第三讲

石亚龙

1 回顾

上次课我们定义了微分形式 $\omega\in\Omega^p(U)$，是指一个光滑映射 $\omega: U\to Alt^p(\mathbb{R}^n)$，利用 $Alt^p(\mathbb{R}^n)$ 的基 $\varepsilon_{i_1\dots i_p}=dx_{i_1\dots i_p}:=dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}$，$\omega=\sum_I \omega_I(x)dx_I$，其中 $I=(i_1,\dots,i_p)$，$\omega_I\in C^\infty(U,\mathbb{R})$。

我们还定义了外微分 $d:\Omega^p(U)\to\Omega^{p+1}(U)$:

$$(d\omega)_x(v_1,\dots,v_{p+1}):=\sum_{l=1}^{p+1}(-1)^{l-1}(D_x\omega)(v_l)(v_1,\dots,\hat{v}_l,\dots,v_{p+1}),$$

其中 $(D_x\omega)(v_l)\in Alt^p(\mathbb{R}^n)$ 是 ω 在 $x\in U$ 处沿 v_l 方向的方向导数。对于 $f(x)dx_I$，直接计算得到 $d(fdx_I)=df\wedge dx_I$。由此得到 $d\circ d=0$, 进而可以定义 de Rham 上同调 $H^p(U)=Ker(d|_{\Omega^p(U)})/d\Omega^{p-1}(U)$。

由于 $d(\omega\wedge\eta)=d\omega\wedge\eta+(-1)^{\deg\omega}\omega\wedge d\eta$，可知外积诱导 de Rham 上同调环的乘积运算。

对于光滑映射 $\phi:U_1\to U_2$ 和 $\omega\in\Omega^p(U_2)$，我们定义了拉回运算 $\phi^*(\omega):U_1\to Alt^p(\mathbb{R}^n)$：

$$\big(\phi^*(\omega)\big)_x:=(D_x\phi)^*\Big(\omega_{\phi(x)}\Big),$$

即,

$$\big(\phi^*(\omega)\big)_x(v_1,\dots,v_p):=\omega_{\phi(x)}\big((D_x\phi)(v_1),\dots,(D_x\phi)(v_p)\big).$$

对于 $f\in\Omega^0(U_2)$，规定 $\phi^*(f):=f\circ\phi$。如果 $\phi=(\phi_1,\dots,\phi_m)$，则有 $\phi^*(dy_j)=d\phi_j=\sum_i\frac{\partial\phi_j}{\partial x_i}dx_i$。

2 微分形式与 de Rham 上同调 (续)

今天我们首先来看拉回的坐标表达式：假设 $\omega=f(y)dy_J\in\Omega^p(U_2)$，$J=(j_1,\dots,j_p)$，其中 $1\le j_1<\cdots<j_p\le m$，以及 $\phi=(\phi_1,\dots,\phi_m):U_1\to U_2$。为了不至于出现太多括号，我们经常把 $\phi^*(\omega)$ 记为 $\phi^*\omega$。由定义 $\phi^*\omega:U_1\to Alt^p(\mathbb{R}^n)$。$\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{R}^m$ 的标准正交基分别为 $\{e_i\}_{i=1}^n,\{\tilde{e}_j\}_{j=1}^m$。于是

$$(D_x\phi)(e_i)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\phi(x+te_i)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\sum_{j=1}^m\phi_j(x+te_i)\tilde{e}_j)=\sum_{j=1}^m\frac{\partial\phi_j}{\partial x_i}(x)\tilde{e}_j,$$

