第九讲

石亚龙

回顾：微分形式在光滑映射下的拉回：$F: M \to M$，$\omega \in \Omega^k(N)$，则 $(F^*\omega)_p \in Alt^k(T_pM)$ 定义为 $(F^*\omega)_p(v_1,\dots,v_k) := \omega_{F(p)}(F_*v_1,\dots,F_*v_k)$，即 $\omega_{F(p)} \in Alt^k(T_{F(p)}N)$ 通过切映射 $D_pF: T_pM \to T_{F(p)}N$ 的拉回。由于线性映射的拉回保持外积，所以我们总有 $F^*(\omega\wedge\eta) = F^*\omega\wedge F^*\omega$。

通过计算，我们得到 $F^*(dh) = d(h\circ F) = dF^*h$。进而得到：一个 M 上的微分形式 ω 光滑，当且仅当对任何光滑图卡 (U,ϕ)，$\omega|_U$ 都是 $\phi(U)$ 上一个光滑微分形式通过 ϕ 的拉回。容易验证：光滑微分形式的拉回也是光滑的。

1 流形上微分形式的运算与 de Rham 上同调（续）

外微分运算也可以搬到流形上。我们先从 0-形式——光滑函数的微分开始。前面已经知道对每个 $f\in\Omega^0(M)$，我们可以定义 $(df)_p \in T_p^*M$，让 p 取遍 M，就得到了 M 上的 1-形式 df。我们前面计算过：在局部坐标图卡 (U,ϕ) 下，有 $(df)_p = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p(f)\right)dx_i|_p$，这即是说 $df|_U = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(f)dx_i$，其中 $\frac{\partial}{\partial x_i}(f)\in C^\infty(U)$。于是 $df\in\Omega^1(M)$。

定义 1 假设 $\omega\in\Omega^k(M)$，我们定义 $d\omega\in\Omega^{k+1}(M)$ 如下：假设 (U,ϕ) 为一个光滑图卡，$\phi=(x_1,\dots,x_n)$，并且 $\omega|_U = \sum_I f_I dx_I$，则定义

$$(d\omega)|_U := \sum_I df_I\wedge dx_I = \sum_{I,i}\frac{\partial}{\partial x_i}(f_I)\,dx_i\wedge dx_I.$$

注意：由于 $\frac{\partial}{\partial x_i}(f_I) = \frac{\partial(f_I\circ\phi^{-1})}{\partial x_i}\circ\phi$，所以上式其实是 $\phi(U)$ 上微分形式

$$\sum_{I,i}\frac{\partial(f_I\circ\phi^{-1})}{\partial x_i}dx_i\wedge dx_I = d\Big(\sum_I f_I\circ\phi^{-1}dx_I\Big)$$

的拉回！而其中的 $\sum_I f_I\circ\phi^{-1}dx_I$ 通过 ϕ 拉回到 U 中就是 $\omega|_U$。所以这里的外微分的定义其实可以如下表述：首先将 $\omega|_U$ 视为 $\phi(U)$ 中微分形式 η 的拉回，然后在 $\phi(U)$ 中做外微分 $d\eta$（这一步我们前面的课已经定义了），最后再将 $d\eta$ 拉回至 U 中，作为 $(d\omega)|_U$ 的定义。

需要说明这是 well-defined：假设有图卡 (V,ψ) 满足 $U\cap V\neq\emptyset$，如果 $\omega|_V = \sum_J g_J dy_J$，要说明

$$(\sum_I df_I\wedge dx_I)|_{U\cap V} = (\sum_J dg_J\wedge dy_J)|_{U\cap V},$$

即

$$\phi^*\Big(d(\sum_I f_I\circ\phi^{-1}dx_I)\Big) = \psi^*\Big(d(\sum_J g_J\circ\psi^{-1}dy_J)\Big).$$

