第四讲

石亚龙

1 Mayer-Vietoris 序列

上次课我们证明了同调代数里面一个基本的结果：链复形的短正合列诱导上同调的长正合列。今天我们来讲一个重要的应用：Mayer-Vietoris 序列。它将 $U_1\cup U_2$ 的 de Rham 上同调同 U_1、U_2 与 $U_1\cap U_2$ 的 de Rham 上同调联系起来。

首先我们需要一个概念：假设 $(A^*,d_A),(B^*,d_B)$ 是两个（上）链复形, 它们的直和 $(A^*\oplus B^*,d_A\oplus d_B)$ 是指这样一个链复形 (C^*,d_C)，它满足：

- 对所有的 p，都有 $C^p=A^p\oplus B^p=\{(a,b)\mid a\in A^p,b\in B^p\}$；
- 对任意的 $(a,b)\in C^p$，都有 $d_C(a,b)=(d_Aa,d_Bb)$。

容易看出，$H^p(A^*\oplus B^*)\cong H^p(A^*)\oplus H^p(B^*)$。

现在假设 $U=U_1\cup U_2\subset\mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中两个非空开集的并。假设 $U_1\cap U_2=\emptyset$，则容易看到 $(\Omega^*(U),d)$ 是 $(\Omega^*(U_1),d)$ 和 $(\Omega^*(U_2),d)$ 的直和，于是此时对任意的 p，都有

$$H^p(U_1\cup U_2)\cong H^p(U_1)\oplus H^p(U_2).$$

下面都假设 $U_1\cap U_2\neq\emptyset$。

定理 1 *假设 $U=U_1\cup U_2\subset\mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中两个非空开集的并，并且 $U_1\cap U_2\neq\emptyset$。则对任何 $p=0,1\ldots,n$，都有短正合列:*

$$0\to\Omega^p(U)\xrightarrow{I}\Omega^p(U_1)\oplus\Omega^p(U_2)\xrightarrow{J}\Omega^p(U_1\cap U_2)\to 0,$$

其中 $I(\omega):=(\omega|_{U_1},\omega|_{U_2})$，$J(\omega_1,\omega_2):=\omega_1|_{U_1\cap U_2}-\omega_2|_{U_1\cap U_2}$。

证明 由 I,J 的定义，显然有 I 是单射以及 $Im(I)=Ker(J)$。唯一非平凡的地方在于 J 是满射的证明。为此，我们需要如下的技术工具，它本身也在流形理论中是非常重要的技术工具：

定理 2 (“单位分解”（partition of unity）定理) *假设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是开集，并且 $U=\cup_{i\in\Gamma}V_\alpha$，其中 $V_i\subset U$ 是开子集。则存在一族 $\eta_i\in C^\infty(U)$，满足:*

(i) η_i *在 U 中的支集* $supp_U\eta_i:=\overline{\{x\in U\mid\eta_i(x)\neq 0\}}\subset V_i$;

(ii) *(“局部有限”) 对任意的 $x\in U$，存在开邻域 $W\subset U$，使得除了有限个之外，其余所有的 η_i 在 W 上恒为 0;*

(iii) *对任何 $x\in U$，都有 $\sum_{i\in\Gamma}\eta_i(x)=1$。*

先承认单位分解定理。在我们的情形 $U=U_1\cup U_2$，所以存在光滑函数 $\eta_1,\eta_2\in C^\infty(U),\eta_i\geq 0$，$supp_U\eta_i\subset U_i,i=1,2$ 并且 $\eta_1+\eta_2\equiv 1$。

现在对于 $\omega\in\Omega^p(U_1\cap U_2)$，考虑 $\eta_1\omega$。可以将它延拓为 $\Omega^p(U_2)$ 中的元素：

$$\omega_2(x):=\begin{cases}\eta_1(x)\omega(x) & \text{if } x\in U_1\cap U_2,\\ 0 & \text{if } x\in U_2\setminus supp_U\eta_1.\end{cases}$$

同理，对 $\eta_2\omega$ 在 $U_1\setminus supp_U\eta_2$ 做零延拓，得到 $\omega_1\in\Omega^p(U_1)$。则有

$$J(\omega_1,-\omega_2)=\omega_1|_{U_1\cap U_2}+\omega_2|_{U_1\cap U_2}=(\eta_1+\eta_2)\omega=\omega,$$