从而

$$\begin{aligned}
(\phi^*\omega)_x(e_{i_1},\dots,e_{i_p}) &:= \omega_{\phi(x)}\Big((D_x\phi)(e_{i_1}),\dots(D_x\phi)(e_{i_p})\Big)\\
&= f\big(\phi(x)\big)\cdot(dy_{j_1}\wedge\cdots\wedge dy_{j_p})\Big(\sum_{k_1=1}^m\frac{\partial\phi_{k_1}}{\partial x_{i_1}}(x)\tilde{e}_{k_1}\dots,\sum_{k_p=1}^m\frac{\partial\phi_{k_p}}{\partial x_{i_p}}(x)\tilde{e}_{k_p}\Big)\\
&= f\big(\phi(x)\big)\sum_{\sigma\in S_m,\sigma|_{\{j_1,\dots,j_p\}^c}=id}sgn(\sigma)\frac{\partial\phi_{\sigma(j_1)}}{\partial x_{i_1}}\cdots\frac{\partial\phi_{\sigma(j_p)}}{\partial x_{i_p}}\\
&= f\big(\phi(x)\big)\frac{\partial(\phi_{j_1},\dots,\phi_{j_p})}{\partial(x_{i_1},\dots,x_{i_p})}(x).
\end{aligned}$$

由此可以得到

$$\phi^*(fdy_J) = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_p\le n} f\big(\phi(x)\big)\frac{\partial(\phi_{j_1},\dots,\phi_{j_p})}{\partial(x_{i_1},\dots,x_{i_p})}(x)dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}.$$

特别地，$\phi^*\omega : U_1 \to Alt^p(\mathbb{R}^n)$ 也是光滑映射，从而 $\phi^*\omega \in \Omega^p(U_1)$。这说明 $\phi^* : \Omega^p(U_2) \to \Omega^p(U_1)$，显然它是线性映射。

引理 1 假设 $\phi : U_1 \to U_2$ 和 $\psi : U_2 \to U_3$ 都是光滑映射，则 $(\psi\circ\phi)^* = \phi^*\circ\psi^*$。

证明 这是由于由多元微积分求导的链式法则，可以知道 $D_x(\psi\circ\phi) = (D_{\phi(x)}\psi)\circ(D_x\phi)$，进而有 $\big(D_x(\psi\circ\phi)\big)^* = (D_x\phi)^*\circ(D_{\phi(x)}\psi)^* : Alt^p(\mathbb{R}^r) \to Alt^p(\mathbb{R}^n)$。由定义可知

$$\Big(\phi^*(\psi^*\omega)\Big)_x = (D_x\phi)^*\Big((\psi^*\omega)_{\phi(x)}\Big) = (D_x\phi)^*\Big((D_{\phi(x)}\psi)^*(\omega_{\psi(\phi(x))})\Big) = \big(D_x(\psi\circ\phi)\big)^*(\omega_{\psi(\phi(x))}) = \Big((\psi\circ\phi)^*\omega\Big)_x.$$

□

我们下面要证明 ϕ^* 也保持外积和外微分运算：

定理 1 假设 $\phi : U_1 \to U_2$ 是光滑映射，U_1, U_2 分别是 $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ 中的非空开集，则对任意 $\omega \in \Omega^p(U_2), \eta \in \Omega^q(U_2)$ 有:

(i) $\phi^*(\omega\wedge\eta) = \phi^*\omega\wedge\phi^*\eta$;

(ii) $d(\phi^*\omega) = \phi^*(d\omega)$.

证明 首先看外积：我们此前证明过线性映射保持 $Alt^*(\mathbb{R}^m)$ 的外积，于是有

$$\big(\phi^*(\omega\wedge\eta)\big)_x = (D_x\phi)^*(\omega_{\phi(x)}\wedge\eta_{\phi(x)}) = \big((D_x\phi)^*(\omega_{\phi(x)})\big)\wedge\big((D_x\phi)^*(\eta_{\phi(x)})\big) = (\phi^*\omega)_x\wedge(\phi^*\eta)_x.$$