注意：我们一开始就有 $\Big(\sum_J g_J dy_J\Big)|_{U\cap V} = \Big(\sum_I f_I dx_I\Big)|_{U\cap V}$，于是

$$(\phi^{-1})^*\Big(\sum_J g_J dy_J\Big)|_{U\cap V} = (\phi^{-1})^*\Big(\sum_I f_I dx_I\Big)|_{U\cap V} = \sum_I f_I\circ\phi^{-1}dx_I.$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\sum_I f_I\circ\phi^{-1}dx_I &= (\phi^{-1})^*\Big(\sum_I f_I dx_I\Big)|_{U\cap V}=(\phi^{-1})^*\Big(\sum_J g_J dy_J\Big)|_{U\cap V}\\ &= (\phi^{-1})^*\circ\psi^*\Big(\sum_J g_J\circ\psi^{-1}dy_J\Big)\\ &= (\psi\circ\phi^{-1})^*\Big(\sum_J g_J\circ\psi^{-1}dy_J\Big).\end{aligned}$$

现在 $\psi\circ\phi^{-1}$ 是欧氏空间开集之间的微分同胚，而 $\sum_J g_J\circ\psi^{-1}dy_J$ 是欧氏空间开集上的微分形式，所以利用我们以前证明的拉回与外微分可交换的性质，得到

$$d\Big(\sum_I f_I\circ\phi^{-1}dx_I\Big)=d(\psi\circ\phi^{-1})^*\Big(\sum_J g_J\circ\psi^{-1}dy_J\Big)=(\psi\circ\phi^{-1})^*d\Big(\sum_J g_J\circ\psi^{-1}dy_J\Big).$$

两边再用 ϕ^* 作用，立即得到

$$\phi^*d\Big(\sum_I f_I\circ\phi^{-1}dx_I\Big)=\psi^*d\Big(\sum_J g_J\circ\psi^{-1}dy_J\Big).$$

所以外微分的定义与坐标图卡的选取无关。

练习 1 (选做) [1] 假设 $\omega\in\Omega^k(M)$，$X_0,\ldots,X_k\in\mathfrak{X}(M)$，证明：

$$(d\omega)(X_0,\ldots,X_k)=\sum_{i=0}^k(-1)^iX_i\Big(\omega(X_0,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_k)\Big)+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_0,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_k).$$

这可以作为外微分的一个不依赖于坐标图卡的定义。

一旦知道外微分是良好定义的，下面的两个性质就几乎是显然的了：

引理 1 在流形上总有 $d\circ d=0$。对 $\omega\in\Omega^k(M)$，$\eta\in\Omega^l(M)$，有

$$d(\omega\wedge\eta)=d\omega\wedge\eta+(-1)^k\omega\wedge d\eta.$$

证明 不妨假设 $\omega|_U=fdx_I$，$I=(i_1,\ldots,i_k)$，则 $d\omega|_U=\sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}(f)dx_i\wedge dx_I$，进而 $dd\omega=\sum_{j,i}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}(f)dx_j\wedge dx_i\wedge dx_I$。而 $\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}(f)=\frac{\partial^2(f\circ\phi^{-1})}{\partial x_i\partial x_j}\circ\phi$ 关于 i,j 对称，$dx_j\wedge dx_i$ 关于 i,j 反对称，所以 $dd\omega=0$。

第二个结论，可以将问题转化到 $\phi(U)$ 上，归结为我们已证的结论（$d\circ d=0$ 也可以这样做）。 □

引理 2 假设 $F:M^m\to N^n$ 是光滑映射，则拉回与外微分可交换，即 $dF^*\omega=F^*(d\omega),\forall\omega\in\Omega^k(N)$。

证明 取 M,N 的坐标图卡 $(U,\phi),(V,\psi)$ 满足 $F(U)\subset V$，不妨设 $\omega|_V=gdy_I$，$I=(i_1,\ldots,i_k)$。则

$$\begin{aligned}dF^*\omega &= d\Big(g\circ F\,d(y_{i_1}\circ F)\wedge\cdots\wedge d(y_{i_k}\circ F)\Big)\\ &= d(g\circ F)\wedge d(y_{i_1}\circ F)\wedge\cdots\wedge d(y_{i_k}\circ F)+0\\ &= F^*(dg)\wedge F^*dy_{i_1}\wedge\cdots\wedge F^*dy_{i_k}\\ &= F^*(dg\wedge dy_I)=F^*(d\omega).\end{aligned}$$

□

[1] 提示：回忆欧氏空间情形外微分的定义：$d_x\omega(v_0,\ldots,v_k)=\sum_{i=0}^k(-1)^i(D_x\omega)(v_i)(v_0,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,v_k)$，用现在的语言表述是什么样子的？

