第十讲

石亚龙

1 管状邻域及其应用

我们本节讨论一个很有用的技术性工具："管状邻域定理"。为了简单起见，我们只考虑欧氏空间中的光滑子流形 $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$。记 M 的嵌入映射为 $\iota : M \to \mathbb{R}^{n+k}$，则对每一点 $p \in M$，由于 $\iota_* : T_pM \to T_p\mathbb{R}^{n+k} \cong \mathbb{R}^{n+k}$ 是单射，我们可以将 T_pM 等同于 $\mathbb{R}^{n+k}$ 的线性子空间。

这个对应其实是非常直观的：假如 $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ 是光滑曲线，$\gamma(0) = p$，则如果视 M 为 $\mathbb{R}^{n+k}$ 的子集，γ 也是 $\mathbb{R}^{n+k}$ 中的光滑曲线（是光滑曲线和嵌入映射的复合）。我们知道 $\gamma'(0) \in T_pM$ 定义为 $\gamma'(0)(f) := (f \circ \gamma)'(0)$，其中 f 是定义在 p 在 M 中某个开邻域上的。现在 $\iota_*\gamma'(0)$ 的作用是：对与定义在 p 在 $\mathbb{R}^{n+k}$ 的某个开邻域上的光滑函数 f，有 $\iota_*\gamma'(0)(f) = \gamma'(0)(f \circ \iota) = \gamma'(0)(f|_M) = (f \circ \gamma)'(0)$。现在作为 $\mathbb{R}^{n+k}$ 中的光滑曲线，我们可以设 $\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_{n+k}(t))$，从而

$$(f \circ \gamma)'(0) = \sum_{i=1}^{n+k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)x_i'(0) = (\sum_{i=1}^{n+k} x_i'(0)\frac{\partial}{\partial x_i}|_p)(f).$$

所以 $\gamma'(0)$ 被等同于了 $\mathbb{R}^{n+k}$ 中的向量 $(x_1'(0), \ldots, x_{n+k}'(0))$，也就是微积分中的 $\gamma'(0)$。一个有用的观察：$\gamma'(0)$ 作用在嵌入映射的分量 x_i 上，得到的就是在等同之下 $\gamma'(0)$ 的第 i 个分量。

这时候我们可以把 M 上的切向量场 X 等同于一个映射 $\tilde{X} : M \to \mathbb{R}^{n+k}$，满足 $\tilde{X}(p) \in T_pM, \forall p \in M$。事实上，此时向量场 X 的光滑性等价于 $\tilde{X} : M \to \mathbb{R}^{n+k}$ 是光滑映射：一方面，如果 X 是光滑向量场，则对于嵌入映射的坐标函数 x_i，必有 Xx_i 是 M 上光滑函数，但是 Xx_i 就是 $\tilde{X}$ 的第 i 个分量，所以 $\tilde{X} : M \to \mathbb{R}^{n+k}$ 是光滑映射。反之，如果 $\tilde{X} : M \to \mathbb{R}^{n+k}$ 是光滑映射，则它在 $\mathbb{R}^{n+k}$ 中光滑函数 f 上的作用就是 $\tilde{X} \cdot grad(f)$，所以是 M 上光滑函数。而对 M 中 p 的足够小开邻域 U 上的光滑函数 f，f 一定是 $\mathbb{R}^{n+k}$ 上光滑函数 F 的限制（利用子流形定义中的特殊坐标图卡），所以 $Xf = \tilde{X} \cdot grad(F)$ 光滑，从而 X 是光滑向量场。**以后我们不再区分 X 和 $\tilde{X} : M \to \mathbb{R}^{n+k}$，都用 X 表示。**

在这个观点下，我们也可以讨论 T_pM 在 $\mathbb{R}^{n+k}$ 中的正交补空间 $T_pM^\perp \subset \mathbb{R}^{n+k}$。称光滑映射 $Y : M \to \mathbb{R}^{n+k}$ 是 M 上一个"光滑法向量场"，如果 $Y(p) \in T_p^\perp M, \forall p \in M$。

例 1 *考虑 $S^3 \subset \mathbb{R}^4$。则 $\mathbf{n} : S^3 \to \mathbb{R}^4$，$\mathbf{n}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ 就是 S^3 上一个光滑的单位法向量场。事实上，对于由方程 $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$ 定义的 $\mathbb{R}^n$ 的 $n-1$ 维光滑子流形 M，$grad(F)$ 总是 M 上一个光滑法向量场。*

在 S^3 的情形，我们还能找到 3 个处处线性无关（甚至处处正交）的光滑切向量场：

$$X_1(x) := (-x_2, x_1, x_4, -x_3), \quad X_2(x) := (-x_3, -x_4, x_1, x_2), \quad X_3(x) := (-x_4, x_3, -x_2, x_1).$$