在 ω 或 η 中有 0 阶微分形式时更加简单，我们略去证明。

再看外微分：首先看 0-形式 $f \in \Omega^0(U_2)$，直接计算得到：

$$\begin{aligned}
d(\phi^*f) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f\big(\phi(x)\big)}{\partial x_i}dx_i = \sum_{i=1}^n\Big(\sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_j}(\phi(x))\frac{\partial\phi_j}{\partial x_i}(x)\Big)dx_i \\
&= \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_j}(\phi(x))\Big(\sum_{i=1}^n \frac{\partial\phi_j}{\partial x_i}(x)dx_i\Big) \\
&= \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_j}(\phi(x))\phi^*(dy_j) \\
&= \phi^*\Big(\sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_j}dy_j\Big) = \phi^*(df).
\end{aligned}$$

于是对于 $\omega = fdy_J$，$J = (j_1,\dots,j_p)$，有

$$\begin{aligned}
d(\phi^*\omega) &= d\Big((\phi^*f)(\phi^*dy_{j_1})\wedge\cdots\wedge(\phi^*dy_{j_p})\Big) \\
&= d\Big((\phi^*f)d\phi_{j_1}\wedge\cdots\wedge d\phi_{j_p}\Big) \\
&= d(\phi^*f)\wedge d\phi_{j_1}\wedge\cdots\wedge d\phi_{j_p} + (\phi^*f)d(d\phi_{j_1})\wedge\cdots\wedge d\phi_{j_p} + \dots \\
&= (\phi^*df)\wedge(\phi^*dy_{j_1})\wedge\cdots\wedge(\phi^*dy_{j_p}) \\
&= \phi^*(df\wedge dy_J) = \phi^*(d\omega).
\end{aligned}$$

□

该定理有一个直接的应用：ϕ^* 把恰当形式变为恰当形式。不仅如此，如果 $\omega \in \Omega^p(U_2)$ 满足 $d\omega = 0$，则 $d(\phi^*\omega) = \phi^*(d\omega) = \phi^*0 = 0$，从而 $\phi^*\omega$ 也是闭形式。

推论 1 假设 $\phi: U_1 \to U_2$ 是光滑映射，则 $\phi^*: \Omega^*(U_2) \to \Omega^p(U_1)$ 诱导 *de Rham* 上同调之间的同态 $H^*(U_2) \to H^*(U_1)$，仍记为 ϕ^*。

证明 假设 $[\omega] \in H^p(U_2)$，定义 $\phi^*[\omega] := [\phi^*\omega]$。它是 well-defined，因为如果 $\tilde{\omega} = \omega + d\eta$ 是 $[\omega]$ 的另一代表元，则 $\phi^*\tilde{\omega} = \phi^*\omega + \phi^*(d\eta) = \phi^*\omega + d\phi^*\eta \sim \phi^*\omega$。

再由上一定理，我们可以知道 ϕ^* 也保持 H^* 里的乘积运算：

$$\phi^*([\omega_1] \cup [\omega_2]) = \phi^*[\omega_1 \wedge \omega_2] = [\phi^*(\omega_1 \wedge \omega_2)] = [(\phi^*\omega_1) \wedge (\phi^*\omega_2)] = [\phi^*\omega_1] \cup [\phi^*\omega_2] = (\phi^*[\omega_1]) \cup (\phi^*[\omega_2]).$$

□

Poincaré 引理

作为拉回运算的应用，我们来证明一般维数的 Poincaré 引理：

引理 2 假设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 为星形区域，则 $H^p(U) = 0, \forall p > 0$。

证明 不妨假设 U 关于原点是星形的。
Claim: 存在一族线性映射 $S_p: \Omega^p(U) \to \Omega^{p-1}(U)$ 使得

$$d \circ S_p + S_{p+1} \circ d = id, \ (p > 0).$$

假设 Claim 成立，则立即得到定理的证明：设 $\omega \in \Omega^p(U)$ 且满足 $d\omega = 0$，$p > 0$，则由 claim 可得

$$\omega = d\big(S_p(\omega)\big) + S_{p+1}(d\omega) = d\big(S_p(\omega)\big) \in d\big(\Omega^{p-1}(U)\big),$$

