

第六讲

石亚龙

回顾：上次我们讨论了 de Rham 上同调的同伦不变性，作为应用，我们计算了 $H^*(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A)$ ，其中 $A \subsetneq \mathbb{R}^n$ 是 \mathbb{R}^n 的闭子集。作为特例，我们计算了 $H^*(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ ，并由此给出了 Brouwer 不动点定理的证明。今天我们再给几个应用。

1 欧氏空间 de Rham 上同调的应用

首先我们回忆度量空间的 Tietze 扩张定理：假设 $A \subset X$ 是度量空间 X 中的闭子集，则任何 A 上的连续函数可以延拓为 X 上的连续函数。在欧氏空间的情形我们可以和前面一样用单位分解来统一处理：

引理 1 (Urysohn-Tietze) 假设 $A \subsetneq \mathbb{R}^n$ 是闭子集， $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是连续映射，则存在连续映射 $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 使得 $g|_A = f$ 。

证明 对任何 $p \in \mathbb{R}^n \setminus A$ ，考虑开球

$$B_p := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - p\| < \frac{1}{2}d(p, A)\},$$

则有 $\mathbb{R}^n \setminus A = \cup_{p \in \mathbb{R}^n \setminus A} B_p$ 。考虑从属于开覆盖 $\{B_p\}$ 的单位分解 $\phi_p \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus A)$ ，满足 $0 \leq \phi_p \leq 1$ ， $\text{supp}_{\mathbb{R}^n \setminus A} \phi_p \subset B_p$ ，“局部有限”，并且 $\sum_{\mathbb{R}^n \setminus A} \phi_p \equiv 1$ 。

对每个 $p \in \mathbb{R}^n \setminus A$ ，（任意）取一点 $a(p) \in A$ 满足 $\|p - a(p)\| < 2d(p, A)$ 。定义 $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ：

$$g(x) := \begin{cases} f(x), & \text{if } x \in A; \\ \sum_{p \in \mathbb{R}^n \setminus A} \phi_p(x) f(a(p)), & \text{if } x \in \mathbb{R}^n \setminus A. \end{cases}$$

下面说明 g 即为所求。首先显然 $g|_A = f$ ，并且由于局部有限性 g 在 $\mathbb{R}^n \setminus A$ 上连续（甚至光滑）。 g 在 A° 上的连续性由 $g|_A = f$ 可知。于是只要说明 g 在 ∂A 的每一点都连续。假设 $x_0 \in \partial A (\subset A)$ ，对于 $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ ，显然有

$$\|g(x) - g(x_0)\| = \left\| \sum_{p \in \mathbb{R}^n \setminus A} \phi_p(x) (f(a(p)) - f(x_0)) \right\| \leq \sum_{p \in \mathbb{R}^n \setminus A} \phi_p(x) \|f(a(p)) - f(x_0)\|,$$

注意 $\phi_p(x)$ 仅当 $x \in B_p$ 时才可能非零。此时 $\|x - p\| < \frac{1}{2}d(p, A)$ ，而 $d(p, A) \leq \|a(p) - p\| < 2d(p, A)$ ，于是有

$$d(p, A) \leq \|p - x_0\| \leq \|p - x\| + \|x - x_0\| < \frac{1}{2}d(p, A) + \|x - x_0\|,$$

即 $d(p, A) \leq \|p - x_0\| < 2\|x - x_0\|$ 。此时，得到

$$\|a(p) - x_0\| \leq \|a(p) - p\| + \|p - x_0\| < 6\|x - x_0\|.$$

任取 $\varepsilon > 0$ ，由 f 连续，存在 $\delta_0 > 0$ ，使得当 $\|y - x_0\| < \delta_0, y \in A$ 时就有 $\|f(y) - f(x_0)\| < \varepsilon$ 。令 $\delta := \frac{\delta_0}{6}$ ，则当 $\|x - x_0\| < \delta$ 时：

1、如果 $x \in A$ ，则 $\|g(x) - g(x_0)\| = \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$ 。

