第八讲

石亚龙

在讨论了流形的例子之后，我们开始系统的研究。首先从流形上的微分学开始。

1 流形上的切向量、切空间与切映射

对于 $\mathbb{R}^n$ 中光滑曲线 $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}^n$，我们都知道 γ 在 $p=\gamma(0)$ 处的切向量是 $\gamma'(0)$。如果 γ 是流形上的光滑曲线，我们应该怎样定义它在 $p=\gamma(0)$ 处的切向量？一个自然的想法是利用坐标图卡：假设 (U,ϕ) 是 $p=\gamma(0)$ 处的坐标图卡，则 γ 是光滑曲线等价于它的坐标表示

$$\phi\circ\gamma(t)=(x_1(t),\ldots,x_n(t))$$

是 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 上的光滑向量值函数。自然可以想到应该利用

$$(\phi\circ\gamma)'(0)=(x_1'(0),\ldots,x_n'(0))\in\mathbb{R}^n$$

来表示 γ 在 $p=\gamma(0)$ 处的切向量。

在从欧氏空间开集过渡到流形这一“从局部到整体”的过程中，很重要的一点是讨论对坐标系的依赖性——只有那些不依赖于坐标系选取的量或概念才是真正“几何”的，而非“人造”的。

我们来看看刚才讨论的曲线的坐标表示的切向量如何依赖与坐标系的选取：假设 (V,ψ) 是 $p=\gamma(0)$ 附近另一坐标图卡，在此图卡下 γ 的坐标表示为

$$\psi\circ\gamma(t)=(y_1(t),\ldots,y_n(t)).$$

一般而言 $(\psi\circ\gamma)'(0)=(y_1'(0),\ldots,y_n'(0))\neq(\phi\circ\gamma)'(0)$。事实上利用复合函数求导的链式法则，我们直接计算得到

$$\begin{aligned}(\psi\circ\gamma)'(0) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\psi\circ\gamma)(t)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\psi\circ\phi^{-1})\circ(\phi\circ\gamma)(t)\\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\psi\circ\phi^{-1})\big(x_1(t),\ldots,x_n(t)\big)\\ &= \Big(\sum_j\frac{\partial y_1}{\partial x_j}(\phi(p))x_j'(0),\ldots,\sum_j\frac{\partial y_n}{\partial x_j}(\phi(p))x_j'(0)\Big).\end{aligned}$$

如果我们混淆一下记号，认为 $\phi\circ\gamma,\psi\circ\gamma$ 等等都是列向量，则上式可以用矩阵表示为

$$(\psi\circ\gamma)'(0)=J(\psi\circ\phi^{-1})(\phi(p))\cdot(\phi\circ\gamma)'(0).$$

物理学家解决这个问题的方法是：所谓的一个“切向量”（物理学家称为“反变向量”），就是每给我一个图卡 (U,ϕ)，我就指定一个向量 $(a_1,\ldots,a_n)$。两个不同的图卡下向量的变换规律如上式。如果用数学家的方式描述，就得到了

定义 1 (切向量定义 1——物理学家的方式) 流形 M^n 上 p 点处的一个切向量是一个三元组 (U,ϕ,a) 的等价类，其中 (U,ϕ) 是 p 附近的一个图卡，$a=(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n$。等价关系定义为：$(U,\phi,a)\sim(V,\psi,b)$ 当且仅当

$$b_i=\sum_j\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(\phi(p))a_j,$$

其中 $(\frac{\partial y_i}{\partial x_j})=J(\psi\circ\phi^{-1})$。

这个定义的缺点在于太零乱。我们再给一个几何的定义：

定义 2 (切向量定义 2——几何学家的方式) *流形 M^n 上 p 点处的一个切向量是一个过 p 的光滑曲线 γ 的等价类，其中 $\gamma_1 \sim \gamma_2$ 当且仅当 $\gamma_1(0)=\gamma_2(0)=p$ 且它们在某个 p 附近图卡 (U,ϕ) 下的坐标表示在 $\phi(p)$ 处切向量相等。p 点处切向量 $[\gamma]$ 的全体构成的集合称为 p 点的"切空间"（tangent space），记为 T_pM 或者 M_p。*