即任何闭形式都恰当，从而 $H^p(U) = 0$。

我们首先定义 $\hat{S}_p: \Omega^p(U \times \mathbb{R}) \to \Omega^{p-1}(U)$ 如下：任何 $\omega \in \Omega^p(U \times \mathbb{R})$ 都可以唯一地写成如下形式：

$$\omega = \sum_I f_I(x,t) dx_I + \sum_J g_J(x,t) dt \wedge dx_J,$$

其中 $I = (i_1, \ldots, i_p), 1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n$，$J = (j_1, \ldots, j_{p-1}), 1 \le j_1 < \cdots < j_{p-1} \le n$，$f_I, g_J \in C^\infty(U \times \mathbb{R})$。
我们定义

$$\hat{S}_p(\omega) := \sum_J \Big(\int_0^1 g_J(x,t) dt \Big) dx_J.$$

则有

$$\begin{aligned}
d\hat{S}_p(\omega) + \hat{S}_{p+1}(d\omega) &= \sum_J d\Big(\int_0^1 g_J(x,t)dt\Big) \wedge dx_J + \hat{S}_{p+1}\Big(\sum_I \frac{\partial f_I}{\partial t} dt \wedge dx_I + \sum_{J,i} \frac{\partial g_J}{\partial x_i} dx_i \wedge dt \wedge dx_J + \text{dx terms}\Big) \\
&= \sum_{J,i} \int_0^1 \Big(\frac{\partial g_J}{\partial x_i}(x,t)dt\Big) dx_i \wedge dx_J + \sum_I \Big(\int_0^1 \frac{\partial f_I}{\partial t} dt\Big) dx_I - \sum_{J,i} \int_0^1 \Big(\frac{\partial g_J}{\partial x_i}(x,t)dt\Big) dx_i \wedge dx_J \\
&= \sum_I f_I(x,1) dx_I - \sum_I f_I(x,0) dx_I.
\end{aligned}$$

然后我们定义一个映射 $\phi: U \times \mathbb{R} \to U$

$$\phi(x,t) := \psi(t)x,$$

其中 $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$，$0 \le \psi(t) \le 1$，$\psi'(t) \ge 0$，且满足

$$\psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t \le 0; \\ 1 & \text{if } t \ge 1. \end{cases}$$

对于 $\omega = \sum_I h_I(x)dx_I \in \Omega^p(U)$，则有

$$\begin{aligned}\phi^*\omega &= \sum_I h_I\big(\psi(t)x\big)d(\psi(t)x_{i_1})\wedge\cdots\wedge d(\psi(t)x_{i_p})\\ &= \sum_I h_I\big(\psi(t)x\big)\big(\psi'(t)x_{i_1}dt+\psi(t)dx_{i_1}\big)\wedge\cdots\wedge\big(\psi'(t)x_{i_p}dt+\psi(t)dx_{i_p}\big)\\ &= \psi^p(t)\sum_I h_I\big(\psi(t)x\big)dx_I+\sum_J g_J(x,t)dt\wedge dx_J.\end{aligned}$$

将此表达式带入上面 $\hat{S}_p$ 的结果，得到

$$d\hat{S}_p(\phi^*\omega)+\hat{S}_{p+1}(d\phi^*\omega)=\psi^p(1)\sum_I h_I\big(\psi(1)x\big)dx_I-\psi^p(0)\sum_I h_I\big(\psi(0)x\big)dx_I=\sum_I h_I(x)dx_I=\omega.$$

现在我们定义 $S_p := \hat{S}_p\circ\phi^*$，注意到 $d\phi^*=\phi^*d$，立即得到

$$dS_p(\omega)+S_{p+1}(d\omega)=d\hat{S}_p(\phi^*\omega)+\hat{S}_{p+1}(d\phi^*\omega)=\omega.$$