练习 1 *证明：S^2 上不存在处处非 0 的光滑切向量场。*

定理 1 ("管状邻域"定理) *假设 $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$ 是光滑子流形，则存在 M 在 $\mathbb{R}^{n+k}$ 中的开邻域 V，以及光滑映射 $r : V \to M$，满足如下性质：*

- *(i) $r|_M = id_M$，并且对任意 $x \in V$，$r(x) \in M$ 是 M 中唯一的到 x 距离最近的点（称 r 为"nearest-point projection"）；*
- *(ii) 对任意的 $p \in M$，$r^{-1}(p)$ 是仿射空间 $p + T_pM^\perp$ 中的以 p 为心，$\rho(p) > 0$ 为半径的开球，这里 $\rho > 0$ 是 M 上的连续函数（M 紧时可以将 ρ 取为很小的正常数）；*

(iii) 如果 $\varepsilon: M \to \mathbb{R}$ 光滑，且 $0<\varepsilon(p)<\rho(p), \forall p \in M$，则

$$S_\varepsilon := \{x \in V \mid \|x-r(x)\| = \varepsilon(r(x))\}$$

是 $\mathbb{R}^{n+k}$ 中的（余 *1* 维）光滑子流形。

我们称 V 为 M 的半径为 ρ 的管状邻域（*tubular neighborhood*）。

我们略去这个定理的证明。事实上，最清晰的证法是利用黎曼几何中的指数映射，并且在那里可以统一处理一般情形：假设 $M^n \subset N^{n+k}$ 是光滑子流形，也存在 M 在 N 中的开邻域 V，满足类似的性质。

我们来看一些管状邻域定理的应用。第一个应用是连续映射的同伦光滑逼近：

命题 1 假设 $f: M_1 \to M_2$ 是微分流形之间的连续映射，则存在光滑映射 $g: M_1 \to M_2$ 满足 $f \sim g$。

证明 我们将 M_1, M_2 都嵌入欧氏空间，嵌入映射分别记为 ι_1, ι_2，对应管状邻域分别记为 V_1, V_2，对应的"最近点投影"分别记为 r_1, r_2。则 $\iota_2 \circ f \circ r_1$ 是 V_1 到 V_2 的连续映射。由我们此前证过的逼近定理，存在光滑映射 $\tilde{g}: V_1 \to V_2$，满足 $\tilde{g} \sim \iota_2 \circ f \circ r_1$。令 $g := r_2 \circ \tilde{g} \circ \iota_1$，则 $g: M_1 \to M_2$ 光滑。由 $r_i \circ \iota_i = id_{M_i}$ 知 $\tilde{g} \circ \iota_1 \sim \iota_2 \circ f$，从而 $g \sim r_2 \iota_2 \circ f = f$。 □

命题 2 假设 $f, g: M_1 \to M_2$ 是微分流形之间的光滑映射，如果 $f \sim g$，则它们诱导相同的 *de Rham* 上同调之间的同态 $f^* = g^*: H^k(M_2) \to H^k(M_1)$。

证明 与上面相同，我们将 M_1, M_2 都嵌入欧氏空间，嵌入映射分别记为 ι_1, ι_2，对应管状邻域分别记为 V_1, V_2，对应的"最近点投影"分别记为 r_1, r_2。由同伦 $f \sim g$ 可知 $\iota_2 \circ f \circ r_1 \sim \iota_2 \circ g \circ r_1 : V_1 \to V_2$。于是它们诱导相同的

$$r_1^* \circ f^* \circ \iota_2^* = r_1^* \circ g^* \circ \iota_2^* : H^k(V_2) \to H^k(V_1).$$

仍然利用 $r_i \circ \iota_i = id_{M_i}$，得到 $\iota_i^* \circ r_i^* = id : H^k(M_i) \to H^k(M_i)$，所以 $r_1^* \circ f^* = r_1^* \circ g^* : H^k(M_2) \to H^k(V_1)$，进而 $f^* = g^* : H^k(M_2) \to H^k(M_1)$。 □

跟之前欧氏空间的情形相同，从命题 1、2可知：我们可以对微分流形之间的连续映射 $f: M_1 \to M_2$ 定义诱导的同态 $f^*: H^k(M_2) \to H^k(M_1)$——首先取光滑映射 $g: M_1 \to M_2$ 满足 $f \sim g$，于是定义 $f^* := g^* : H^k(M_2) \to H^k(M_1)$。这个定义不依赖于 g 的选取：假如 $h: M_1 \to M_2$ 也满足 $f \sim h$，则光滑映射 g 与 h 同伦，从而 $h^* := g^* : H^k(M_2) \to H^k(M_1)$。此时如果还有连续映射 $e: M_2 \to M_3$，则 $(e \circ f)^* = f^* \circ e^*$。

