第五讲

石亚龙

回顾：上次我们讨论了 de Rham 上同调的 Mayer-Vietoris 序列。在证明过程中一个重要工具是单位分解。在最后我们利用单位分解证明了一个连续映射用光滑映射逼近的定理。该定理是说：对任何欧氏空间开集之间的连续映射 $h: U \to W$，如果存在开子集 U_0 和 U 的闭子集 $A \subset U_0$ 使得 $h|_{U_0}$ 光滑，那么任给一个连续的"误差函数" $\varepsilon: U \to (0,\infty)$，都可以找到光滑映射 $f: U \to W$ 使得 $\|f-h\| \le \varepsilon$，并且 $f|_A = h|_A$。今天我们将利用这个工具来研究 de Rham 上同调与同伦映射之间的关系。

1 同伦与 de Rham 上同调

回忆一些点集拓扑的概念：集合 X 上的一个"拓扑"是指 X 的一族子集 τ（称为"开集"），满足：$X, \emptyset$ 都是开集；任意个开集的并是开集；有限个开集的交是开集。赋予了一个拓扑的集合称为一个"拓扑空间"。两个拓扑空间 X,Y 之间的映射称为是连续的，如果开集的原像都是开集。两个拓扑空间 X,Y 的乘积上有一个自然的拓扑，其中的开集是能够写成形如 $U \times V$ 的子集的并的集合，其中 U,V 分别是 X,Y 中的开集。以下都假设 X,Y 是拓扑空间（如不熟悉一般的拓扑空间，可以假设 X,Y 都是度量空间）。

假设 $f_0, f_1: X \to Y$ 是连续映射。称 f_0 与 f_1 同伦，（记为 $f_0 \sim f_1$）如果存在连续映射 $F: X \times [0,1] \to Y$，满足 $F(\cdot,0) = f_0, F(\cdot,1) = f_1$。直观上看，就是说可以用一族连续映射 $F(\cdot,t)$ 将 f_0 变到 f_1。容易验证映射之间的同伦是一个等价关系，即满足：

- 自反性：$f \sim f$；（取 $F(x,t) \equiv f(x)$ 即可）
- 对称性：若 $f_0 \sim f_1$，则 $f_1 \sim f_0$；（若 F 是 f_0 到 f_1 的同伦，则 $G(x,t) = F(x,1-t)$ 是 f_1 到 f_0 的同伦）
- 传递性：若 $f_0 \sim f_1$ 且 $f_1 \sim f_2$，则 $f_0 \sim f_2$。（假设 F_0 和 F_1 是这两个同伦，则可以构造 f_0 到 f_2 的同伦 G 如下：当 $t \in [0,\frac{1}{2}]$ 时，令 $G(x,t) = F_0(x,2t)$；当 $t \in [\frac{1}{2},1]$ 时，令 $G(x,t) = F_1(x,2t-1)$。）

映射在同伦关系下的等价类称为映射的"同伦类"。

另一个常用的性质是：如果 $f_0 \sim f_1: U \to V$，$g_0 \sim g_1: V \to W$，则有 $g_0 \circ f_0 \sim g_1 \circ f_1$。事实上，假设 $F: U \times [0,1] \to V$ 和 $G: V \times [0,1] \to W$ 分别是两个同伦，令

$$H(x,t) := G(F(x,t),t) : U \times [0,1] \to W,$$

则有 $H(x,0) = G(F(x,0),0) = g_0 \circ f_0$，$H(x,1) = G(F(x,1),1) = g_1 \circ f_1$。

例 1 假设 Y 是 $\mathbb{R}^m$ 中关于某点 O 的星形区域，则任何 X 到 Y 的连续映射 f 都同伦于常值映射 $g \equiv O$：只需要令 $F(x,t) := (1-t)f(x) + tO$。

两个拓扑空间 X,Y 称为同伦等价，如果存在连续映射 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to X$ 满足 $f \circ g \sim id_Y$，$g \circ f \sim id_X$。这时候称 g 是 f 的"同伦逆"。容易验证：拓扑空间之间的同伦等价也是一个等价关系，其等价类称为一个"同伦型"。