于是在流形 M^n 上，我们仍然有一个 de Rham 复形：

$$0 \to \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^n(M) \to 0.$$

仍然定义 M 的 de Rham 上同调：

$$H^k(M) := Ker\Big(d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)\Big) \Big/ d\Omega^{k-1}(M).$$

$b_k := \dim_{\mathbb{R}} H^k(M)$ 称为 M 的第 k 个 Betti 数。

假设 $F : M \to N$ 是光滑映射，则 F 诱导同态 $F^* : H^k(N) \to H^k(M), \forall k$。并且如果还有光滑映射 $G : N \to P$，则 $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$。特别地，微分同胚的流形具有同构的 de Rham 上同调。

2 微分流形上的单位分解与 Mayer-Vietoris 序列

与欧氏空间开集的情形相同，de Rham 上同调的一个重要计算工具是 Mayer-Vietoris 序列。为此我们首先需要将单位分解搬到流形上。一个办法是是把我们以前的证明重新走一遍，流形上的情形没有任何本质的新困难。我们这里直接利用以前的结论。这里为了方便，假设流形可以嵌入某个 $\mathbb{R}^l$，我们前面已经证明了对紧流形而言都是如此，并且 Whitney 的一般定理保证微分流形都可以嵌入欧氏空间。

定理 1 (流形上的单位分解) *假设 $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in\Gamma}$ 是流形 M^n 的一个开覆盖。则存在 M 上一族光滑函数 $\{\phi_i\}_{i\in\Gamma}$ 满足：$0 \le \phi_i \le 1$，并且*

(i) $supp_M\ \phi_i \subset U_i$；

(ii) 对任意 $p \in M$，存在 p 的开邻域 U 使得只有有限个 ϕ_i 在 U 上不恒为 0；

(iii) 对任意 $p \in M$，总有 $\sum_{i\in\Gamma} \phi_i(p) = 1$。

这一族 $\{\phi_i\}_{i\in\Gamma}$ 称为"从属于开覆盖 $\mathscr{U}$ 的单位分解"。

证明 我们利用 Whitney 的嵌入定理：将 M 嵌入某个 $\mathbb{R}^l$ 中，成为 $\mathbb{R}^l$ 的光滑子流形。由于现在 M 的拓扑与作为 $\mathbb{R}^l$ 子空间的拓扑相同，对每一个 U_i，我们可以找到 $\mathbb{R}^l$ 的开集 $\tilde{U}_i$ 使得 $\tilde{U}_i \cap M = U_i$。令 $\tilde{U} := \cap_{i\in\Gamma}\tilde{U}_i$，则 $M \subset \tilde{U}$。对 $\tilde{U}$ 和开覆盖 $\{\tilde{U}_i\}$ 应用此前证明的单位分解定理，得到一族 $\tilde{U}$ 上的光滑函数 $\{\psi_i\}_{i\in\Gamma}$ 满足 $0 \le \psi_i \le 1$ 以及

(i) $supp_{\tilde{U}}\ \psi_i \subset \tilde{U}_i$；

(ii) 对任意 $p \in \tilde{U}$，存在 p 的开邻域 W 使得只有有限个 ψ_i 在 W 上不恒为 0；

(iii) 对任意 $p \in \tilde{U}$，总有 $\sum_{i\in\Gamma} \psi_i(p) = 1$。

现在令 $\phi_i := \psi_i|_M$，则 $\{\phi_i\}_{i\in\Gamma}$ 即满足定理的要求。 □

现在假设 $M^n = U_1 \cup U_2$ 是一个开覆盖，则与之前相同，我们有链复形的正合列:

$$0 \to \Omega^*(M) \xrightarrow{I} \Omega^*(U_1) \oplus \Omega^*(U_2) \xrightarrow{J} \Omega^*(U_1 \cap U_2) \to 0,$$