$\square$

注 1 这里的映射 ϕ 满足 $\phi(\cdot,1)=id, \phi(\cdot,0)\equiv 0$，所以 ϕ 实际上是 $id: U\to U$ 与常值映射 *0* 之间的同伦。这里的 S_p 算子称为一个“链同伦”。事实上我们后面会用几乎完全一样的方法证明同伦等价的流形具有同构的 *de Rham* 上同调。

3 一点同调代数

前面简单谈到了“链复形”的概念，今天我们把此前用到的本质是同调代数的概念和方法做一个简单介绍。

一个“链复形”[1] 是指一个线性空间和线性映射的序列

$$\cdots \xrightarrow{d^{i-1}} A^i \xrightarrow{d^i} A^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} \cdots$$

满足 $d^{i+1}\circ d^i=0,\forall i$。链复形一般记为 (A^*,d^*)。对于上面的链复形，定义 $Z^p := Ker(d^p)$，其元素称为“上闭链”(cocycle)；定义 $B^p := d^p(A^{p-1})$，其元素称为“上边缘”(coboundary)。最后定义上同调 $H^p(A^*,d^*) := Z^p/B^p$，通常在不引起混淆的情况下我们也简记为 $H^p(A^*)$。

我们通常遇到的链复形一般不会两边都向无穷延伸，总是“有上界”(存在 N 使得 $A^n=0,\forall n\geq N$)、“有下界”(存在 N 使得 $A^n=0,\forall n\leq -N$) 或“有界”(存在 N 使得 $A^n=0,\forall |n|\geq N$)。

一个链复形 (A^*,d^*) 如果满足 $H^p(A^*)=0,\forall p$，则又称 (A^*,d^*) 是正合列 (exact sequence)。

例 1 序列 $0\to A\xrightarrow{f} B\to 0$ 是正合列当且仅当 f 是同构。

例 2 序列 $0\to A\xrightarrow{f} B\xrightarrow{g} C\to 0$ 是正合列当且仅当 f 是单射，g 是满射，并且 $Ker(g)=Im(f)$。这样的正合列特别常见，因而很有用，称为“**短正合列**”(*short exact sequence*)。

两个链复形 $(A^*,d_A^*),(B^*,d_B^*)$ 之间的“链映射”(chain map) 是指一族线性映射 $f^p: A^p\to B^p$，满足 $d_B^p f^p = f^{p+1}d_A^p$，即下列图表可交换：

$$\begin{tikzcd} A^p \arrow[r, "d_A^p"] \arrow[d, "f^p"'] & A^{p+1} \arrow[d, "f^{p+1}"] \\ B^p \arrow[r, "d_B^p"] & B^{p+1} \end{tikzcd}$$

[1]准确讲应该叫“上链复形”，因为 d 算子让指标变大。但是上链复形的上同调理论和链复形的同调理论是完全等价的，我们这里只考虑上链复形。

引理 3 链映射 $f^*: (A^*, d_A^*) \to (B^*, d_B^*)$ 诱导上同调的同态 $f^* :=: H^*(f): H^*(A^*) \to H^*(B^*)$。

证明 首先如果 $[a] \in H^p(A^*)$,则取代表元 $a \in Z^p(A^*)$,此时 $d_B^p(f^p(a)) = f^{p+1}(d_A^p a) = 0$,从而 $f^p(a) \in Z^p(B^*)$,我们定义 $f^*([a]) := [f^p(a)] \in H^p(B^*)$。它是 well-defined：假设 b 是另一代表元,则 $a - b = d_A^{p-1}c, c \in A^{p-1}$,于是

$$f^p(a) - f^p(b) = f^p(d_A^{p-1}c) = d_B^{p-1} f^{p-1}(c) \in B^p(B^*).$$

□

假如 $(A^*, d_A^*), (B^*, d_B^*)$ 之间的链映射 f^* 和 g^* 满足如下条件：存在一族线性映射 $s: A^p \to B^{p-1}$，[2]满足 $f - g = d_B s + s d_A$，则称 f^* 与 g^* 是"链同伦"(chain-homotopic) 的，并将 s 称为 f^* 与 g^* 之间的"链同伦"(chain homotopy)。