从而 J 是满射。 $\square$

注 1 对于开集之间的包含映射 $i: U \to V$，容易验证 $i^*: \Omega^*(V) \to \Omega^*(U)$ 就是限制映射 $\omega \mapsto \omega|_U$。

由于 I,J 都是链映射，所以由上节的定理，立即得到：

定理 3 (Mayer-Vietoris 序列) 假设 $U = U_1 \cup U_2 \subset \mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中两个非空开集的并，并且 $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$，则有如下的上同调长正合列:

$$\begin{aligned} 0 \quad &\to \quad H^0(U) \xrightarrow{I^*} H^0(U_1) \oplus H^0(U_2) \xrightarrow{J^*} H^0(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\delta} \dots \\ \dots \quad &\xrightarrow{\delta} H^p(U) \xrightarrow{I^*} H^p(U_1) \oplus H^p(U_2) \xrightarrow{J^*} H^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\delta} H^{p+1}(U) \xrightarrow{I^*} \cdots \to H^n(U_1 \cap U_2) \to 0 \end{aligned}$$

作为应用，我们来算一些开集的 de Rham 上同调：

例 1 考虑 $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$，它可以表示为 $U_1 \cup U_2$，其中

$$U_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, 0) \mid x_1 \geq 0\}, \quad U_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, 0) \mid x_1 \leq 0\}.$$

容易看到 U_1, U_2 都是星形区域，并且 $U_1 \cap U_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$ 是两个星形区域（半平面）的无交并 $H_+ \cup H_-$。于是

$$H^p(U_i) = \begin{cases} \mathbb{R}, & p = 0, \\ 0, & p > 0; \end{cases} \qquad H^p(U_1 \cap U_2) = \begin{cases} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, & p = 0, \\ 0, & p > 0. \end{cases}$$

我们有 *Mayer-Vietoris* 序列

$$\begin{aligned} 0 \quad &\to \quad H^0(U) \xrightarrow{I^*} H^0(U_1) \oplus H^0(U_2) \xrightarrow{J^*} H^0(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\delta} H^1(U) \\ &\xrightarrow{I^*} \quad H^1(U_1) \oplus H^1(U_2) \xrightarrow{J^*} H^1(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\delta} H^2(U) \xrightarrow{I^*} H^2(U_1) \oplus H^2(U_2) \xrightarrow{J^*} H^2(U_1 \cap U_2) \to 0 \end{aligned}$$

直接得到 $H^2(U) = 0$。又由 U 连通可知 $H^0(U) \cong \mathbb{R}$。为计算 $H^1(U)$，注意到上式第二行全为零。所以

$$H^1(U) = Im(\delta) \cong H^0(U_1 \cap U_2)/Ker(\delta) \cong (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R})/Im(J^*).$$

而

$$Im(J^*) \cong H^0(U_1) \oplus H^0(U_2)/Ker(J^*) \cong (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R})/Im(I^*) \cong \mathbb{R}^2/\mathbb{R} \cong \mathbb{R},$$

于是 $H^1(U) \cong \mathbb{R}^2/\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$。

另外也可以通过分析 J^* 直接定出 $Im(J^*)$: 对任何 $(a,b) \in H^0(U_1) \oplus H^0(U_2)$，$a,b$ 可视为常值函数，则由定义 $J^*(a,b) = a|_{U_1 \cap U_2} - b|_{U_1 \cap U_2} \in H^0(U_1 \cap U_2)$。注意 $H^0(U_1 \cap U_2)$ 到 $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ 的同构映射是 $c \mapsto (c|_{H_+}, c|_{H_-})$。所以如果将 $H^0(U_1 \cap U_2)$ 等同于 $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$，则 J^* 的表达式是 $J^*(a,b) = (a-b, a-b)$。所以 $Im(J^*) \cong \mathbb{R}$。

再举一个例子，展示 MV 序列的另一种用法：

例 2 设 $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0),(1,0)\}$，我们来计算 $H^p(U)$。