2、如果 $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$, 则当 $x \in B_p$ 时, 有 $\|a(p) - x_0\| < 6\|x - x_0\| < 6\delta = \delta_0$, 所以有

$$\|g(x) - g(x_0)\| \leq \sum_{p \in \mathbb{R}^n \setminus A, \phi_p(x) > 0} \phi_p(x) \|f(a(p)) - f(x_0)\| < \varepsilon \sum_{p \in \mathbb{R}^n \setminus A, \phi_p(x) > 0} \phi_p(x) = \varepsilon.$$

于是总有 $\|g(x) - g(x_0)\| < \varepsilon$, 从而 g 在 x_0 处连续。 □

一个直接的应用是:

引理 2 假设 $A \subset \mathbb{R}^n, B \subset \mathbb{R}^m$ 都是闭子集, 并且 $\phi: A \rightarrow B$ 是一个同胚。则存在 \mathbb{R}^{n+m} 到自身的同胚 h , 使得对任何 $x \in A$, 都有

$$h(x, 0_m) = (0_n, \phi(x)).$$

证明 对 pair (\mathbb{R}^n, A) 用 Tietze-Urysohn 引理, 可得到连续映射 $f_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, 满足 $f_1|_A = \phi$ 。由此定义 $h_1: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ 如下:

$$h_1(x, y) := (x, y + f_1(x)).$$

易见 h_1 是个同胚 (其逆映射是 $(u, v) \mapsto (u, v - f_1(u))$)。

同理, 再将连续映射 $\phi^{-1}: B \rightarrow A$ 扩张为连续映射 $f_2: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, 满足 $f_2|_B = \phi^{-1}$, 并定义 $h_2: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ 如下:

$$h_2(x, y) := (x + f_2(y), y).$$

同样 h_2 也是同胚, 其逆为 $h_2^{-1}(u, v) = (u - f_2(v), v)$ 。

最后令 $h := h_2^{-1} \circ h_1$, 则有

$$h(x, 0_m) = h_2^{-1}(x, f_1(x)) = (x - f_2 \circ f_1(x), f_1(x)).$$

当 $x \in A$ 时 $f_1(x) = \phi(x) \in B$, 进而 $f_2(f_1(x)) = f_2(\phi(x)) = \phi^{-1}(\phi(x)) = x$, 从而 $h(x, 0_m) = (0_n, \phi(x))$ 。 □

推论 1 假设 $\phi: A \rightarrow B$ 是 \mathbb{R}^n 中闭子集之间的同胚, 则 ϕ 可扩张为 \mathbb{R}^{2n} 到自身的同胚。

注 1 由上述推论可知: $\mathbb{R}^{2n} \setminus A$ 同胚于 $\mathbb{R}^{2n} \setminus B$ 。这里需要小心: 一般而言 $\mathbb{R}^n \setminus A$ 未必同胚于 $\mathbb{R}^n \setminus B$ 。一个著名的例子是所谓 Alexander's horned sphere:

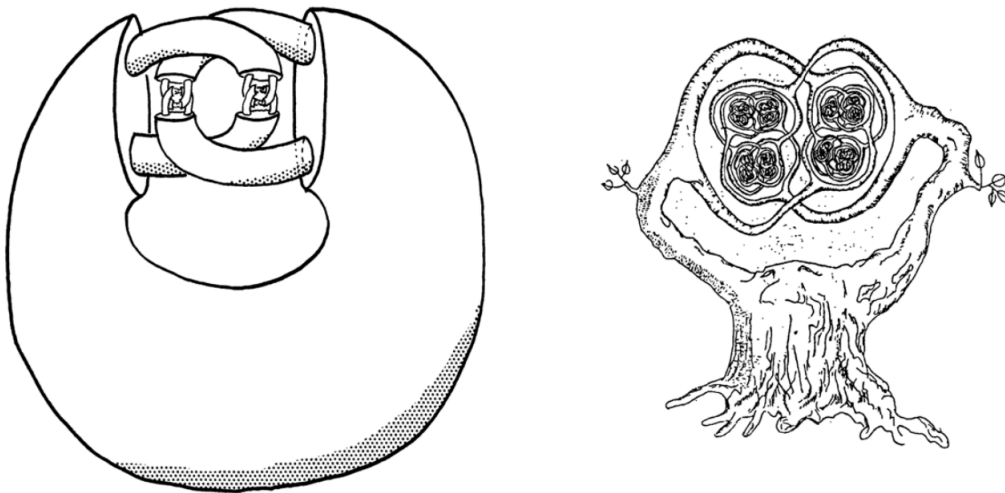


Figure 1: Alexander's horned sphere(摘自 Rolfsen "Knots and Links")

