令 $x_i \in C^\infty(U,\mathbb{R})$ 为坐标函数，即 $x_i(\sum_j \lambda_j e_j) = \lambda_i$。则对 $\xi = \sum_i \xi^i e_i$，有

$$(dx_i)_x(\xi) = (D_x x_i)(\xi) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} x_i(x+t\xi) = \xi^i = \varepsilon_i(\xi).$$

所以我们得到 $dx_i : U \to Alt^1(\mathbb{R}^n)$ 恒等于 ε_i。**所以从今以后，我们将 ε_i 统统记为 dx_i，并将 ε_I 记为 $dx_I = dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}$。于是一个 $\omega \in \Omega^p(U)$ 总可以写为 $\sum_I \omega_I(x)dx_I$。**

为说明这种记号的合理性，我们来对 $f \in \Omega^0(U)$ 计算 df：按定义

$$(df)_x(\xi) = (D_x f)(\xi) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(x+t\xi) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\xi^i = \Big(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\varepsilon_i\Big)(\xi) = \Big(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)dx_i\Big)(\xi).$$

所以我们立即得到了大家在微积分课程中所熟悉的微分的表达式：

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

为了说明 $d\omega$ 也是光滑的 $p+1$ 形式，最简单的办法是通过具体的表达式：

引理 5 假设 $\omega = f(x)\varepsilon_I = f(x)dx_I \in \Omega^p(U)$，则

$$(d\omega)_x = (df)_x \wedge dx_I.$$

证明 首先计算 $D_x\omega(\xi)$:

$$D_x\omega(\xi) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(f(x+t\xi)\varepsilon_I) = (\sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\xi^j)\varepsilon_I = (df)_x(\xi)\varepsilon_I,$$

进而有

$$(d\omega)_x(v_1,\dots,v_{p+1}) = \sum_{l=1}^{p+1}(-1)^{l-1}(df)_x(v_l)\varepsilon_I(v_1,\dots,\hat{v}_l,\dots,v_{p+1}) = \Big((df)_x\wedge\varepsilon_I\Big)(v_1,\dots,v_{p+1}).$$

由此即得 $(d\omega)_x = (df)_x \wedge dx_I$。 □

容易验证：

$$dx_k \wedge dx_I = \begin{cases} 0 & \text{if } k \in I; \\ (-1)^r dx_J & \text{if } k \notin I, \end{cases}$$

其中 r 满足 $i_r < k < i_{r+1}$，$J = (i_1,\dots,i_r,k,i_{r+1},\dots,i_p)$。($k < i_1$ 或 $k > i_p$ 的情形留作练习)。由此和上一引理即得

推论 1 对于 $\omega\in\Omega^p(U)$，总有 $d\omega\in\Omega^{p+1}(U)$。

关于外微分运算，一个很重要的性质是下面的引理，最早也是由 Poincaré 发现的：

引理 6 当 $p\geq 0$ 时，$d\circ d:\Omega^p(U)\to\Omega^{p+2}(U)$ 总是恒为 0。

证明 由线性性，只需要对 $\omega = f dx_I$ 的情形证明即可。多次应用上引理，得到：

$$\begin{aligned}
d(d\omega) &= d(df\wedge dx_I) = d\Big(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i\wedge dx_I\Big)\\
&= \sum_{i=1}^n d\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big)\wedge dx_i\wedge dx_I\\
&= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}dx_j\wedge dx_i\wedge dx_I\\
&= \sum_{1\leq i<j\leq n}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}-\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}\Big)dx_i\wedge dx_j\wedge dx_I = 0.
\end{aligned}$$

□

由此，我们得到一个线性空间和线性映射的序列：

$$0\to\Omega^0(U)\to\Omega^1(U)\to\cdots\to\Omega^p(U)\to\Omega^{p+1}(U)\to\cdots\to\Omega^n(U)\to 0$$

满足：前一个映射的像落在后一映射的 kernel 里面，这样的序列称为“(上) 链复形”。这里的 $(\Omega^*(U),d)$ 称为“de Rham 复形”。此时我们定义 U 的 p-阶 de Rham 上同调为商空间：

$$H^p(U) := Ker\Big(d:\Omega^p(U)\to\Omega^{p+1}(U)\Big)\Big/ d\Big(\Omega^{p-1}(U)\Big).$$

$Ker\Big(d:\Omega^p(U)\to\Omega^{p+1}(U)\Big)$ 中的元素称为 p-次闭形式，$d\Big(\Omega^{p-1}(U)\Big)$ 中的元素称为 p-次恰当形式。$H^p(U)$ 中的元素记为 $[\omega]$。

例 2 当 $U\subset\mathbb{R}^2$ 时，$d:\Omega^0(U)\to\Omega^1(U)$ 本质就是 $grad$；$d:\Omega^1(U)\to\Omega^2(U)$ 本质就是 rot。

当 $U\subset\mathbb{R}^3$ 时，$d:\Omega^0(U)\to\Omega^1(U)$ 本质就是 $grad$；$d:\Omega^1(U)\to\Omega^2(U)$ 本质就是 rot，$d:\Omega^2(U)\to\Omega^3(U)$ 本质就是 div。