首先由于 U 连通，仍然有 $H^0(U) \cong \mathbb{R}$。为计算 H^1, H^2，我们仍然用 *Mayer-Vietoris* 序列。

令 $U_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, U_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$，则有 $U_1 \cap U_2 = U$，$U_1 \cup U_2 = \mathbb{R}^2$。利用上一例子的计算结果，我们有正合列:

$$\begin{aligned} 0 \quad &\to \quad H^0(\mathbb{R}^2) \xrightarrow{I^*} H^0(U_1) \oplus H^0(U_2) \xrightarrow{J^*} H^0(U) \xrightarrow{\delta} H^1(\mathbb{R}^2) \\ &\xrightarrow{I^*} \quad H^1(U_1) \oplus H^1(U_2) \xrightarrow{J^*} H^1(U) \xrightarrow{\delta} H^2(\mathbb{R}^2) \xrightarrow{I^*} H^2(U_1) \oplus H^2(U_2) \xrightarrow{J^*} H^2(U) \to 0, \end{aligned}$$

立即得到 $H^2(U) = 0$ 和 $H^1(U) \cong H^1(U_1) \oplus H^1(U_2) \cong \mathbb{R}^2$。

两个星形区域的交一般不是星形的，但是有一类特殊的星形区域对有限交运算封闭：一个区域 U 如果关于其中的任一点都是星形的，则称为“凸区域”。容易看到：两个凸区域的交如果非空，则一定也是凸的。对于能够用有限个凸区域覆盖的开集，我们有如下的：

推论 1 *假设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 能够表示为有限个凸区域的并，则 U 的 de Rham 上同调 $H^p(U)$ 都是有限维的线性空间。*

证明 我们对凸区域的个数 r 做数学归纳法：$r=1$ 时由 Poincaré 引理即可。假设任何可表示为不超过 r 个凸区域并的开集的 de Rham 上同调都是有限维的，下面假设 $U = U_1 \cup \cdots \cup U_{r+1}$，其中每个 U_i 都是凸的。令 $V := U_1 \cup \cdots \cup U_r$，则对 $U = V \cup U_{r+1}$ 用 Mayer-Vietoris 序列：

$$\begin{array}{rl} 0 \;\to & H^0(U) \xrightarrow{I^*} H^0(V) \oplus H^0(U_{r+1}) \xrightarrow{J^*} H^0(V \cap U_{r+1}) \xrightarrow{\delta} \dots \\ \dots & \xrightarrow{\delta} H^p(U) \xrightarrow{I^*} H^p(V) \oplus H^p(U_{r+1}) \xrightarrow{J^*} H^p(V \cap U_{r+1}) \xrightarrow{\delta} H^{p+1}(U) \xrightarrow{I^*} \cdots \to H^n(V \cap U_{r+1}) \to 0 \end{array}$$

对每个 $p > 0$，看

$$\cdots \to H^{p-1}(V \cap U_{r+1}) \xrightarrow{\delta} H^p(U) \xrightarrow{I^*} H^p(V) \oplus H^p(U_{r+1}) \to \dots$$

由于 $V = \cup_{i=1}^r U_i$ 和 $V \cap U_{r+1} = \cup_{i=1}^r (U_i \cap U_{r+1})$ 都是不超过 r 个凸区域的并，$H^{p-1}(V \cap U_{r+1}), H^p(V) \oplus H^p(U_{r+1})$ 都是有限维线性空间。于是

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}} H^p(U) &= \dim_{\mathbb{R}} Im(I^*) + \dim_{\mathbb{R}} Ker(I^*) \\ &= \dim_{\mathbb{R}} Im(I^*) + \dim_{\mathbb{R}} Im(\delta) \\ &\leq \dim_{\mathbb{R}} \big(H^p(V) \oplus H^p(U_{r+1})\big) + \dim_{\mathbb{R}} H^{p-1}(V \cap U_{r+1}) < \infty. \end{aligned}$$

$p = 0$ 时，有

$$\dim_{\mathbb{R}} H^0(U) = \dim_{\mathbb{R}} Im(I^*) \leq \dim_{\mathbb{R}} H^0(V) + \dim_{\mathbb{R}} H^0(V \cap U_{r+1}) < \infty.$$