定理 1 假设 $A \subsetneq \mathbb{R}^n, B \subsetneq \mathbb{R}^n$ 都是闭集并且同胚, 则

$$H^p(\mathbb{R}^n \setminus A) \cong H^p(\mathbb{R}^n \setminus B).$$

证明 利用上节的计算, 可知当 $p \geq 1$ 时, $H^p(\mathbb{R}^n \setminus A) \cong H^{p+1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) \cong \dots \cong H^{p+n}(\mathbb{R}^{2n} \setminus A)$, 同理有 $H^p(\mathbb{R}^n \setminus B) \cong H^{p+n}(\mathbb{R}^{2n} \setminus B)$. 由上推论知 $\mathbb{R}^{2n} \setminus A$ 同胚于 $\mathbb{R}^{2n} \setminus B$, 所以

$$H^p(\mathbb{R}^n \setminus A) \cong H^{p+n}(\mathbb{R}^{2n} \setminus A) \cong H^{p+n}(\mathbb{R}^{2n} \setminus B) \cong H^p(\mathbb{R}^n \setminus B).$$

而当 $p = 0$ 时, 有 $H^0(\mathbb{R}^n \setminus A)/\mathbb{R} \cdot 1 \cong H^1(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) \cong \dots \cong H^n(\mathbb{R}^{2n} \setminus A)$, 同理有

$$H^0(\mathbb{R}^n \setminus B)/\mathbb{R} \cdot 1 \cong H^n(\mathbb{R}^{2n} \setminus B) \cong H^n(\mathbb{R}^{2n} \setminus A) \cong H^0(\mathbb{R}^n \setminus A)/\mathbb{R} \cdot 1.$$

由此得出 $H^0(\mathbb{R}^n \setminus A) \cong H^0(\mathbb{R}^n \setminus B)$. □

作为应用, 我们得到:

定理 2 (Jordan-Brouwer 分离定理) 假设 $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) 是闭子集, 且同胚于 S^{n-1} , 则:

- (i) $\mathbb{R}^n \setminus \Sigma$ 恰有两个连通分支 U_1, U_2 , 并且一个有界一个无界;
- (ii) Σ 是 U_1 和 U_2 的公共边界.

证明 (i), 令 $A = \Sigma, B = S^{n-1}$, 则有 $H^0(\mathbb{R}^n \setminus \Sigma) \cong H^0(\mathbb{R}^n \setminus S^{n-1}) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. 所以 $\mathbb{R}^n \setminus \Sigma$ 也有两个连通分支, 记为 U_1, U_2 . 令 $r := \max\{\|x\| \mid x \in \Sigma\}$, 则连通的开集 $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_r(0)} \subset \mathbb{R}^n \setminus \Sigma$. 于是 $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_r(0)}$ 一定包含于 $\mathbb{R}^n \setminus \Sigma$ 的某个连通分支中, 不妨设在 U_2 中. 于是

$$U_1 \subset \mathbb{R}^n \setminus U_2 \subset \mathbb{R}^n \setminus (\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_r(0)}) = \overline{B_r(0)},$$

所以 U_1 有界.