所以上一讲所定义的 H^i 就是 *de Rham* 上同调的特例。

用微分形式做成的上同调论比代数拓扑中其他的上同调论有一个显著的优点：它的乘积运算简单、自然，而且便于计算。

首先外代数的外积运算自动诱导一个微分形式的外积运算：对 $\omega_1\in\Omega^p(U),\omega_2\in\Omega^q(U)$，定义

$$(\omega_1\wedge\omega_2)_x := (\omega_1)_x\wedge(\omega_2)_x\in Alt^{p+q}(\mathbb{R}^n),$$

则 $\omega_1\wedge\omega_2\in\Omega^{p+q}(U)$。

引理 7 设 $\omega_1\in\Omega^p(U),\omega_2\in\Omega^q(U)$，则

$$d(\omega_1\wedge\omega_2) = d\omega_1\wedge\omega_2+(-1)^p\omega_1\wedge d\omega_2.$$

证明 只需考虑 $\omega_1 = fdx_I, \omega_2 = gdx_J$ 的特殊情形:

$$\begin{aligned} d(\omega_1 \wedge \omega_2) &= d(fgdx_I \wedge dx_J) = d(fg) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= (gdf + fdg) \wedge dx_I \wedge dx_J = (df \wedge dx_I) \wedge (gdx_J) + dg \wedge (fdx_I) \wedge dx_J \\ &= (df \wedge dx_I) \wedge (gdx_J) + (-1)^{1 \cdot p} \wedge (fdx_I) \wedge dg \wedge dx_J \\ &= d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2. \end{aligned}$$

□

引理 8 假设 $\omega_1 \in \Omega^p(U), \omega_2 \in \Omega^q(U)$,

(i) 如果 ω_i 都是闭形式，则 $\omega_1 \wedge \omega_2$ 也是闭的;

(ii) 如果 ω_1 是恰当形式，ω_2 是闭形式，则 $\omega_1 \wedge \omega_2$ 也是恰当的。

于是外积运算诱导 *de Rham* 上同调的乘积（称为“卡积” *cup product* 或“外积”）运算:

$$[\omega_1] \cup [\omega_2] := [\omega_1 \wedge \omega_2].$$

证明 首先，如果 ω_i 都是闭形式，则

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2 = 0.$$

于是 (i) 得证。

另一方面，如果 $\omega_1 = d\eta, d\omega_2 = 0$，则有

$$d(\eta \wedge \omega_2) = d\eta \wedge \omega_2 + (-1)^{p-1} \eta \wedge d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2.$$

从而 $\omega_1 \wedge \omega_2$ 是恰当形式。

现在如果 $[\omega_1] \in H^p(U), [\omega_2] \in H^q(U)$, 假设 $\tilde{\omega}_i$ 是 $[\omega_i]$ 的另一组代表元, 则存在 η_i 使得 $\tilde{\omega}_i = \omega_i + d\eta_i$, 从而由上两个结论

$$\tilde{\omega}_1 \wedge \tilde{\omega}_2 = \omega_1 \wedge \omega_2 + \text{a exact form}.$$

从而乘积运算是良好定义的。 □

<u>**微分形式的拉回运算**</u>: 我们要说 $U \mapsto \Omega^p(U)$ 以及 $U \mapsto H^p(U)$ 也具有“函子性”: 假设 $U_1 \subset \mathbb{R}^n, U_2 \subset \mathbb{R}^m$, $\phi: U_1 \to U_2$ 为光滑映射, 我们将要定义“拉回映射” $\phi^*: \Omega^p(U_2) \to \Omega^p(U_1)$, 并且证明它诱导了 de Rham 上同调之间的线性映射 $\phi^*: H^p(U_2) \to H^p(U_1)$。

首先从 $\phi^*: \Omega^p(U_2) \to \Omega^p(U_1)$ 的定义开始: 回忆 ϕ 在 x 处的微分 $D_x\phi$ 是线性映射 $D_x\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, 我们已经定义了拉回 $(D_x\phi)^*: Alt^p(\mathbb{R}^m) \to Alt^p(\mathbb{R}^n)$。

定义 3 对于光滑映射 $\phi: U_1 \to U_2$ 和 $\omega \in \Omega^p(U_2)$，我们定义 $\phi^*(\omega): U_1 \to Alt^p(\mathbb{R}^n)$ 如下:

$$\big(\phi^*(\omega)\big)_x := (D_x\phi)^*\Big(\omega_{\phi(x)}\Big),$$

即，对任意的 $v_1, \dots, v_p \in \mathbb{R}^n$，有

$$\big(\phi^*(\omega)\big)_x(v_1, \dots, v_p) := \omega_{\phi(x)}\big((D_x\phi)(v_1), \dots, (D_x\phi)(v_p)\big).$$

例 3 考虑 $\mathbb{R}^m$ 中的坐标函数 y_i（定义为 $y_i(\sum_{j=1}^m c_j\tilde{e}_j) = c_i$），则 $dy_i \in \Omega^1(U_2)$。我们来计算 $\phi^*(dy_i)$: 将 ϕ 按照分量写为 $\phi = \sum_{k=1}^m \phi_k \tilde{e}_k$，则对 $\xi \in \mathbb{R}^n$ 有

$$\big(\phi^*(dy_i)\big)_x(\xi) = (dy_i)_{\phi(x)}\Big((D_x\phi)(\xi)\Big) = dy_i(\sum_k d\phi_k(\xi)\tilde{e}_k) = \sum_k d\phi_k(\xi)\delta_{ik} = d\phi_i(\xi),$$

从而 $\phi^*(dy_i) = d\phi_i$。