□

练习 1 *对 $\mathbb{R}^n$ 中的开集 U，令 $\Omega_c^p(U)$ 为 U 中的紧支集光滑 p-形式构成的线性空间。此时仍有 $d: \Omega_c^p(U) \to \Omega_c^{p+1}(U)$ 以及 $d \circ d = 0$。定义 U 的“紧支集 de Rham 上同调”为*

$$H_c^p(U) := Ker\big(\Omega_c^p(U) \xrightarrow{d} \Omega_c^{p+1}(U)\big) / d\Omega_c^{p-1}(U).$$

(1) 计算 $H_c^p(\mathbb{R})$;

(2) 对于开集 $V \subset U$，可以定义“0-延拓”映射 $i: \Omega_c^p(V) \to \Omega_c^p(U)$。请模仿 Mayer-Vietoris 序列的讨论，对 $U = U_1 \cup U_2$ 定义一个紧支集 de Rham 复形的短正合列

$$0 \to \Omega_c^*(U_1 \cap U_2) \to \Omega_c^*(U_1) \oplus \Omega_c^*(U_2) \to \Omega_c^*(U) \to 0.$$

并导出相应的紧支集上同调长正合列。

2 单位分解定理的证明

在数学中比较常用的有两个版本的单位分解定理。除了定理 2，还有如下的“紧支集单位分解”定理：

定理 4 (紧支集单位分解) *假设 $U = \cup_{i \in \Gamma} V_i$，其中 $V_i \subset U \subset \mathbb{R}^n$ 都是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空开集。则存在一族开集 $\{W_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$（称为 $\{V_i\}$ 的“局部有限加细”），满足:*

(a) (覆盖)$U = \cup_{\alpha\in\Lambda} W_\alpha$;
(b) (加细)对每个 $\alpha \in \Lambda$，都存在 $i = i(\alpha) \in \Gamma$，使得 $W_\alpha \subset V_i$;
(c) (局部有限)对任意一点 $x \in U$，都存在开邻域 W，使得只有有限个 $\alpha \in \Lambda$ 使得 $W \cap W_\alpha \neq \emptyset$。
同时，存在一族紧支集函数 $\phi_\alpha \in C_0^\infty(U)$，满足 $0 \le \phi_\alpha \le 1$，$supp_U \phi_\alpha \subset W_\alpha$，并且对任意 $x \in U$，都有

$$\sum_{\alpha\in\Lambda} \phi_\alpha(x) = 1.$$

由定理 4可以立即得到定理 2:

证明 [定理 2的证明(假设定理 4成立):] 对每个 $\alpha \in \Lambda$，指定一个 $i \in \Gamma$ 使得 $W_\alpha \subset V_i$。即得到一个映射 $\tau : \Lambda \to \Gamma$，满足 $W_\alpha \subset V_{\tau(\alpha)}$。现在对每个 $i \in \Gamma$，定义

$$\eta_i(x) := \sum_{\alpha:\tau(\alpha)=i} \phi_\alpha(x).$$

由于上式右边在每一点附近都是一个有限和，所以是 U 上的光滑函数，并且对任意 $x \in U$ 都有

$$\sum_{i\in\Gamma} \eta_i(x) = \sum_{i\in\Gamma} \sum_{\alpha:\tau(\alpha)=i} \phi_\alpha(x) = \sum_{\alpha\in\Lambda} \phi_\alpha(x) = 1.$$

由 $\{W_\alpha\}$ 的局部有限性和 η_i 的定义立即得到 $\{\eta_i\}_{i\in\Gamma}$ 满足定理 2中的“局部有限”条件。于是只要说明 $supp_U \eta_i \subset V_i$。

对任意 $x \in U \setminus V_i$，取 x 的开邻域 W 使得只有有限个 $\beta \in \Lambda$ 满足 $W \cap W_\beta \neq \emptyset$。于是对那些满足 $\tau(\alpha) = i$ 的 α, 也最多只有有限个满足 $W \cap W_\alpha \neq \emptyset$, 从而除有限个这样的 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ 以外, 必有 $\phi_\alpha|_W \equiv 0$。

而对剩下的 $\phi_{\alpha_j}, j = 1, \ldots, k$，由于 $\cup_{j=1}^k supp_U \phi_{\alpha_j} \subset \cup_{j=1}^k W_{\alpha_j} \subset V_i$，于是 $x \notin \cup_{j=1}^k supp_U \phi_{\alpha_j}$。而 $\cup_{j=1}^k supp_U \phi_{\alpha_j}$ 是 U 中的闭子集,所以只要适当缩小 W 就有 $\phi_{\alpha_j}|_W \equiv 0$, 从而 $\eta_i|_W \equiv 0$。这说明 $x \notin supp_U \eta_i$，从而 $supp_U \eta_i \subset V_i$。 □