(ii), 下面说明 $\Sigma = \partial U_1 = \partial U_2$. 首先 $U_i \cup \Sigma$ 都是 \mathbb{R}^n 的开子集的补集, 所以是闭集, 于是 $\overline{U_i} \subset U_i \cup \Sigma$, 进而有 $\partial U_i = \overline{U_i} \setminus U_i \subset \Sigma$. 于是只要说明 Σ 中任意一点都是 ∂U_i 的边界点即可. 为此任取一点 $p \in \Sigma$, 并任取它在 \mathbb{R}^n 中的足够小的开邻域 V 使得 $\Sigma \not\subset V$. 则 $A := \Sigma \setminus (\Sigma \cap V)$ 是 Σ 的闭子集, 从而也是 \mathbb{R}^n 的闭子集. A 在同胚 $\Sigma \rightarrow S^{n-1}$ 下的像记为 B , 则 B 也是 \mathbb{R}^n 的闭子集, 并且 $\mathbb{R}^n \setminus B$ 是连通的. (直观上 B 是在球面上开了个“口子”, 于是球面内外可以连起来.) 于是根据 $H^0(\mathbb{R}^n \setminus A) \cong H^0(\mathbb{R}^n \setminus B)$, $\mathbb{R}^n \setminus A$ 也(道路)连通.

取一条连续的道路 $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus A$, 满足 $\gamma(0) = p_1 \in U_1, \gamma(1) = p_2 \in U_2$. 但是由 (i), γ 的像一定与 Σ 相交. $\gamma^{-1}(\Sigma) \subset (0, 1)$ 是一个非空闭子集. 假设 c_1, c_2 分别是 $\gamma^{-1}(\Sigma) \subset (0, 1)$ 中的最小值和最大值, 则 $0 < c_1 < c_2 < 1$, 并且 $\gamma(c_i) \in \Sigma$ 但 $\gamma(c_i) \notin A = \Sigma \setminus (\Sigma \cap V)$, 即 $\gamma(c_i) \in \Sigma \cap V$. 由 γ 的选取可知 $\gamma([0, c_1]) \subset U_1, \gamma([c_2, 1]) \subset U_2$. 所以根据连续性, $U_i \cap V$ 都非空. 即 p 的任意小的开邻域中都有 U_1, U_2 中的点, 从而 p 是 U_i 的边界点. □

练习 1 假设 U 是 \mathbb{R}^n 中的开集, $\overline{B_r(0)} \subset U$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是连续单射. 记 $\Sigma := f(\partial B_r(0))$, 赋予 \mathbb{R}^n 的子空间拓扑. 证明: $f|_{\partial B_r(0)}: \partial B_r(0) \rightarrow \Sigma$ 是同胚. (提示: 为证明 f 的逆映射连续, 只需要证明 f 是闭映射, 即闭集的像是闭的. 通过紧集在连续映射下的性质来做.)

练习 2 假设同上一题. 利用 Jordan-Brouwer 定理, 证明 $f(B_r(0))$ 是 \mathbb{R}^n 中开集, 从而 f 是开映射, 进而得到 f 一定是同胚. (Brouwer 的 “invariance of domain” 定理)

2 微分流形

为了扩大微分形式和 de Rham 上同调的应用范围，我们需要引入“微分流形”的概念。

粗略地讲，微分流形就是可以做微积分的拓扑空间。我们只会欧氏空间的开集上做微积分，所以第一个要求是微分流形要局部同胚于欧氏空间的开集：

条件 1: (存在“坐标覆盖”) 存在拓扑空间 M 的开覆盖 $M = \cup_{i \in I} U_i$ ，其中每个 U_i 都同胚于 \mathbb{R}^n 中开集。即存在一族同胚 $\phi_i: U_i \rightarrow \phi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$ 。每一个 (U_i, ϕ_i) 称为 M 的一个坐标卡， $\phi_i(q)$ 称为 q 点的在此坐标卡下的“坐标”。坐标卡全体 $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ 称为 M 的一个“坐标图册”或“图汇”(atlas)。

在上述假设下，对于函数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ ，我们就可以通过坐标卡转化为欧氏空间开集上的函数，称为“ f 的坐标表示”。即：对坐标卡 (U, ϕ) ，考虑 $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ 上的函数 $f \circ \phi^{-1}$ 。我们的想法是：利用坐标表示来研究原来的函数。例如，如果 $f \circ \phi^{-1}$ 连续，我们就称 f 在 U 上连续；如果 $f \circ \phi^{-1}$ 在 $\phi(U)$ 上 C^k ，我们就称 f 在 U 上 C^k ……

问题是：这样的定义是否是无矛盾的？假设 p 被两片坐标卡 $(U, \phi), (V, \psi)$ 覆盖，如果 $f \circ \phi^{-1}$ 在 $\phi(p)$ 附近是 C^k 的，是否 $f \circ \psi^{-1}$ 在 $\psi(p)$ 附近也是 C^k 的？