不难验证：如果 $(\phi\circ\gamma_1)'(0)=(\phi\circ\gamma_2)'(0)$，则对 p 附近的任何其他光滑图卡 (V,ψ)，也有 $(\psi\circ\gamma_1)'(0)=(\psi\circ\gamma_2)'(0)$。所以这个定义也是不依赖于坐标图卡选取的。你能否看出 T_pM 是一个 n-维的线性空间？从物理学家的观点看，这是很显然的，但是从几何学家的观点看，这恐怕是不容易的。为此我们再引入第三个定义——代数学家的定义：将切向量定义为沿该方向求方向导数这一"算子"。首先考虑在 p 的某个邻域上定义的光滑函数全体

$$C_p^\infty := \{f \mid f\in C^\infty(U)\ \text{其中}U\text{为 } p \text{ 点的某个开邻域}\}.$$

定义 3 (切向量定义 3——代数学家的方式) [1] *流形 M^n 上 p 点处的一个切向量是一个 C_p^∞ 上的"导子"（derivation），即映射 $v: C_p^\infty\to\mathbb{R}$，满足如下条件：*

(1) (线性性：) 假设 $f,g\in C^\infty(U)$，$a,b\in\mathbb{R}$，则 $v(af+bg)=av(f)+bv(g)$;

(2) (Leibniz 法则：) 假设 $f,g\in C^\infty(U)$，则 $v(fg)=v(f)g(p)+f(p)v(g)$。

对这些"导子"，我们可以定义加法和数乘：$(v+w)(f):=v(f)+w(f),(\lambda v)(f):=\lambda\cdot v(f)$。于是它们构成一个实线性空间。

需要说明三种定义的等价性。

首先我们简要地解释为什么物理学家的切向量和几何学家的等价。任给一个"物理学家的切向量" $[(U,\phi,a)]$，其中 $a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$。考虑 $\tilde{\gamma}(t):=\phi(p)+ta$，并令 $\gamma:=\phi^{-1}\circ\tilde{\gamma}:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$。则 γ 是 M 上光滑曲线，且 $\gamma(0)=p$。于是得到一个几何学家的切向量 $[\gamma]$。作为练习，请同学们验证：这是 well-defined——如果 $(V,\psi,b)\sim(U,\phi,a)$，则对应的曲线与 γ 等价。反之，任给一个"几何学家的切向量" $[\gamma]$，对任何 $p=\gamma(0)$ 附近的光滑图卡 (U,ϕ)，我们也可以得到一个"物理学家的切向量" $[(U,\phi,a)]$ 其中 $a=(\phi\circ\gamma)'(0)$。这个对应也是 well-defined，并且这两个操作是互逆的。

由于我们主要使用后两种定义，我们详细讨论后两种定义的等价性：我们将几何学家的切向量全体构成的集合记为 $T_p^{(geo)}M$，将代数学家的切向量全体构成的集合记为 $T_p^{(alg)}M$。[2]

从"几何学家的切向量" $[\gamma]\in T_p^{(geo)}M$ 出发，可以很容易得到一个"代数学家的切向量" $\gamma'(0)$ 如下：假设 $f\in C_p^\infty$，则定义

$$\gamma'(0)(f):=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(f\circ\gamma).$$

作为一个求导运算，它自然是线性的，且满足 Leibniz 法则。在光滑图卡 (U,ϕ) 之下，记 $\phi\circ\gamma(t)=\big(x_1(t),\dots,x_n(t)\big)$，则有

$$\begin{aligned}
\gamma'(0)(f) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(f\circ\gamma)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(f\circ\phi^{-1})\circ(\phi\circ\gamma)\\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(f\circ\phi^{-1})\big(x_1(t),\dots,x_n(t)\big)\\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial x_i}(\phi(p))\cdot x_i'(0).
\end{aligned}$$