所以下面只需要证明定理 4。为此我们需要一些技术工具：首先是一些特殊的光滑函数的构造。

我们从最简单的单变量函数开始：考虑函数

$$\omega(t) := \begin{cases} 0, & \text{if } t \le 0; \\ \exp(-\frac{1}{t}), & \text{if } t > 0. \end{cases}$$

则有 $\omega \in C^\infty(\mathbb{R})$，$0 \le \omega < 1$。对于 $-\infty < a < b < \infty$，再定义

$$\psi(t) := \frac{\omega(t-a)}{\omega(t-a) + \omega(b-t)},$$

则 $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$，且 $\psi|_{(-\infty,a]} \equiv 0, \psi|_{[b,\infty)} \equiv 1$。

然后我们可以造 $\mathbb{R}^n$ 中的“鼓包”函数了：假设 $B_{2\varepsilon}(x) \subset \mathbb{R}^n$，可以构造 $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$，满足 $0 \le \phi \le 1$，$supp\phi \subset B_{2\varepsilon}(x)$ 并且 $\phi|_{B_\varepsilon(x)} \equiv 1$。造法有很多，例如可以用上面的 ψ，其中 $a = 0, b = 1$。定义

$$\phi(y) := \psi\Big(\frac{2\varepsilon^2 - \|y-x\|^2}{\varepsilon^2}\Big),$$

则有 $supp\phi = \overline{B_{\sqrt{2}\varepsilon}(x)} \subset B_{2\varepsilon}(x)$ 且 $\phi|_{B_\varepsilon(x)} \equiv 1$。

另一个技术工具是将 U 写成可数多个紧集的穷竭：

引理 1 假设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是非空开集，则存在 U 的一列紧子集 $\{K_i\}_{i=1}^\infty$ 满足
(i) 对每一个 $i = 1, 2, \ldots$，都有 $K_i \subset K_{i+1}^\circ$;

(ii) $\cup_{i=1}^{\infty} K_i = U$。

证明 不妨设 $B_r(0) \subset U, 0 < r < 1$。令

$$K_i := \overline{B_{2^i}(0)} \setminus \Big(\cup_{x \in U^c} B_{\frac{r}{2^i}}(x) \Big).$$

显然 K_i 都是有界闭集且 $K_i \subset U$。事实上，K_i 可以写为

$$K_i = \big\{ x \in U \;\big|\; \|x\| \le 2^i, d(x, U^c) \ge \frac{r}{2^i} \big\}.$$

由此不难验证 $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ 满足引理中的 (i), (ii)。 □

练习 2 验证上述 $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ 满足引理中的 *(i), (ii)*。

证明 [定理 4的证明：] 首先对 U 取紧的穷竭 $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ 如上引理。令 $B_m := K_m \setminus K_{m-1}^{\circ}$ 以及 $U_m := K_{m+1}^{\circ} \setminus K_{m-2}$，这里补充定义 $K_0 = K_{-1} := \emptyset$。则 B_m 是紧集，U_m 是开集，$B_m \subset U_m$，并且 $U_m \cap U_{m+3} = \emptyset$。

我们取一族开球 $B_{\varepsilon_{m,j}}(x_{m,j})$ 如下：对任意 $x \in B_m$，可以取 $\varepsilon > 0$ 使得 $B_{2\varepsilon}(x) \subset U_m$，并且存在 $i \in \Gamma$ 使得同时也有 $B_{2\varepsilon}(x) \subset V_i$。由于 $B_m \subset \cup_{x \in B_m} B_\varepsilon(x)$，由紧性（Heine-Borel 定理），可以找到有限个点 $x_{m,1}, \ldots x_{m,j_m}$ 使得对于对应的半径 $\varepsilon_{m,j}$，满足：