例 2 假设 Y 是 $\mathbb{R}^m$ 中关于某点 O 的星形区域，则 Y 同伦等价于单点空间 $\{p\}$。

事实上考虑映射 $\iota: \{p\} \to Y$，$p \mapsto O$；和映射 $c: Y \to \{p\}$，$y \mapsto p, \forall y \in Y$。于是 $c \circ \iota = id_p$，而 $\iota \circ c: Y \to Y$ 是常值映射 $g \equiv O$。由上一例子可知 $id_Y \sim g$，从而 Y 与 $\{p\}$ 同伦等价。

同伦于单点空间的拓扑空间称为“可缩”的（contractible）。所以凸区域和更一般的星形区域都是可缩的。对于一般的开集 U 如何验证可缩性？注意到 U 到单点空间 $\{p\}$ 的映射只有一个 $c:U\to\{p\}$，而 $\{p\}$ 到 U 的映射 ι 相当于指定 U 中一点，于是 $c\circ\iota=id_p$ 总成立，$\iota\circ c$ 就是 U 到 U 的一个常值映射。所以 U 可缩当且仅当 id_U 同伦于一个 U 到 U 的常值映射。

引理 1 假设 U,V 分别是 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^m$ 中的非空开集。

(1) 任何连续映射 $f:U\to V$ 都同伦于一个光滑映射 $g:U\to V$；

(2) 假设 $f_0,f_1:U\to V$ 都是光滑映射，并且同伦，则它们也光滑同伦，即存在光滑映射 $G:U\times\mathbb{R}\to V$ 满足 $G(\cdot,0)=f_0,G(\cdot,1)=f_1$。

证明 先证明映射的同伦逼近：与上次课最后的定理证明类似，考虑正值连续函数 $\varepsilon(x):U\to(0,\infty)$

$$\varepsilon(x):=\frac{1}{2}d(f(x),V^c)=\frac{1}{2}\inf\{\|y-f(x)\|\mid y\in\mathbb{R}^m\setminus V\}.$$

只要能找到光滑映射 $g:U\to\mathbb{R}^m$ 满足 $\|f(x)-g(x)\|<\varepsilon(x),\forall x\in U$，就有 $g(x)\in B_{\varepsilon(x)}(f(x))\subset V$，并且连接 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的直线段都落在 V 中，从而可以定义同伦

$$F(x,t):=(1-t)f(x)+tg(x).$$

这样光滑逼近 g 的存在性只需要利用单位分解即可：对任何 $x\in U$，由 f 和 ε 的连续性，存在 x 的开邻域 U_x 满足：对任意 $y\in U_x$，有 $\|f(y)-f(x)\|<\frac{1}{2}\varepsilon(x)<\varepsilon(y)$。所有这样的 U_x 覆盖 U，可以找到从属于这个覆盖的单位分解 $\{\phi_x\}$，$supp\phi_x\subset U_x$ 并且 $\sum_x\phi_x\equiv 1$。进而定义

$$g(y):=\sum_{x\in U}\phi_x(y)f(x).$$

由于在每一点 y 附近只有有限个 ϕ_x 不恒为 0，所以上式定义了到 $\mathbb{R}^m$ 的光滑映射。并且由于 $f(y)=1\cdot f(y)=\sum_{x\in U}\phi_x(y)f(y)$，得到

$$\begin{aligned}\|f(y)-g(y)\| &= \|\sum_{x\in U}\phi_x(y)(f(y)-f(x))\|\\ &\le \sum_{x\in U}\phi_x(y)\|f(y)-f(x)\|<\sum_{x\in U}\phi_x(y)\varepsilon(y)=\varepsilon(y).\end{aligned}$$

再考虑同伦的光滑逼近。假设 $F:U\times[0,1]\to V$ 是 f_0,f_1 之间的同伦。取一个光滑函数 $\psi(t)\in C^\infty(\mathbb{R})$，$0\le\psi\le 1$ 且满足：$\psi|_{(-\infty,\frac{1}{3}]}\equiv 0,\psi|_{[\frac{2}{3},\infty)}\equiv 1$。令 $G(x,t):U\times\mathbb{R}\to V$ 为 $G(x,t):=F(x,\psi(t))$。则由 f_0,f_1 光滑，可知 G 在 $U_0:=U\times\Big((-\infty,\frac{1}{3})\cup(\frac{2}{3},\infty)\Big)$ 上光滑。令 $A=U\times\{0,1\}\subset U_0$，由上次课的定理可以得到光滑映射 $H:U\times\mathbb{R}\to V$，满足 $H|_A=G|_A$。（这里可以任取一个合适的 ε，只要能保证 H 取值于 V 即可）。由于 $H(x,0)=G(x,0)=F(x,\psi(0))=F(x,0)=f_0(x)$，$H(x,1)=G(x,1)=F(x,\psi(1))=F(x,1)=f_1(x)$，于是 f_0,f_1 光滑同伦。 □