[1] 事实上还有一种代数几何学家的定义，最早由 O.Zariski 给出。他的办法是：首先考虑 $\mathscr{E}_p:=C_p^\infty/\sim$，其中 $f\in C^\infty(U)$ 与 $g\in C^\infty(V)$ 等价当且仅当存在 p 的开邻域 $W\subset U\cap V$，使得 $f|_W\equiv g|_W$。$\mathscr{E}_p$ 有一个自然的交换环结构，其元素称为 p 处一个光滑函数的"芽"（germ）。$\mathscr{E}_p$ 只有一个极大理想 $\mathfrak{m}_p=\{[f]\in\mathscr{E}_p \mid f(p)=0\}$。不难证明 $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ 是一个 n 维线性空间，我们定义 T_pM 为其对偶空间 $(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*=Hom(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2,\mathbb{R})$。

[2] 暂时的、非标准的记号！

由此也可以看出：如果 $\gamma\sim\sigma$，则 $\gamma'(0)(f)=\sigma'(0)(f)$，因为这时候 $(\phi\circ\gamma)'(0)=(\phi\circ\sigma)'(0)$。所以 $[\gamma]\mapsto\gamma'(0)$ 是一个 well-defined 映射 $\Phi: T_p^{(geo)}M\to T_p^{(alg)}M$。

这个映射一定是单射：假如对 $[\gamma_1],[\gamma_2]\in T_p^{(geo)}$ 有 $\gamma_1'(0)=\gamma_2'(0)$。任取 p 附近的坐标图卡 (U,ϕ)，记 $\phi\circ\gamma_i(t)=\left(x_1^{(i)}(t),\ldots,x_1^{(i)}(t)\right), i=1,2$。将 $\gamma_i'(0)$ 作用于坐标函数 $x_1,\ldots,x_n$，得到：

$$\gamma_1'(0)(x_k)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}x_k\circ\gamma_1(t)=(x_k^{(1)})'(0).$$

同理 $\gamma_2'(0)(x_k)=(x_k^{(2)})'(0)$。于是得到 $(x_k^{(1)})'(0)=(x_k^{(2)})'(0), k=1,\ldots,n$，这说明 $\gamma_1\sim\gamma_2$，即 $[\gamma_1]=[\gamma_2]$。

为说明 Φ 也是一个满射，我们首先看几个特殊的代数学家的切向量：给定 p 附近的坐标图卡 (U,ϕ)，记 $\phi=(x_1,\ldots,x_n)$。定义 $\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$ 为：

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p(f):=\frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial x_i}(\phi(p)),\quad \forall f\in C_p^\infty.$$

容易看出，$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\in Im(\Phi)$——事实上，考虑坐标曲线 $\gamma_i(t):=\phi^{-1}\Big(\phi(p)+te_i\Big)$，其中 $e_i=(0,\ldots,1,\ldots,0)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准基，则

$$\gamma_i'(0)(f)=\frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial x_i}(\phi(p))=\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p(f).$$

利用 $\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$，我们可以将前面 $\gamma'(0)(f)$ 的计算结果改写为

$$\gamma'(0)(f)=\sum_i x_i'(0)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p(f),$$

或者等价地，$\gamma'(0)=\sum_i x_i'(0)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$。事实上，我们还有更强的结果：

Claim: 任何一个 $v\in T_p^{(alg)}M$ 都可以被 $\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p,\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p$ 线性表出。

为此我们需要如下的：

引理 1 对任何 $a\in\mathbb{R}^n$ 附近定义的光滑函数 F，都存在 a 附近的光滑函数 $G_1,\ldots,G_n$，满足

$$F(x)-F(a)=\sum_i(x_i-a_i)G_i(x),$$

并且 $G_i(a)=\frac{\partial F}{\partial x_i}(a)$。

证明 我们有

$$\begin{aligned}F(x)-F(a) &= \int_0^1\frac{d}{dt}F\big(a+t(x-a)\big)\,dt=\int_0^1\sum_i(x_i-a_i)\frac{\partial F}{\partial x_i}\big(a+t(x-a)\big)\,dt\\ &= \sum_i(x_i-a_i)\cdot\int_0^1\frac{\partial F}{\partial x_i}\big(a+t(x-a)\big)\,dt.\end{aligned}$$