其中 $I : \Omega^k(M) \to \Omega^k(U_1) \oplus \Omega^k(U_2)$ 定义为 $\omega \mapsto (\omega|_{U_1}, \omega|_{U_2})$；$J : \Omega^k(U_1) \oplus \Omega^k(U_2) \to \Omega^k(U_1 \cap U_2)$ 定义为 $(\omega_1, \omega_2) \mapsto \omega_1|_{U_1\cap U_2} - \omega_2|_{U_1\cap U_2}$。为了说明确实是正合列，与之前相同，只有 J 的满射性是非平凡的。为此我们取一个从属于 $\{U_1, U_2\}$ 的单位分解 $\{\phi_1, \phi_2\}$，对任何 $\omega \in \Omega^k(U_1 \cap U_2)$，则 $\phi_1\omega$ 在 U_2 中做 0 延拓可以得到 U_2 中的光滑 k-形式，记为 ω_1。同样，$\phi_2\omega$ 在 U_1 中做 0 延拓可以得到 U_1 中的光滑 k-形式，记为 $-\omega_2$。于是对于 $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega^k(U_1) \oplus \Omega^k(U_2)$，即有 $J(\omega_1, \omega_2) = (\phi_1 + \phi_2)\omega = \omega$。于是得到：

定理 2 (Mayer-Vietoris 序列) *假设 $M^n = U_1 \cup U_2$ 是一个开覆盖，则有 de Rham 上同调的长正合列：*

$$\begin{aligned} 0 \quad \to \quad & H^0(M) \xrightarrow{I^*} H^0(U_1) \oplus H^0(U_2) \xrightarrow{J^*} H^0(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\delta} \dots \\ \dots \quad & \xrightarrow{\delta} H^k(M) \xrightarrow{I^*} H^k(U_1) \oplus H^k(U_2) \xrightarrow{J^*} H^k(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\delta} H^{k+1}(M) \xrightarrow{I^*} \dots \to H^n(U_1 \cap U_2) \to 0. \end{aligned}$$

作为应用我们来计算一下 S^n 的 de Rham 上同调。

例 1 令 $S^n = U_1 \cup U_2$ $(n \geq 2)$，其中 $U_1 = S^n \setminus \{(0,\ldots,0,1)\}, U_2 = S^n \setminus \{(0,\ldots,0,-1)\}$。则 $U_i \cong \mathbb{R}^n, i = 1,2$，$U_1 \cap U_2 \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$。回忆：

$$H^k(\mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & if\, k = 0, n-1; \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

由 M 连通可知 $H^0(S^n) \cong \mathbb{R}$。$k \geq 1$ 时，有 $H^k(U_i) = 0$，所以有正合列

$$0 \to H^k(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\delta} H^{k+1}(S^n) \to 0,$$

即 $H^{k+1}(S^n) \cong H^k(\mathbb{R}^n \setminus \{0_n\})$ $(k \geq 1)$。最后为计算 $H^1(S^n)$，利用正合列

$$0 \to H^0(S^n) \xrightarrow{I^*} H^0(U_1) \oplus H^0(U_2) \xrightarrow{J^*} H^0(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\delta} H^1(S^n) \to 0.$$

有 $H^1(S^n) = Im(\delta) \cong \mathbb{R}/Ker(\delta) = \mathbb{R}/Im(J^*)$。而 $Im(J^*) \cong \mathbb{R}^2/Ker(J^*) = \mathbb{R}^2/Im(I^*) \cong \mathbb{R}^2/\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$。所以 $H^1(S^n) = 0$。综上，

$$H^k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & if\, k = 0, n; \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

练习 2 计算 S^1 的 *de Rham* 上同调。

3 微分形式与流形的可定向性

利用微分形式我们可以很方便地讨论微分流形的可定向性。

定义 2 一个微分流形 M^n 称为可定向的（*orientable*），如果存在 M 的一个光滑图册 $\{(U_i, \phi_i)\}_{i\in\Gamma}$ 使得当 $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ 时，就有 $\det J(\phi_j \circ \phi_i^{-1}) > 0$。这样的光滑图册称为“定向图册”。一个极大的定向光滑图册称为流形的定向微分结构，或简称为流形的“定向”（*orientation*）。给定了定向的流形称为“定向流形”（*oriented manifolds*）。

两个定向流形之间的微分同胚称为“保定向”（*orientation-preserving*）/“反定向”（*orientation-reversing*）的，如果映射在定向图卡下的坐标表示的 *Jacobi* 行列式都是正/负的。

引理 3 一个 n-维流形 M^n 可定向当且仅当存在 $\omega \in \Omega^n(M)$ 使得 $\forall p \in M$，$\omega_p \neq 0$ $(\in Alt^n(T_pM))$。