下面的定理是此前证明的 Poincaré 引理的一个一般形式，完全是同样的构造：

定理 1 假设 $f,g:U\to V$ 是光滑映射，假设 $f\sim g$，则它们诱导的链映射

$$f^*,g^*:\Omega^*(V)\to\Omega^*(U)$$

是链同伦的，从而诱导相同的同态 $f^*=g^*:H^*(V)\to H^*(U)$。

证明 由引理 1，可以假设存在光滑映射 $G: U\times\mathbb{R}\to V$ 使得 $G(\cdot,0)=f, G(\cdot,1)=g$。回忆此前我们证明 Poincaré 引理时引入的构造：$\hat{S}_p:\Omega^p(U\times\mathbb{R})\to\Omega^{p-1}(U)$，$(p>0)$

$$\hat{S}_p\Big(\sum_I a_I(x,t)dx_I+\sum_J b_J(x,t)dt\wedge dx_J\Big)=\sum_J\big(\int_0^1 b_J(x,t)dt\big)dx_J,$$

通过直接计算我们得到了

$$(d\hat{S}_p+\hat{S}_{p+1}d)\Big(\sum_I a_I(x,t)dx_I+\sum_J b_J(x,t)dt\wedge dx_J\Big)=\sum_I a_I(x,1)dx_I-\sum_I a_I(x,0)dx_I.$$

利用拉回映射可以将上式写得更干净一点：考虑光滑映射 $i_0,i_1:U\to U\times\mathbb{R}$，$i_j(x):=(x,j), j=0,1$。于是

$$i_j^*\Big(\sum_I a_I(x,t)dx_I+\sum_J b_J(x,t)dt\wedge dx_J\Big)=\sum_I a_I(x,j)dx_I,\quad j=0,1.$$

所以得到 $d\hat{S}_p+\hat{S}_{p+1}d=i_1^*-i_0^*$。

现在定义 $S_p:\Omega^p(V)\to\Omega^{p-1}(U)$ 为 $S_p:=\hat{S}_p\circ G^*$。再补充定义 $S_0:=0$。于是在 $p>0$ 时

$$(dS_p+S_{p+1}d)(\omega)=(d\hat{S}_p+\hat{S}_{p+1}d)(G^*\omega)=i_1^*(G^*\omega)-i_0^*(G^*\omega)=(G\circ i_1)^*\omega-(G\circ i_0)^*\omega=g^*\omega-f^*\omega.$$

当 $p=0$ 时，对任意的 $h(y)\in\Omega^0(V)=C^\infty(V,\mathbb{R})$，有

$$\begin{aligned}(dS_0+S_1d)(h)&=S_1(dh)=\hat{S}_1(G^*dh)=\hat{S}_1d(G^*h)\\&=\hat{S}_1\Big(\frac{\partial h\circ G}{\partial t}dt+\sum_i\frac{\partial h\circ G}{\partial x_i}dx_i\Big)=\int_0^1\frac{\partial h\circ G}{\partial t}dt\\&=h(G(\cdot,1))-h(G(\cdot,0))=h\circ g-h\circ f=g^*h-f^*h.\end{aligned}$$

于是总有 $dS_p+S_{p+1}d=g^*-f^*$。 □

由引理 1，假设 $f:U\to V$ 是**连续**映射，则一定可以找到光滑映射 $g:U\to V$ 满足 $f\sim g$。并且假如 $h:U\to V$ 是另外一个光滑映射满足 $f\sim h$，则光滑映射 g,h 同伦，由定理 1 可知 $g^*=h^*:H^*(V)\to H^*(U)$。于是我们可以定义 $f^*:H^*(V)\to H^*(U)$ 为 $f^*:=g^*$。总结起来，我们得到：

定理 2 (de Rham 上同调的同伦不变性) *假设 U,V 分别是 $\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m$ 中的开集，$f:U\to V$ 是连续映射，则对任意 $p\geq 0$，f 诱导线性映射 $f^*:H^p(V)\to H^p(U)$。并且有：*