令 $G_i(x):=\int_0^1\frac{\partial F}{\partial x_i}\big(a+t(x-a)\big)\,dt$，则 $G_i(a)=\int_0^1\frac{\partial F}{\partial x_i}\big(a\big)\,dt=\frac{\partial F}{\partial x_i}(a)$。 □

现在在流形上，记 $\phi(p)=a=(a_1,\ldots,a_n)$，对 $F:=f\circ\phi^{-1}$ 用上述引理，我们就有 $F(x)=\sum_i(x_i-a_i)G_i(x)$，并且 $G_i(a)=\frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial x_i}(a)$。令 $g_i:=G_i\circ\phi$，则有 $f=\sum_i(x_i-a_i)g_i$。[3]于是对任意的 $v\in T_p^{(alg)}M$，

[3]注意：这里我们混淆了一下记号！x_i 既可以视为 $U\subset M$ 上的坐标函数，此时我们有 $\phi=(x_1,\ldots,x_n)$；同时，x_i 又可以视为 $\phi(U)\subset\mathbb{R}^n$ 的坐标函数，所以就有如下看起来很奇怪的等式：$x_i\circ\phi=x_i$。这里左边 x_i 是第二种解释，右边的是第一种解释。

和 $f\in C_p^\infty$，有

$$\begin{aligned} v(f) &= v\Big(\sum_i (x_i-a_i)g_i\Big)=\sum_i v\Big((x_i-a_i)g_i\Big) \\ &= \sum_i \Big(v(x_i-a_i)\cdot g_i(p)+(x_i-a_i)(p)\cdot v(g_i)\Big) \\ &= \sum_i c_i g_i(p)=\sum_i c_i G_i(a)=\sum_i c_i \frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial x_i}(a) \\ &= \Big(\sum_i c_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\Big)(f), \end{aligned}$$

其中，我们记 $c_i:=v(x_i-a_i)$，并利用了 $x_i(p)-a_i=0$。所以 $v=\sum_i c_i\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$。

现在我们可以说明 Φ 是满射了：假设 $v=\sum_i c_i\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\in T_p^{(alg)}M$。考虑曲线 $\gamma(t):=\phi^{-1}\Big(\phi(p)+t\sum_i c_ie_i\Big)$，则有 $(\phi\circ\gamma)'(0)=(c_1,\dots,c_n)$。于是由前面的计算，得到 $\Phi([\gamma])=\gamma'(0)=\sum_i c_i\frac{\partial}{\partial x_i}=v$。

所以**从现在开始，我们不再区分两种定义得到的切向量和切空间**。

前面讨论的一个副产品是：

引理 2 假设 M 是 n 维微分流形，$p\in M$，则切空间 T_pM 是 n-维实线性空间。如果取 p 附近的光滑图卡 (U,ϕ)，$\phi=(x_1,\dots,x_n)$，则 $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p,\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p\right\}$ 是 T_pM 的一组基。

证明 由前面的讨论，只需要说明 $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p,\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p\right\}$ 线性无关。

假设有实数 $c_1,\dots,c_n$ 满足 $\sum_i c_i\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p=0$，需要说明 $c_1=\cdots=c_n=0$。为此只需要如下的：

Claim: $\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p(x_j)=\delta_{ij}$。

如果 Claim 成立，立即有 $0=\sum_i c_i\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p(x_j)=\sum_i c_i\delta_{ij}=c_j$。而 Claim 的证明则是（通过“混淆记号”）直接计算：

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p(x_j)=\frac{\partial(x_j\circ\phi^{-1})}{\partial x_i}(\phi(p))=\frac{\partial x_j}{\partial x_i}(\phi(p))=\delta_{ij}.$$