证明 充分性：假设 ω 是 M^n 上一个处处非 0 的光滑 n-形式，任取一个光滑图册 $\{(U_i, \phi_i)\}_{i\in\Gamma}$，我们要将其修改为一个定向图册。不妨假设每个 U_i 都是连通的。假设 $\phi_i = (x_1, \ldots, x_n)$，我们总有

$$\omega|_{U_i} = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

其中 $f \in C^\infty(U_i)$。由于 ω 处处非 0，所以 f 处处非 0。由 U_i 连通性，f 一定处处为正或者处处为负。如果 $f > 0$，我们保持图卡 (U_i, ϕ_i) 不变。如果 $f < 0$，我们修改 ϕ_i 为 $(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n)$。则在做此修改后，我们得到一个新的图册，不妨仍记为 $\{(U_i, \phi_i)\}_{i\in\Gamma}$，满足

$$\omega|_{U_i} = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

其中 $f > 0$。

Claim: $\{(U_i, \phi_i)\}_{i\in\Gamma}$ 是一个定向图册，从而 M 可定向。

事实上，如果 $U_i\cap U_j\neq\emptyset$，假设 $\phi_i=(x_1,\ldots,x_n)$，$\phi_j=(y_1,\ldots,y_n)$，并且 $\omega|_{U_i}=fdx_1\wedge\cdots\wedge dx_n$，$\omega|_{U_j}=gdy_1\wedge\cdots\wedge dy_n$，$f,g>0$。注意到在 $U_i\cap U_j$ 上有 $dy_1\wedge\cdots\wedge dy_n=\det J(\phi_j\circ\phi_i^{-1})\circ\phi_i\cdot dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n$，所以在 $U_i\cap U_j$ 上有

$$f=\det J(\phi_j\circ\phi_i^{-1})\circ\phi_i\cdot g.$$

由于 $f,g>0$，所以 $\det J(\phi_j\circ\phi_i^{-1})>0$。

必要性：假设 $\{(U_i,\phi_i)\}_{i\in\Gamma}$ 是 M 的一个定向图册。取从属于这个坐标覆盖的单位分解 $\{\eta_i\}_{i\in\Gamma}$。对每一个 (U_i,ϕ_i)，如果 $\phi_i=(x_1,\ldots,x_n)$，我们可以定义 M 上的光滑 n-形式 ω_i 如下：

$$\omega_i:=\begin{cases}\eta_i dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n, & \text{on } U_i;\\ 0, & \text{on } M\setminus U_i.\end{cases}$$

令 $\omega=\sum_{i\in\Gamma}\omega_i$。由于单位分解的局部有限性，我们知道在每一点附近这都是个有限和，所以 $\omega\in\Omega^n(M)$。

Claim: ω 处处非 0。

假设 $p\in M$，取开邻域 W 使得在 W 上只有 $\eta_{i_1},\ldots,\eta_{i_k}$ 不恒为 0。不妨假设 $W\subset U_{i_1}\cap\ldots U_{i_k}$，则有

$$\omega|_W=\Big(\eta_{i_1}+\sum_{j=2}^{k}\eta_{i_j}\cdot\det J(\phi_{i_j}\circ\phi_{i_1}^{-1})\circ\phi_{i_1}\Big)dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n.$$

由 $\sum_{j=1}^{k}\eta_{i_j}(p)=1$ 以及 $\det J(\phi_{i_j}\circ\phi_{i_1}^{-1})>0$ 知 $\omega_p\neq 0$。 □

在上述证明中，从处处非零的 n-形式 ω 出发得到的 M 的定向称为“ω 决定的定向”。显然，如果 $f\in C^\infty(M)$ 处处大于 0，则 $f\omega$ 与 ω 决定相同的定向。

推论 1 *如果 M 可定向，并且 M 连通，则 M 恰有两个定向。*

证明 假设 ω 是 M 上处处非 0 的光滑 n-形式。假设 $\mathscr{U}=\{(U_i,\phi_i)\}_{i\in\Gamma}$ 是 M 的定向图册，我们来证明：$\mathscr{U}$ 所决定的定向或者等于 ω 决定的定向，或者等于 $-\omega$ 决定的定向。