- *(i)* 假设 $\phi_0,\phi_1:U\to V$ 是同伦的连续映射，则 $\phi_0^*=\phi_1^*:H^*(V)\to H^*(U)$；
- *(ii)* 如果 $f:U\to V$，$g:V\to W$ 是连续映射，其中 $W\subset\mathbb{R}^d$ 是非空开集，则 $(g\circ f)^*=f^*\circ g^*:H^*(W)\to H^*(U)$；
- *(iii)* 假设 $f:U\to V$ 是同伦等价，则 $f^*:H^*(V)\to H^*(U)$ 是同构。

证明 (i): 假设 $\phi_0\sim\phi_1$。分别取光滑映射 $\psi_0,\psi_1:U\to V$ 满足 $\psi_i\sim\phi_i, i=0,1$，则有 $\psi_0\sim\psi_1$。利用定理 1 可知 $\psi_0^*=\psi_1^*:H^*(V)\to H^*(U)$。由 ϕ_0^*,ϕ_1^* 的定义知 $\phi_0^*=\phi_1^*$。

(ii): 分别取光滑映射 $\phi:U\to V$ 和 $\psi:V\to W$ 满足 $\phi\sim f,\psi\sim g$。于是有 $g\circ f\sim\psi\circ\phi$，于是根据定义：

$$(g\circ f)^*=(\psi\circ\phi)^*=\phi^*\circ\psi^*=f^*\circ g^*:H^*(W)\to H^*(U).$$

(iii): 假设 $g:V\to U$ 满足 $f\circ g\sim id_V, g\circ f\sim id_U$，则由 (ii) 可知

$$g^*\circ f^*=(f\circ g)^*=id_V^*=id,\quad f^*\circ g^*=(g\circ f)^*=id_U^*=id.$$

这说明 f^*,g^* 都是 de Rham 上同调之间的同构映射。 □

2 同伦不变性的应用

我们来利用同伦不变性计算一些开集的 de Rham 上同调。首先，由于同胚一定同伦等价，所以有：

推论 1 假设 U 与 V 同胚，则它们具有同构的 *de Rham* 上同调。

推论 2 假设 U 可缩，则有

$$H^p(U) = \begin{cases} \mathbb{R}, & p = 0; \\ 0, & p \neq 0. \end{cases}$$

证明 假设 $\iota : \{p\} \to U$ 是一个同伦等价，它的同伦逆为常值映射 $c : U \to \{p\}$。对于另一可缩空间 $\mathbb{R}^n$，我们有同伦等价 $\tilde{\iota} : \{p\} \to \mathbb{R}^n$，$j(p) = O$，及其同伦逆 $\tilde{c} : \mathbb{R}^n \to \{p\}$。考虑映射 $f : U \to \mathbb{R}^n$ 和 $g : \mathbb{R}^n \to U$

$$f := \tilde{\iota} \circ c, \quad g := \iota \circ \tilde{c}.$$

则有

$$f \circ g = \tilde{\iota} \circ c \circ \iota \circ \tilde{c} = \tilde{\iota} \circ id_p \circ \tilde{c} = \tilde{\iota} \circ \tilde{c} \sim id_{\mathbb{R}^n}$$

以及

$$g \circ f = \iota \circ \tilde{c} \circ \tilde{\iota} \circ c = \iota \circ id_p \circ c = \iota \circ c \sim id_U.$$

于是 g 是 f 的同伦逆，从而 f^*, g^* 都是同构。由 Poincaré 引理立即得到所需结论。 □

例 3 假设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是非空开集，则 U 与 $U \times (a,b)$ 一定同伦等价，这里 a,b 允许为 $-\infty$ 或 ∞。事实上任取一点 $c \in (a,b)$，定义包含映射 $\iota : U \to U \times (a,b)$ 为 $x \mapsto (x,c)$。再考虑投影 $p : U \times (a,b) \to U$，$p(x,s) := x$。则有 $p \circ \iota = id_U$，$\iota \circ p(x,s) = (x,c)$。容易看到 $\iota \circ p \sim id_{U \times (a,b)}$。（同伦映射可以取为 $F(x,s,t) = (x,(1-t)c+ts)$。）所以我们得到 $H^*(U \times (a,b)) \cong H^*(U)$。

在下面的应用中，我们将 $\mathbb{R}^n$ 等同于 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的坐标超平面 $\{(x_1,\ldots,x_n,0) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$，常值函数的集合记为 $\mathbb{R} \cdot 1$。我们将要综合应用同伦不变性和 Mayer-Vietoris 序列来算一个例子：