□

如果 $f:M^m\to N^n$ 是光滑映射 $q=f(p)$，则 f 诱导一个切空间之间的线性映射 $D_pf:T_pM\to T_qN$（其他常用的记号包括 $f_*,(df)_p$），称为“切映射”：

$$(D_pf)([\gamma]):=[f\circ\gamma].$$

等价地，如果用代数学家的观点，则有（为了记号简洁，我们这里用 f_*）

$$\Big(f_*(v)\Big)(h):=v(h\circ f),$$

其中 $v\in T_pM$，$h\in C_q^\infty$。

事实上，假设 $v=\gamma'(0)$，则有

$$\Big(f_*(v)\Big)(h)=(f\circ\gamma)'(0)(h)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(h\circ(f\circ\gamma))=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(h\circ f)\circ\gamma=\gamma'(0)(h\circ f)=v(h\circ f).$$

练习 1 假设 p,q 处各取一个坐标图卡 (U,ϕ) 和 (V,ψ)，坐标函数分别记为 $(x_1,\dots,x_m)$ 和 $(y_1,\dots,y_n)$。计算线性映射 D_pf 相对于基 $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\}_{i=1,\dots m}$ 和 $\{\frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_q\}_{j=1,\dots n}$ 的矩阵（利用 f 的坐标表示）。

2 流形上的光滑向量场与微分形式

粗略地讲，一个流形上的向量场就是在每一点 $p \in M$ 指定一个 p 处的切向量：

定义 4 流形 M 上的向量场 X 是一个映射 $X: M \to \sqcup_{p\in M} T_pM$，满足 $X|_p := X(p) \in T_pM$。称 X 是光滑向量场，如果在任何光滑坐标图卡 (U,ϕ) 之下，有 $X_p = \sum_i f_i(p)\frac{\partial}{\partial x_i}|_p$，其中 f_i 都是 U 上的光滑函数。M 上的光滑向量场构成的集合记为 $\mathfrak{X}(M)$。

假设 $X \in \mathfrak{X}(M), f \in C^\infty(M)$，由于 $\forall p \in M$，有 $X_p \in T_pM, f \in C_p^\infty$，我们可以将 X_p 作用于 f，得到 $X_p(f)$。当 p 取遍 M 时，就得到了 M 上的函数 Xf（或记为 $X(f)$）：$(Xf)(p) := X_p(f)$。在局部的坐标邻域 U 中，假设 $X|_U = \sum_i f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$，则有 $(Xf)|_U = \sum_i f_i \frac{\partial}{\partial x_i}(f)$。由于 $\frac{\partial}{\partial x_i}(f)(p) = \frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial x_i}(\phi(p))$，所以作为 U 上的函数，我们有 $\frac{\partial}{\partial x_i}(f) = \frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial x_i}\circ\phi$，其坐标表示就是 $\frac{\partial}{\partial x_i}(f)\circ\phi^{-1} = \frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial x_i}$ 是 $\phi(U)$ 上的光滑函数，从而 $(Xf)\circ\phi^{-1} = \sum_i f_i\circ\phi^{-1}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}(f) \in C^\infty(U)$，所以 $Xf \in C^\infty(M)$。由逐点的 Leibniz 法则，我们有 $X(fg) = (Xf)g + f(Xg)$。

练习 2 一个满足 $X_p \in T_pM$ 的映射 $X: M \to \sqcup_{p\in M} T_pM$，总可以作用在光滑函数 $f \in C^\infty(M)$ 上，得到 M 上的函数：$(Xf)(p) := X_p(f)$。证明：如果对任何 $f \in C^\infty(M)$，都有 $Xf \in C^\infty(M)$，则 X 是光滑向量场。(提示：考虑向量场在坐标函数上的作用，局部的坐标函数怎样变成整体的光滑函数？)

练习 3 假设 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$，对任何光滑函数 f，既然 Xf 与 Yf 仍是光滑函数，我们就可以考虑 $X(Yf)$ 和 $Y(Xf)$。对任何一点 $p \in M$，和 $f \in C_p^\infty$，定义 $[X,Y]_p(f) : X_p(Yf) - Y_p(Xf)$。证明：
(1) $[X,Y]_p \in T_pM$；
(2) $[X,Y]$ 是 M 上的光滑向量场，称为 X,Y 的 *Lie* 括号；
(3) 假设 $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$，证明：$\big[[X,Y],Z\big] + \big[[Y,Z],X\big] + \big[[Z,X],Y\big] = 0$。