为此，我们利用上述引理的必要性部分，从 $\mathscr{U}$ 得到处处非 0 的光滑 n-形式 $\tilde{\omega}$。则利用局部坐标图卡，可知存在处处非 0 的光滑函数 $f\in C^\infty(M)$ 使得 $\tilde{\omega}=f\omega$。**由 M 连通可知或者 $f>0$ 或者 $f<0$。** 对于前一情形，$\mathscr{U}$ 所决定的定向等于 ω 决定的定向；对于后一情形，$\mathscr{U}$ 所决定的定向等于 $-\omega$ 决定的定向。 □

例 2 *假设 $M=\{(x_1,\ldots,x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}\mid F(x_1,\ldots,x_{n+1})=0\}$，其中 $F\in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ 且 0 是 F 的正则值。我们来说明 M 一定是可定向的 n-维流形。*

我们首先构造一个 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的光滑 n-形式如下：对任何 $x\in\mathbb{R}^{n+1}$ 和 $v_1,\ldots,v_n\in\mathbb{R}^{n+1}$，我们定义 $\omega_x\in Alt^n(T_x\mathbb{R}^{n+1})\cong Alt^n(\mathbb{R}^{n+1})$ 为：

$$\omega_x(v_1,\ldots,v_n):=(dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{n+1})(\nabla_x F,v_1,\ldots,v_n),$$

其中 $\nabla_x F=(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x),\ldots,\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}(x))$ 是 F 在 x 处的梯度向量。

我们来说明：对于自然嵌入映射 $\iota:M\to\mathbb{R}^{n+1}$，$\iota^*\omega$ 是 M 上处处非 0 的光滑 n-形式。

假设 $p\in M$，则根据假设 $\nabla_p F\neq 0_{n+1}$。不妨假设 $\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}(p)\neq 0$。则此时 p 附近的坐标图卡可以选取为 $(U\cap M,\phi)$，其中 U 是 p 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的足够小的开邻域，使得局部上可以用隐函数定理得到 $(p_1,\ldots,p_n)$ 附近的光滑函数 $f(x_1,\ldots,x_n)$，使得 $M\cap U$ 是函数 f 的图像。此时 $\phi(x_1,\ldots,x_{n+1})=(x_1,\ldots,x_n)$。为证明 $(\iota^*\omega)_p\neq 0$ 我们只要说明 $\omega_p(\iota_*\frac{\partial}{\partial x_1}|_p,\ldots,\iota_*\frac{\partial}{\partial x_n}|_p)\neq 0$。

注意此时 ι 的坐标表示为 $(x_1,\ldots,x_n)\mapsto(x_1,\ldots,x_n,f(x_1,\ldots,x_n))$。于是有

$$\iota_*\frac{\partial}{\partial x_\alpha}|_p=e_\alpha+\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}e_{n+1},$$

其中 $\{e_i\}_{i=1,\dots,n+1}$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的标准坐标基向量。而在方程 $F(x_1,\dots,x_n,f(x_1,\dots,x_n))\equiv 0$ 两边分别对 x_α 求偏导得到

$$\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_\alpha}(p)}{\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}(p)}=:-\frac{F_\alpha(p)}{F_{n+1}(p)}.$$

于是

$$\begin{aligned}
\omega_p(\iota_*\frac{\partial}{\partial x_1}|_p,\dots,\iota_*\frac{\partial}{\partial x_n}|_p) &= (-1)^n(dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{n+1})\Big(\iota_*\frac{\partial}{\partial x_1}|_p,\dots,\iota_*\frac{\partial}{\partial x_n}|_p,\nabla_pF\Big)\\
&= (-1)^n(dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{n+1})\Big(e_1-\frac{F_1}{F_{n+1}}e_{n+1},\dots,e_n-\frac{F_n}{F_{n+1}}e_{n+1},\sum_{i=1}^{n+1}F_ie_i\Big)\\
&= (-1)^n\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & F_1\\ 0 & 1 & \dots & F_2\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ -\frac{F_1}{F_{n+1}} & -\frac{F_2}{F_{n+1}} & \dots & F_{n+1}\end{vmatrix}\\
&= (-1)^n\frac{|\nabla_pF|^2}{F_{n+1}(p)}\neq 0.
\end{aligned}$$