命题 1 假设 $A \subsetneq \mathbb{R}^n$ 是闭子集，则在上述等同下，有

$$H^p(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & p = 0; \\ H^0(\mathbb{R}^n \setminus A)/\mathbb{R} \cdot 1, & p = 1; \\ H^{p-1}(\mathbb{R}^n \setminus A), & p > 1. \end{cases}$$

证明 首先容易看出 $\mathbb{R}^{n+1} \setminus A$ 总是道路连通的，从而 $H^0(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) = \mathbb{R}$。为计算其他的 H^p，我们利用 Mayer-Vietoris 序列。

为此，定义两个开集 $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 如下：

$$U_1 := \Big(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)\Big) \cup \Big((\mathbb{R}^n \setminus A) \times (-1,\infty)\Big)$$

$$U_2 := \Big(\mathbb{R}^n \times (-\infty,0)\Big) \cup \Big((\mathbb{R}^n \setminus A) \times (-\infty,1)\Big).$$

则有 $U_1 \cup U_2 = \mathbb{R}^{n+1} \setminus A$, $U_1 \cap U_2 = (\mathbb{R}^n \setminus A) \times (-1,1)$。显然映射 $(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}) \mapsto (x_1,\ldots,x_n,-x_{n+1})$ 是一个 U_1 到 U_2 之间的同胚映射。而由前面的讨论 $H^*(U_1 \cap U_2) \cong H^*(\mathbb{R}^n \setminus A)$。

从几何直观上看，U_1 在 $x_{n+1} = 0$ 下方的部分可以连续地“收缩”进 $x_{n+1} > 0$ 部分，从而进一步可收缩到一点。所以 U_1 应该是可缩的！下面我们来严格证明 U_1 可缩，即证明 id_{U_1} 同伦于一个 U_1 到 U_1 的常值映射。

为此我们分两步走，先证明 id_{U_1} 同伦于“向上走”映射 $\phi(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}) := (x_1,\dots,x_n,x_{n+1}+1)$，再证明 ϕ 同伦于常值映射。

$\underline{id_{U_1} \text{ 同伦于 } \phi : U_1 \to U_1}$: 原因在于：$id_{U_1}$ 与 ϕ 的像点的连线总是落在 U_1 中，于是可定义同伦映射 $F_1 : U_1 \times [0,1] \to U_1$ 为

$$F_1(x,t) := (1-t)x + t\phi(x).$$

$\underline{\phi : U_1 \to U_1 \text{ 同伦于一个常值映射}}$: 例如可以令 $c : U_1 \to U_1$ 为 $c(x) \equiv (0,\dots,0,1)$。注意到 ϕ 的像集落在上半空间 $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} | \, x_{n+1} > 0\}$ 中，而后者关于点 $(0,\dots,0,1)$ 是星形的，所以 $\phi(x)$ 与 $(0,\dots,0,1)$ 的连线总落在 $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} | \, x_{n+1} > 0\} \subset U_1$ 中，可以取同伦

$$F_2(x,t) = (1-t)\phi(x) + t(0,\dots,0,1).$$

综上，U_1 与 U_2 都可缩，从而

$$H^p(U_i) = \begin{cases} \mathbb{R}, & p = 0; \\ 0, & p > 0. \end{cases}$$

此时从 Mayer-Vietoris 序列得到：

$$0 \to H^0(U_1 \cup U_2) \xrightarrow{I^*} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{J^*} H^0(\mathbb{R}^n \setminus A) \xrightarrow{\delta} H^1(U_1 \cup U_2) \to 0 \to \dots$$

$$\dots \to 0 \to H^{p-1}(\mathbb{R}^n \setminus A) \xrightarrow{\delta} H^p(U_1 \cup U_2) \to 0 \to \dots$$

由此直接得到 $p \geq 2$ 时有 $H^p(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) \cong H^{p-1}(\mathbb{R}^n \setminus A)$，以及

$$H^1(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) = Im(\delta) \cong H^0(\mathbb{R}^n \setminus A)/Im(J^*).$$

分析 J^* 映射，容易看出 $J^*(a,b) = a - b$ 是 $(\mathbb{R}^n \setminus A) \times (-1,1)$ 上的常值函数，所以 $Im(J^*) = \mathbb{R} \cdot 1$。 □