与向量场对偶的概念是微分形式：

定义 5 微分流形 M 上一个 k-次微分形式（或简称“k-形式”）是指一个映射 $\omega: M \to \sqcup_{p\in M} Alt^k(T_pM)$，满足 $\omega_p := \omega|_p := \omega(p) \in Alt^k(T_pM)$。

为了刻画一个微分形式何时是连续、光滑的，我们也需要一个局部的坐标表示。为此我们从 1-形式出发：首先回忆 $Alt^1(T_pM) = (T_pM)^*$ 是 T_pM 的对偶空间，我们称之为“余切空间”（cotangent space），记为 T_p^*M。

现在如果 $f \in C_p^\infty$，则 f 定义一个 T_p^*M 的元素 $(df)_p$ 如下：

$$(df)_p(v) := v(f).$$

引理 3 假设 (U,ϕ) 是 p 附近的光滑图卡，$\phi = (x_1,\dots,x_n)$，则 $\{dx_1|_p,\dots,dx_n|_p\}$ 是 T_p^*M 的一组基。并且对任何 $f \in C_p^\infty$，都有

$$(df)_p = \sum_{i=1}^n \Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p(f)\Big) dx_i|_p.$$

证明 由前面的计算

$$dx_i|_p\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p\Big) = \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p(x_i) = \delta_{ij},$$

于是 $\{dx_1|_p,\dots,dx_n|_p\}$ 是 $\Big\{\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p,\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p\Big\}$ 的对偶基。

对于 $f \in C_p^\infty$，以及 $v = \sum_i c_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$，由定义：

$$(df)_p(v) = v(f) = \sum_i c_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p(f).$$

又 $dx_i|_p(v)=\sum_j c_j dx_i|_p(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p)=\sum_j c_j\delta_{ij}=c_i$，所以

$$(df)_p(v)=\sum_i dx_i|_p(v)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p(f)=\Big(\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p(f)\; dx_i|_p\Big)(v),$$

从而 $(df)_p=\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p(f)\right)dx_i|_p$。 □

既然在每一点 $p\in U$ 处 $\{dx_1|_p,\ldots,dx_n|_p\}$ 是 $T_p^*M=Alt^1(T_pM)$ 的基，$\{dx_{i_1}|_p\wedge\ldots dx_{i_k}|_p\}_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}$ 就是 $Alt^k(T_pM)$ 的基。为了记号简便，我们记

$$dx_I|_p:=(dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k})|_p:=dx_{i_1}|_p\wedge\ldots dx_{i_k}|_p,$$

其中 $I=(i_1,\ldots,i_k)$ 是多重指标。当 $p\in U$ 变动时，$dx_I|_p$ 就给出了 U 上一个 k-形式 dx_I。于是任何 M 上的 k-形式 ω 在 U 上都可以唯一地写为

$$\omega|_U=\sum_I f_I dx_I,$$

其中 f_I 是 U 上的函数。

定义 6 流形 M 上的 k-形式 ω 称为是光滑（连续）的，如果在任何光滑坐标图卡 (U,ϕ) 之下，有 $\omega|_U=\sum_I f_I dx_I$，其中 f_I 都是 U 上的光滑（连续）函数。M 上的光滑 k-形式构成的集合记为 $\Omega^k(M)$。同时，我们定义 M 上的光滑 0-形式就是光滑函数，即 $\Omega^0(M)=C^\infty(M)$。

注意对于 M 的任何开集 W，都有一个从 M 继承而来的微分结构，我们称 W 为 M 的“开子流形”，此时我们谈论 W 上的光滑微分形式是有意义的。

注 1 当 M 是 $\mathbb{R}^n$ 的开子集时，我们这里的微分形式的定义与之前定义的是一致的。原因在于 $p\in M\subset\mathbb{R}^n$ 时，我们可以以统一的方式将 $T_pM=T_p\mathbb{R}^n$ 都等同于 $\mathbb{R}^n$（这个等同映射就是 $\sum_i c_i\frac{\partial}{\partial x_i}|_p\mapsto(c_1,\ldots,c_n)$），所以 M 到 $Alt^k(\mathbb{R}^n)$ 的映射就可以看成 M 到 $\sqcup_{p\in M}Alt^k(T_pM)$ 的映射。