分析： $f \circ \psi^{-1} = (f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \psi^{-1})$ ，只要 $\phi \circ \psi^{-1}$ 总是 C^∞ 的就行！

条件 2: (相容性条件) 对于条件 1 中的坐标卡 (U_i, ϕ_i) ，如果 $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ ，则映射 $\phi_i \circ \phi_j^{-1}: \phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j)$ 是 C^∞ 映射。

条件 1,2 是微分流形定义中最关键的条件。但是通常为了避免“病态”的例子出现，我们通常加上两个拓扑条件：

条件 3: (T_2 和 C_2 条件) M 是 Hausdorff 空间（任意两点都存在不相交的开邻域），并且具有可数拓扑基（即存在可数无穷个开集 $\{V_j\}$ 使得 M 的任意开集都能写成一些 V_j 的并）。

定义 1 满足条件 1,2,3 的拓扑空间 M 称为一个 n 维的微分流形。

例 1 \mathbb{R}^n 中的开集 U 可以自然视为微分流形，此时只要一个坐标卡 (U, id) 就够了。可数拓扑基可以取为 $\{B_r(x_i) \subset U \mid r_i \in \mathbb{Q}, x_i \in \mathbb{Q}^n\}$ 。

例 2 $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ 。它是紧致 Hausdorff 空间，并且满足第二可数公理。坐标图卡可以用如下方式选取：考虑 $U_0 = S^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\}$ ， $U_1 = S^n \setminus \{(0, \dots, 0, -1)\}$ ，则 $S^n = U_0 \cup U_1$ 。令 ϕ_0 和 ϕ_1 分别是“从北极”和“从南极”出发的“球极投影”(stereographic projection)：

$$\phi_0(x_1, \dots, x_{n+1}) := \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}} \right), \quad \phi_1(x_1, \dots, x_{n+1}) := \left(\frac{x_1}{1+x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1+x_{n+1}} \right).$$

容易看到

$$\phi_0^{-1}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \left(\frac{2\xi_1}{\|\xi\|^2 + 1}, \dots, \frac{2\xi_n}{\|\xi\|^2 + 1}, \frac{\|\xi\|^2 - 1}{\|\xi\|^2 + 1} \right)$$

$$\phi_1^{-1}(\eta_1, \dots, \eta_n) = \left(\frac{2\eta_1}{\|\eta\|^2 + 1}, \dots, \frac{2\eta_n}{\|\eta\|^2 + 1}, \frac{1 - \|\eta\|^2}{\|\eta\|^2 + 1} \right)$$

都连续，所以 ϕ_0, ϕ_1 都是同胚，并且 $\phi_0(U_0 \cap U_1) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\} = \phi_1(U_0 \cap U_1)$ ，

$$\phi_0 \circ \phi_1^{-1}(\eta_1, \dots, \eta_n) = \left(\frac{\eta_1}{\|\eta\|^2}, \dots, \frac{\eta_n}{\|\eta\|^2} \right), \quad \phi_1 \circ \phi_0^{-1}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \left(\frac{\xi_1}{\|\xi\|^2}, \dots, \frac{\xi_n}{\|\xi\|^2} \right)$$

都是 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 上的 C^∞ 映射，所以 $\{(U_0, \phi_0), (U_1, \phi_1)\}$ 是 S^n 的一个光滑图册。

另一种常见的坐标卡可以如下选取：对 $i = 1, \dots, n+1$ ，令 $V_i^\pm := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid \pm x_i > 0\}$ 。坐标映射可以取为：

$$\psi_i^\pm: V_i^\pm \rightarrow B_1(0) \subset \mathbb{R}^n, \quad (x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}).$$