- $B_m \subset \cup_{j=1}^{m_j} B_{\varepsilon_{m,j}}(x_{m,j})$;
- $B_{2\varepsilon_{m,j}}(x_{m,j}) \subset U_m, j = 1, \ldots j_m$;
- 每个 $B_{2\varepsilon_{m,j}}(x_{m,j})$ 都包含在某个 V_i 中 $(j = 1, \ldots, j_m)$。

Claim: $\{B_{2\varepsilon_{m,j}}(x_{m,j})\}_{j=1,\ldots,j_m; m=1,\ldots,\infty}$ 是 $\{V_i\}_{i \in \Gamma}$ 的局部有限加细覆盖。

首先

$$U = \cup_{m=1}^{\infty} B_m \subset \cup_m \cup_j B_{\varepsilon_{m,j}}(x_{m,j}) \subset \cup_m \cup_j B_{2\varepsilon_{m,j}}(x_{m,j}) \subset \cup_m U_m \subset U,$$

于是 $U = \cup_{m,j} B_{\varepsilon_{m,j}}(x_{m,j}) = \cup_{m,j} B_{2\varepsilon_{m,j}}(x_{m,j})$。确实是开覆盖。又由 $\varepsilon_{m,j}$ 的选取可知 $\{B_{2\varepsilon_{m,j}}(x_{m,j})\}_{j=1,\ldots,j_m; m=1,\ldots,\infty}$ 是 $\{V_i\}_{i \in \Gamma}$ 的加细覆盖。

还需要说明局部有限性：为此，注意到对任何 $B_{2\varepsilon_{m,j}}(x_{m,j}) \subset U_m$，当 $k \ge m+3$ 时，必有 $B_{2\varepsilon_{m,j}}(x_{m,j}) \cap U_k = \emptyset$，所以这个加细覆盖中与 $B_{2\varepsilon_{m,j}}(x_{m,j})$ 相交非空的只有有限个，由此立即得到局部有限性。

现在对每个这样的 $B_{2\varepsilon_{m,j}}(x_{m,j})$，由前面的构造，可以找到非负的 $\tilde{\phi}_{m,j} \in C^\infty(U)$ 满足 $supp \tilde{\phi}_{m,j} \subset B_{2\varepsilon_{m,j}}(x_{m,j})$ 并且 $\tilde{\phi}_{m,j}|_{B_{\varepsilon_{m,j}}(x_{m,j})} \equiv 1$。由局部有限性 $\sum_{m,j} \tilde{\phi}_{m,j} \in C^\infty(U)$，并且由于 $\{B_{\varepsilon_{m,j}}(x_{m,j})\}_{m,j}$ 已经是 U 的覆盖，还可以得到 $\sum_{m,j} \tilde{\phi}_{m,j}$ 在 U 上处处为正。最后我们可以定义

$$\phi_{m,j} := \frac{\tilde{\phi}_{m,j}}{\sum_{m,j} \tilde{\phi}_{m,j}}.$$

即有 $\sum_{m,j} \phi_{m,j} \equiv 1$。 □

注 2 本节的两个单位分解定理对一般的微分流形也成立，只需把证明开始部分稍加修改即可。我们后面会具体讨论。单位分解定理的本质是“仿紧性”(*paracompactness*)，对拓扑的讨论感兴趣的同学可参考 *Munkres* 的“*Topology*”一书。

3 单位分解定理的一些应用

单位分解定理是一个很有用的工具，我们后面也会多次用到。这里我们仅仅举两个例子。

截断函数（cut-off function）的存在性

考虑 $\mathbb{R}^n$ 中的闭子集 A，以及 A 的一个开邻域 $A \subset U \subset \mathbb{R}^n$。则 U 和 $\mathbb{R}^n \setminus A$ 构成了 $\mathbb{R}^n$ 的开覆盖。由单位分解定理 2，存在 $\eta_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 满足 $supp\eta_1 \subset U, supp\eta_2 \subset \mathbb{R}^n \setminus A$ 并且 $\eta_1 + \eta_2 \equiv 1$。由于 η_2 在 A 上恒为 0，所以 η_1 在 A 上恒为 1。

推论 2 (截断函数的存在性) 假设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是真闭子集，U 是 A 的开邻域。则存在 $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 满足 $0 \le \psi \le 1$，$supp\psi \subset U$，并且 $\psi|_A \equiv 1$。