作为特例，S^n 一定可定向。

下面的结果由直接计算可得，留作练习：

练习 3 对于上述 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中微分形式 ω，证明：

$$\omega=\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1}\frac{\partial F}{\partial x_i}dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\cdots\wedge dx_{n+1}.$$

例 3 我们下面来说明 $\mathbb{R}P^2$ 一定不可定向。

假设 $\mathbb{R}P^2$ 可定向，则一定存在 $\omega\in\Omega^2(\mathbb{R}P^2)$ 处处非零。考虑映射 $\pi:S^2\to\mathbb{R}P^2$，$\pi(x_1,x_2,x_3):=[x_1,x_2,x_3]\in\mathbb{R}P^2$。如果用 $\mathbb{R}P^2$ 的图册 $\{(V_i,\psi_i)\}_{i=1,2,3}$，其中 $V_i=\{[x_1,x_2,x_3]\mid x_i\neq 0\}$，$\psi_i([x_1,x_2,x_3])=(\frac{x_1}{x_i},\dots,\frac{\hat{x}_i}{x_i},\dots)$。此时为研究映射 π 用 S^2 的下述坐标图册比较方便：$\{(U_i^+,\phi_i^+),(U_i^-,\phi_i^-)\}_{i=1,2,3}$，其中 $U_i^\pm=\{(x_1,x_2,x_3)\in S^2\mid \pm x_i>0\}$，$\phi_i^\pm(x_1,x_2,x_3)=(\dots,\hat{x}_i,\dots)$。容易看出 $\pi|_{U_i^+},\pi|_{U_i^-}$ 分别是 U_i^+,U_i^- 到 V_i 的微分同胚。所以 $\pi^*\omega$ 是 S^2 上处处非 *0* 的光滑 *2*-形式。令 ω_0 为从上一例子中得到的 S^2 上的处处非 *0* 的光滑 *2*-形式。则存在处处非零的光滑函数 $f\in C^\infty(S^2)$ 使得 $\pi^*\omega=f\omega_0$。

考虑 S^2 的对径映射 $A:S^2\to S^2$，$A(x_1,x_2,x_3)=(-x_1,-x_2,-x_3)$，则 $\pi\circ A=\pi$。于是 $A^*(\pi^*\omega)=\pi^*\omega$。

Claim*:* $A^*\omega_0=-\omega_0$。

先假设 *Claim* 成立，则有 $f\omega_0=\pi^*\omega=A^*(\pi^*\omega)=A^*(f\omega_0)=f\circ A\cdot A^*\omega_0=-f\circ A\cdot\omega_0$。于是 f 是奇函数。假设 $f(0,0,1)>0$，则必有 $f(0,0,-1)<0$。由连续函数的介值性质，一定存在球面一点 q 使得 $f(q)=0$，这就导致了矛盾。从而 $\mathbb{R}P^2$ 一定不可定向。

下面证明 *Claim*。为此我们将 $\mathbb{R}^3$ 中的对径映射记为 $\tilde{A}$。则有 $\tilde{A}\circ\iota=\iota\circ A$。记 $\eta:=2(x_1dx_2\wedge dx_3-x_2dx_1\wedge dx_3+x_3dx_1\wedge dx_2)$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的光滑 *2*-形式，则 $\omega_0=\iota^*\eta$。显然 $\tilde{A}^*\eta=-\eta$。于是

$$A^*\omega_0=A^*\iota^*\eta=(\iota\circ A)^*\eta=(\tilde{A}\circ\iota)^*\eta=\iota^*(\tilde{A}^*\eta)=-\iota^*\eta=-\omega_0.$$

同样的办法可以说明 $\mathbb{R}P^{2n}$ 都不可定向。

练习 4 证明 $\mathbb{R}P^{2n+1}$ 都可定向。

练习 5 (选做) 考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的 *Möbius* 带

$$M=\Big\{\Big((2+r\cos\theta)\cos(2\theta),(2+r\cos\theta)\sin(2\theta),r\sin\theta\Big)\in\mathbb{R}^3\ \Big|\ r\in(-1,1);\theta\in[0,\pi]\Big\}.$$

证明 M 是 $\mathbb{R}^3$ 中的光滑子流形，并且不可定向。