坐标变换的光滑性留作练习。

例 3 (n 维实射影空间) 令 $\mathbb{R}P^n$ 为 \mathbb{R}^{n+1} 的所有 1 维线性子空间 (= 过原点的直线) 全体构成的集合。我们可以给它一个 n -维微分流形的结构: $\mathbb{R}P^n$ 可以等同于 $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$, 其中两个非零向量 \mathbf{v}, \mathbf{w} 等价当且仅当存在非零实数 λ 使得 $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{w}$ 。非零向量 $x = (x_0, \dots, x_n)$ 的等价类记为 $[x_0, \dots, x_n]$, 同时我们称 (x_0, \dots, x_n) 为 $\mathbb{R}P^n$ 中点 $[x_0, \dots, x_n]$ 的“齐次坐标”。注意: 齐次坐标并不是真正意义上的坐标, 因为并不唯一, 而是差一个非零的倍数。考虑“商映射” $\pi: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^n$, $\pi(x_0, \dots, x_n) := [x_0, \dots, x_n]$, 并赋予 $\mathbb{R}P^n$ 商拓扑, 即 $\mathbb{R}P^n$ 的子集 U 是开集当且仅当 $\pi^{-1}(U)$ 是 $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ 中的开集。容易证明在此拓扑下 $\mathbb{R}P^n$ 是 Hausdorff 空间。此时 π 连续, 而 S^n 在 π 下的像就是整个的 $\mathbb{R}P^n$, 所以 $\mathbb{R}P^n$ 做为紧集在连续映射下的像也是紧的。下面我们给出一个坐标覆盖:

对 $i = 0, \dots, n$ 令 $U_i := \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{R}P^n \mid x_i \neq 0\}$, 则由定义可知 U_i 是 $\mathbb{R}P^n$ 的开集, 并且 $\mathbb{R}P^n = \bigcup_{i=0}^n U_i$ 。由此立即可以得到 $\mathbb{R}P^n$ 的可数拓扑基。下面我们造 U_i 到 \mathbb{R}^n 的同胚 ϕ_i 如下:

$$\phi_i([x_0, \dots, x_n]) := \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\hat{x}_i}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right).$$

它有连续的逆映射

$$\phi_i^{-1}(\xi_1, \dots, \xi_n) = [\dots, \xi_i, 1, \xi_{i+1}, \dots].$$

作为练习, 请验证当 $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ 时, 坐标变换 $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ 和 $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ 都是 C^∞ 映射。

注 2 由前面的例子可以看到, S^n 有不只一种方式实现为微分流形, 但是容易看到, 将 $\{(U_i, \phi_i), \{(V_j^\pm, \psi_j^\pm)\}$ 放在一起仍然是一个光滑的图册, 将它们视为两个不同的微分流形是不恰当。显然任何一个光滑图册 $\{(U_i, \phi_i)\}$ 都唯一决定一个“极大”的光滑图册——如果一个新的图卡 (U, ϕ) 跟 $\{(U_i, \phi_i)\}$ 相容 (即如果 $U \cap U_i \neq \emptyset$, 则 $\phi \circ \phi_i^{-1}$ 和 $\phi_i \circ \phi^{-1}$ 都是 C^∞ 映射), 则将 (U, ϕ) 添加进来。因此我们将一个极大的光滑图册 $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ 称为 M 的一个“光滑结构”。

定义 2 两个微分流形 M 和 N 之间的连续映射 $f: M \rightarrow N$ 称为光滑的, 如果它的任何“坐标表示” $\psi \circ f \circ \psi^{-1}$ 在定义域上都是 C^∞ 映射。如果 M 与 N 之间存在的光滑映射 $f: M \rightarrow N$, $g: N \rightarrow M$ 满足 $f \circ g = id_N, g \circ f = id_M$, 则称 M 与 N 微分同胚 (diffeomorphic), 并称 f 或 g 是 M 与 N 之间的微分同胚 (diffeomorphism)。