推论 3 对任何 $n \geq 2$，有

$$H^p(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & p = 0, n-1; \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

证明 我们用数学归纳法来证明。$n = 2$ 的情形此前已算过。假设 $n = k, k \geq 2$ 的情形已经证明，则对 $\mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}$，有：

- $H^0(\mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}) = \mathbb{R}$;
- $H^1(\mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}) \cong H^0(\mathbb{R}^k \setminus \{0\})/\mathbb{R} = 0$;
- $p \geq 2$ 时，$H^p(\mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}) \cong H^{p-1}(\mathbb{R}^k \setminus \{0\}) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & p = k; \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$

从而 $n = k+1$ 时命题也成立。 □

推论 4 假如 $m \neq n$，则 $\mathbb{R}^m$ 不能同胚于 $\mathbb{R}^n$。

证明 假如有这样的同胚 $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$，通过复合 $\mathbb{R}^n$ 中的平移（当然是同胚变换）不妨设 $f(0) = 0$。于是得到 $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ 同胚于 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$，特别地，它们具有同构的 de Rham 上同调，与上定理矛盾。 □

作为今天课程的结束，我们来证明著名的 Brouwer 不动点定理：

定理 3 (Brouwer) 任何闭单位球 $\bar{B} \subset \mathbb{R}^n$ 到自身的连续映射一定有不动点。

证明 证明的想法如下：假设 $f:\bar{B}\to\bar{B}$ 没有不动点，则可以定义一个连续映射 $g:\bar{B}\to\partial B=S^{n-1}\subset\bar{B}$ 如下：考虑从 $f(x)$ 出发，沿着 $\overline{f(x)x}$ 方向的射线，它交 ∂B 于唯一一点 y，定义 $g(x):=y$。如果 $x\in\partial B$，则显然有 $g(x)=x$。直观上，把一个实心球体以保持边界不动的方式压缩到边界上，似乎总要"扯破"一些东西，即这样的 $\bar{B}$ 到 ∂B 的连续映射不可能存在。

下面我们来仔细讨论：

g 的连续性： 事实上不难求得 $g(x)$ 的解析表达式：如果记 $u(x):=\frac{x-f(x)}{\|x-f(x)\|}$，则 u 连续。而直接计算得到

$$g(x)=x+\Big(-x\cdot u(x)+\sqrt{1-\|x\|^2+(x\cdot u(x))^2}\Big)u(x),$$

从而 g 连续。

保持边界不动的连续映射 $g:\bar{B}\to\partial B$ 不可能存在： 假如这样的映射存在，考虑映射 $r:\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$，$r(x):=\frac{x}{\|x\|}$。则 $id_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\sim r$，因为 $r(x)$ 与 x 的连线都在 $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 中。考虑连续映射 $F(x,t):=g(t\cdot r(x)):(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})\times[0,1]\to\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$。它满足：$F(x,0)=g(0)\in\partial B\subset\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 是常值映射，而 $F(x,t)=g(r(x))=r(x)$。于是 r 同伦于常值映射，进而 $id_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}$ 同伦于常值映射。这说明 $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 可缩，与推论3的计算结果矛盾。 □

练习 1 假设 U,V 分别是 $\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m$ 中的非空开集，连续映射 $f:U\to V$ 同伦于常值映射，证明：当 $p>0$ 时，f 诱导的 $f^*:H^p(V)\to H^p(U)$ 是零映射。

练习 2 假设 $p_1,\ldots,p_k$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中共线的 k 个点 $(n\geq 2,k\geq 1)$，证明：

$$H^p(\mathbb{R}^n\setminus\{p_1,\ldots,p_k\})\cong\begin{cases}\mathbb{R}, & p=0;\\ \mathbb{R}\oplus\cdots\oplus\mathbb{R},(k\ copies) & p=n-1;\\ 0, & otherwise.\end{cases}$$

（提示：首先在 $n=2$ 时利用 *Mayer-Vietoris* 序列对 k 做数学归纳法，然后对 n 用数学归纳法。关键点在于：半平面挖去一点和全平面挖去一点是同胚的。）

练习 3 假设 $f,g:X\to S^n$ 是两个连续映射，满足对任何 $x\in X$ 都有 $g(x)\neq -f(x)$。证明：$f\sim g$。

练习 4 假设 $f:X\to S^n$ 是连续映射。证明：如果 f 不是满射，则 f 一定同伦于一个常值映射。