例 1 前面已经知道对每个 $f\in\Omega^0(M)$，我们可以定义 $(df)_p\in T_p^*M$，让 p 取遍 M，就得到了 M 上的 1-形式 df。我们前面计算过：在局部坐标图卡 (U,ϕ) 下，有 $(df)_p=\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p(f)\right)dx_i|_p$，这即是说 $df|_U=\sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}(f)dx_i$，其中 $\frac{\partial}{\partial x_i}(f)\in C^\infty(U)$。于是 $df\in\Omega^1(M)$。

3 流形上微分形式的外积与拉回

我们可以把欧氏空间开集上微分形式的运算都推广到流形上。首先是外积：由于 $Alt^*(T_pM)$ 上有外积运算，我们可以逐点定义微分形式的外积运算：假设 $\omega\in\Omega^k(M),\eta\in\Omega^l(M)$，则定义 $(k+l)-$ 形式 $\omega\wedge\eta$ 为：$(\omega\wedge\eta)_p:=\omega_p\wedge\eta_p$。容易验证 $\omega\wedge\eta\in\Omega^{k+l}(M)$。由逐点外积的反交换性，自然也有

$$\omega\wedge\eta=(-1)^{kl}\eta\wedge\omega.$$

拉回运算也可以自然定义在微分流形上：

定义 7 假设 $f:M^m\to N^n$ 是微分流形之间的光滑映射，则可以定义微分形式的拉回如下：假设 $\eta\in\Omega^k(N)$，$q=f(p)$，$v_1,\ldots,v_k\in T_pM$，则定义 $(f^*\eta)_p\in Alt^k(T_pM)$ 为 $(D_pf)^*(\eta_q)$，即

$$(f^*\eta)_p(v_1,\ldots,v_k):=\eta_q(f_*v_1,\ldots,f_*v_k).$$

对于 0-形式 $h\in\Omega^0(N)$，f^*h 定义为 $h\circ f\in\Omega^0(M)$。

显然拉回保持逐点的外积运算。

例 2 假设 $h\in C_q^\infty$ 是 N 上 q 的开邻域中定义的光滑函数，我们来计算一下 $f^*(dh)$。

由定义，对任何切向量 $v\in T_pM$，有 $f^*(dh)(v)=(dh)_q(f_*v)=(f_*v)(h)=v(h\circ f)=d(h\circ f)(v)$，即 $f^*(dh)=d(h\circ f)=d(f^*h)$。

我们来看一个特殊情况：假设 (U,ϕ) 是 M 的一个坐标图卡，则 ϕ^* 将 $\phi(U)$ 中的微分形式拉回到 U 中。注意到此时 $x_i\circ\phi=x_i$（混淆一下记号！），所以 $\phi^*(dx_i)=d(x_i\circ\phi)=dx_i$，进而 $\phi^*(dx_I)=dx_I$，$I=(i_1,\dots,i_k)$ 是多重指标。所以回到光滑微分形式的定义，假设 $\omega|_U=\sum_I f_I dx_I$，则 $\omega|_U=\phi^*\left(\sum_I f_I\circ\phi^{-1}dx_I\right)$。而 $f_I\in C^\infty(U)$ 当且仅当 $f_I\circ\phi^{-1}\in C^\infty(\phi(U))$，于是我们看到：**$M$ 上微分形式是光滑的当且仅当局部上它是 $\mathbb{R}^n$ 中开集上光滑微分形式通过坐标映射的拉回**。

练习 4 假设 $f:M^m\to N^n$ 是光滑映射，并且 $\eta\in\Omega^k(N)$，证明：$f^*\eta$ 是 M 上的光滑 k-形式，即 $f^*\eta\in\Omega^k(M)$。