例 4 n 维开球 $B_r(0) \subset \mathbb{R}^n$ 总是微分同胚于 \mathbb{R}^n 。可以造一个微分同胚如下: 不妨设 $r = 1$, 定义 $f: B_1(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ 如下:

$$f(x) := \tan\left(\frac{\pi\|x\|}{2}\right) \cdot \frac{x}{\|x\|}.$$

由 \tan 在原点的 Taylor 展开可知 f 是 C^∞ 映射, 并且可以求逆: 假设 $y = f(x)$, 则 $\|y\| = \tan\left(\frac{\pi\|x\|}{2}\right)$, 所以 $\|x\| = \frac{2}{\pi} \arctan\|y\|$ 。于是有

$$x = f^{-1}(y) = \frac{2}{\pi} \arctan\|y\| \cdot \frac{y}{\|y\|}.$$

这也是 C^∞ 映射。

练习 3 证明 \mathbb{R}^n 中的方体 $(0, 1) \times (0, 1) \times \dots \times (0, 1)$ 微分同胚于 \mathbb{R}^n 。

例 5 考虑 \mathbb{R} 的如下两个图卡 (U, ϕ) 和 (V, ψ) : $U = \mathbb{R}$, $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi(x) := x$; 以及 $V = \mathbb{R}$, $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi(x) := x^3$ 。则光滑图册 $\{(U, \phi)\}$ 和 $\{(V, \psi)\}$ 各决定 \mathbb{R} 的一个微分结构。注意: 这两个微分结构并不相同! 因为虽然坐标变换 $\psi \circ \phi^{-1}(x) = x^3$ 是 C^∞ 的, 但 $\phi \circ \psi^{-1}(y) = y^{\frac{1}{3}}$ 在原点不可微!

如果将对应的微分流形记为 \mathbb{R}_1 和 \mathbb{R}_2 , 二者其实是微分同胚的。考虑连续映射 $f: \mathbb{R}_1 \rightarrow \mathbb{R}_2$ 为 $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, 则 $\psi \circ f \circ \phi^{-1}(x) = x$ 是 C^∞ 的。同时它的逆映射 $g(y) = y^3$ 满足 $\phi \circ g \circ \psi^{-1}(y) = y$ 也是 C^∞ 的。

注 3 事实上, 可以证明: 除 \mathbb{R}^4 以外, 在微分同胚的意义下 \mathbb{R}^n 的微分结构唯一。而 \mathbb{R}^4 具有不可数无穷多个彼此不微分同胚的微分结构。这个证明需要 *Donaldson* 关于规范场 (*Yang-Mills* 理论) 与 4 维流形拓扑的理论。至于 S^n , *Milnor* 最早发现存在一个同胚于 S^7 但不微分同胚于标准 S^7 的微分流形, 称为“怪球” (*exotic sphere*)。对 7 维怪球, *Brieskorn* 证明了当 $k = 1, 2, \dots, 28$ 时, 下述 *Brieskorn* 流形遍历拓扑 7 维球面的全部 28 个互不等价的定向微分结构:

$$\{(z_1, \dots, z_5) \in \mathbb{C}^5 \mid z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^3 + z_5^{6k-1} = 0, |z_1|^2 + \dots + |z_5|^2 = \varepsilon^2 > 0\}.$$

关于各种维数怪球的研究很多, 例如 2016 年王国桢和徐宙立证明了不存在 61 维怪球, 并且对于奇数维球面而言, 只有 S^1, S^3, S^5, S^{61} 的微分结构在微分同胚意义下是唯一。而是否存在 4 维怪球是微分拓扑领域至今仍未解决的著名问题。

我们再讲一些从已知微分流形出发构造更多微分流形的办法。今天先介绍乘积流形, 下次课将系统介绍子流形, 事实上所有的微分流形都可以实现为欧氏空间的子流形 (*Whitney*)。

假设 M 和 N 分别是 n 维和 m 维微分流形, 其光滑图册分别为 $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ 和 $\{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ 。则我们可以给 $M \times N$ 一个微分结构, 其拓扑就是标准的乘积拓扑, 即 $M \times N$ 的开集就是能够表示为一些形如 $W_\alpha \times X_\alpha$ 集合的并, 其中 W_α, X_α 分别是 M 和 N 中的开集。则不难证明 $M \times N$ 也是具有可数拓扑基的 *Hausdorff* 空间。此时 $\{(U_i \times V_j, \phi_i \times \psi_j)\}_{i \in I, j \in J}$ 就是 $M \times N$ 的一个光滑图册。

例 6 $T^n : S^1 \times \dots \times S^1$ 是一个 n 维的紧致微分流形, 称为 n -维环面。