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d_A"] & A^p \arrow[r, "d_A"] \arrow[dl, "s"'] \arrow[d, "f"', "g"] & A^{p+1} \arrow[dl, "s"'] \\
B^{p-1} \arrow[r, "d_B"] & B^p \arrow[r, "d_B^p"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

这个概念来自于拓扑学的同伦，我们后面再仔细讨论。这里我们指出 Poincaré 引理证明的代数本质：

引理 4 假设链复形 $(A^*, d_A^*), (B^*, d_B^*)$ 之间的链映射 f^* 和 g^* 是链同伦的，则它们在上同调的诱导同态相等，即 $H^p(f) = H^p(f): H^p(A^*) \to H^p(B^*), \forall p$。

证明 任取 $a \in Z^p(A^*)$，则

$$f(a) - g(a) = d_B s(a) + s(d_A a) = d_B s(a) \in B^p(B^*),$$

从而 $f^*([a]) = [f(a)] = [g(a)] = g^*([a])$。 □

将上述概念应用于 de Rham 上同调：对每个开集 $U \subset \mathbb{R}^n$，我们赋予了一个链复形——de Rham 复形 $(\Omega^*(U), d)$：

$$0 \to \Omega^0(U) \xrightarrow{d} \Omega^1(U) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^n(U) \to 0.$$

其上同调 $H^*(\Omega^*(U))$ 就是我们前面定义的 de Rham 上同调。如果 $\phi: U_1 \to U_2$ 是光滑映射，则拉回 $\phi^*: \Omega^*(U_2) \to \Omega^*(U_1)$ 是链映射，从而诱导同态 $f^*: H^*(U_2) \to H^*(U_1)$。

链复形的短正合列与上同调长正合列

假设我们有三个链复形 $(A^*, d_A^*), (B^*, d_B^*), (C^*, d_C^*)$ 以及链映射 $f^*: A^* \to B^*$ 和 $g^*: B^* \to C^*$。如果对每个 p,

$$0 \to A^p \xrightarrow{f} B^p \xrightarrow{g} C^p \to 0$$

都是正合列，则称 $0 \to A^* \xrightarrow{f} B^* \xrightarrow{g} C^* \to 0$ 是链复形的短正合列。一个基本的结果是：

定理 2 假设 $0 \to A^* \xrightarrow{f} B^* \xrightarrow{g} C^* \to 0$ 是链复形的短正合列，则存在一族线性映射 $\delta: H^p(C^*) \to H^{p+1}(A^*)$，使得下列上同调的序列

$$\cdots \to H^p(A^*) \xrightarrow{f^*} H^p(B^*) \xrightarrow{g^*} H^p(C^*) \xrightarrow{\delta} H^{p+1}(A^*) \xrightarrow{f^*} H^{p+1}(B^*) \to \dots$$

是正合列。

[2]为了不使符号太复杂，我们把 d_A^p 简记为 d_A。

该定理的证明是所谓的"图上追猎"法（diagram chasing）。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A^{p-1} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d_A"'] & B^{p-1} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "d_B"'] & C^{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "d_C"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^{p} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d_A"'] & B^{p} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "d_B"'] & C^{p} \arrow[r] \arrow[d, "d_C"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^{p+1} \arrow[r, "f"] & B^{p+1} \arrow[r, "g"] & C^{p+1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

证明 证明分为如下几步：δ 的定义，以及 $H^p(B^*)$，$H^p(C^*)$ 和 $H^{p+1}(A^*)$ 处的正合性。

δ 的定义：任取 $[c]\in H^p(C^*)$，这里 $c\in C^p$ 满足 $d_C c=0$。

由 g 满，存在 $b\in B^p$ 满足 $g(b)=c$。b 满足 $g(d_B b)=d_C g(b)=d_C c=0$。

由于 $Im(f)=Ker(g)$，存在 $a\in A^{p+1}$ 使得 $f(a)=d_B b$。a 满足 $f(d_A a)=d_B f(a)=d_B d_B b=0$，而 f 是单射，从而 $d_A a=0$。定义 $\delta([c]):=[a]$。