最常见的情形是 A 是紧集，这时候的截断函数在广义函数论和线性偏微分方程理论中很有用。参考 Hörmander 的“*The analysis of linear partial differential operators*” vol.1。

连续映射的光滑逼近

为了下一节利用微分学讨论连续映射的同伦，我们再证明一个连续映射的光滑逼近引理：

引理 2 假设 $A \subset U_0 \subset U \subset \mathbb{R}^n$，其中 U_0, U_1 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开子集，A 是 U 中的相对闭子集（即 $\mathbb{R}^n$ 中闭子集与 U 的交）。$h: U \to W$ 是连续映射，其中 W 是 $\mathbb{R}^m$ 中的开子集。再假设 $h|_{U_0}$ 是光滑的。则任给一个正值的连续函数 (“可容许的误差”) $\varepsilon: U \to (0,\infty)$，存在光滑映射 $f: U \to W$，满足:

(i) $\|f(x) - h(x)\| \le \varepsilon(x), \forall x \in U;$

(ii) $f(x) = h(x), \forall x \in A$。

证明 先假设 $W = \mathbb{R}^m$，这时我们不必担心逼近映射的取值是否会跑出 W。

我们的想法是在 A 以外的每一点 p 处，选 p 的小邻域，在上面用 $h(p)$ 这个常值映射来逼近 $h(x)$。一个困难是这些局部的构造如何拼起来？用“单位分解”! 具体构造如下：

对任何 $p \in U \setminus A$，由 h, ε 的连续性，可以找到以 p 为心的开球 B_p 满足：

- $B_p \subset U \setminus A$;
- $\|h(x) - h(p)\| < \varepsilon(x), \forall x \in B_p$。（先取 B_p 使得 $\|h(x) - h(p)\| < \frac{1}{2}\varepsilon(p), \forall x \in B_p$，再适当缩小 B_p 使得在其上 $\varepsilon(x)$ 的取值都大于 $\frac{1}{2}\varepsilon(p)$。）

现在 U_0 和这些 U_p 构成 U 的开覆盖，由定理 2，存在一族非负的 U 上的光滑函数 $\phi_0, \phi_p, p \in U \setminus A$，满足 $supp\phi_0 \subset U_0, supp\phi_p \subset U_p$，并且 $\phi_0 + \sum_{p \in U \setminus A} \phi_p \equiv 1$。注意这里其实在每一点附近都是有限和。

现在定义

$$f(x) := \phi_0(x)h(x) + \sum_{p \in U \setminus A} \phi_p(x)h(p).$$

则 $f: U \to \mathbb{R}^m$ 是光滑映射，并且

$$\begin{aligned}\|f(x) - h(x)\| &= \|\phi_0(x)h(x) + \sum_{p \in U \setminus A} \phi_p(x)h(p) - \big(\phi_0(x) + \sum_{p \in U \setminus A} \phi_p(x)\big)h(x)\| \\ &= \|\sum_{p \in U \setminus A} \phi_p(x)\big(h(p) - h(x)\big)\| \le \sum_{p \in U \setminus A} \phi_p(x)\|h(p) - h(x)\| \le \varepsilon(x).\end{aligned}$$

又，当 $x \in A$ 时，由于 $supp\phi_p \subset B_p \subset U \setminus A$，$\phi_p(x) = 0$，进而 $\phi_0(x) = 1$，得到 $f(x) = h(x)$。

最后对于一般的 W，上述证明有些地方会出问题：做了改动后如何保证仍有 $f(x) \in W$？我们的想法是适当缩小 ε！对任意的 x，由于 $h(x) \in W$，故 $d(h(x), W^c) > 0$。定义

$$\tilde{\varepsilon}(x) := \min\{\varepsilon(x), \frac{1}{2}d(h(x), W^c)\}.$$

则 $\tilde{\varepsilon}$ 仍然连续，并且 $0<\tilde{\varepsilon}(x)\leq\varepsilon(x)$。对这个 $\tilde{\varepsilon}$ 替代 ε 重复上面的构造，则有

$$\|f(x)-h(x)\|\leq\tilde{\varepsilon}(x)\leq\varepsilon(x),$$

以及

$$\|f(x)-h(x)\|\leq\frac{1}{2}d(h(x),W^c)<d(h(x),W^c).$$

从而仍有 $f(x)\in W$。 □