注意在上述构造中，c,b 的选取都不唯一，而一旦取定 b，a 的选取是唯一的。因此为了说明上述 δ 是良好定义的，需要验证 $[a]$ 不依赖于 c,b 的选取。

为此假设 $\tilde{c}\in C^p$ 满足 $\tilde{c}=c+d_C u, u\in C^{p-1}$, 并且 $\tilde{b}\in B^p$ 满足 $g(\tilde{b})=\tilde{c}$, 以及 $\tilde{a}\in A^{p+1}$ 满足 $f(\tilde{a})=d_B\tilde{b}$。

由 g 满，存在 $v\in B^{p-1}$ 使得 $u=g(v)$，于是 $d_C u=d_C g(v)=g(d_B v)$。从而

$$g(d_B v)=\tilde{c}-c=g(\tilde{b}-b).$$

即 $\tilde{b}-b-d_B v\in Ker(g)=Im(f)$。从而存在 $t\in A^p$ 使得 $\tilde{b}-b-d_B v=f(t)$。用 d_B 作用，得到

$$f(\tilde{a}-a)=d_B(\tilde{b}-b)=d_B f(t)=f(d_A t).$$

最后利用 f 单，得到 $\tilde{a}=a+d_A t$，从而 $[\tilde{a}]=[a]$。

$H^p(B^*)$ 处的正合性: 此时由于 $g\circ f=0$，自动得到 $Im(f^*)\subset Ker(g^*)$，故只需证 $Ker(g^*)\subset Im(f^*)$。

为此任取 $[b]\in Ker(g^*)$，即 $b\in B^p$ 满足 $d_B b=0$ 且 $g(b)=d_C c$，$c\in C^{p-1}$。

由 g 满，存在 $\tilde{b}\in B^{p-1}$ 使得 $c=g(\tilde{b})$。于是

$$g(b)=d_C c=d_C g(\tilde{b})=g(d_B\tilde{b}),$$

从而 $b-d_B\tilde{b}\in Ker(g)=Im(f)$，即存在 $a\in A^p$ 使得 $f(a)=b-d_B\tilde{b}$。

a 满足 $f(d_A a)=d_B f(a)=d_B(b-d_B\tilde{b})=0$，由 f 单，$d_A a=0$。于是

$$f^*([a])=[f(a)]=[b-d_B\tilde{b}]=[b],$$

即 $[b]\in Im(f^*)$，从而 $Ker(g^*)\subset Im(f^*)$。

剩下的证明类似，留作练习。 □

练习 1 证明上述定理中 $H^p(C^*)$ 和 $H^{p+1}(A^*)$ 处的正合性。

练习 2 证明如下的"5-引理"：假设下图表交换，且两个行都是正合列。假设 f_1,f_2,f_4,f_5 都是同构，证明：f_3 也是同构。

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"'] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"'] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"'] & A_4 \arrow[r] \arrow[d, "f_4"'] & A_5 \arrow[d, "f_5"'] \\
B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & B_3 \arrow[r] & B_4 \arrow[r] & B_5
\end{tikzcd}$$

练习 3 假设有如下链复形:

$$0 \to A_0 \xrightarrow{d} A_1 \xrightarrow{d} A_2 \ldots \xrightarrow{d} A_n \to 0$$

满足 $\dim_{\mathbb{R}} A^p < \infty, \forall p$。定义

$$\chi(A^*) := \sum_p (-1)^p \dim_{\mathbb{R}} H^p(A^*).$$

证明:

$$\chi(A^*) := \sum_p (-1)^p \dim_{\mathbb{R}} A^p.$$