推论 1 (同伦不变性) 同伦等价的微分流形具有同构的 *de Rham* 上同调。特别地，如果 V 是光滑子流形 $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ 的管状邻域，则 V 与 M 具有同构的 *de Rham* 上同调：

$$r^* : H^k(M) \xrightarrow{\cong} H^k(V), \quad \iota^* : H^k(V) \xrightarrow{\cong} H^k(M), \forall k.$$

证明 假设微分流形之间的连续映射 $f: M_1 \to M_2$ 和 $g: M_2 \to M_1$ 满足 $f \circ g \sim id_{M_2}, g \circ f \sim id_{M_1}$，则诱导的同态 $f^*: H^k(M_2) \to H^k(M_1)$ 和 $g^*: H^k(M_1) \to H^k(M_2)$ 满足 $g^* \circ f^* = (f \circ g)^* = id_{H^*(M_2)}$，$f^* \circ g^* = (g \circ f)^* = id_{H^*(M_1)}$，从而 f^* 与 g^* 都是同构。

由管状邻域定理，可知 $\iota \circ r: V \to V$ 同伦于 id_V——这是因为对任意 $x \in V$，$\iota \circ r(x) = r(x)$ 与 x 之间的直线段都在 V 中，由此可做同伦。结合 $r \circ \iota = id_M$，得到 M 与 V 同伦等价，从而 r^* 与 ι^* 都是同构。 □

例 2 现在我们可以比较简单地算出 $H^*(S^n)$：$\iota: S^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ 是一个同伦等价。这是因为考虑映射 $r: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n$, $r(x) := \frac{x}{\|x\|}$，则 $r \circ \iota = id_{S^n}$。而对任意 $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ 有 $(\iota \circ r)(x) = r(x)$，它与 x 的连线都在 $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ 中，从而 $\iota \circ r \sim id_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}$。于是利用推论，得到 $H^k(S^n) \cong H^k(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$。

2 可定向流形上微分形式的积分

假设 M^n 是微分流形，我们来试着定义 M 上光滑 n-形式的积分。基本的想法和前面一样——通过坐标图卡把问题转化为欧氏空间开集上的积分。

首先假设 $\omega \in \Omega^n(M)$ 的支集紧致，并且落在坐标图卡 (U,ϕ) 中。如果 $\omega|_U = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$，则自然想到应该定义

$$\int_M \omega := \int_U \omega := \int_{\phi(U)} f \circ \phi^{-1}(x)\, dx_1 \dots dx_n.$$

首先我们要看这个定义是否与坐标选取无关：假设 $supp\ \omega$ 也包含在另一图卡 (V,ψ) 中。设 $\omega|_V = g\, dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$。我们需要看是否有

$$\int_{\phi(U)} f \circ \phi^{-1}(x)\, dx_1 \dots dx_n = \int_{\psi(V)} g \circ \psi^{-1}(y)\, dy_1 \dots dy_n.$$

在 $U \cap V$ 上，我们有 $dy_1 \dots dy_n = \det J(\psi \circ \phi^{-1}) \circ \phi dx_1 \dots dx_n$，所以我们得到 $f = g \det J(\psi \circ \phi^{-1}) \circ \phi$。另一方面，重积分变量替换公式告诉我们

$$\begin{aligned}
\int_{\psi(V)} g \circ \psi^{-1}(y)\, dy_1 \dots dy_n &= \int_{\psi(U\cap V)} g \circ \psi^{-1}(y)\, dy_1 \dots dy_n \\
&\overset{y=\psi\circ\phi^{-1}(x)}{=} \int_{\phi(U\cap V)} g \circ \phi^{-1}(x) |\det J(\psi \circ \phi^{-1})(x)|\, dx_1 \dots dx_n \\
&= \int_{\phi(U\cap V)} f \circ \phi^{-1}(x) \cdot sgn(\det J(\psi \circ \phi^{-1})) dx_1 \dots dx_n.
\end{aligned}$$

所以只有当 $\det J(\psi \circ \phi^{-1}) > 0$ 时才会相等，这说明为了定义微分形式的积分我们需要可定向性!

下面假设 M^n 是定向微分流形，具有定向图册 $\mathscr{U} = \{(U_i,\phi_i)\}_{i\in I}$。假设 $\omega \in \Omega^n_c(M)$，即 $\omega \in \Omega^n(M)$ 具有紧支集[1]。我们的目标是定义 ω 在 M 上的积分。

<u>Step 1:</u> 假设 $supp\ \omega$ 落在定向图卡 (U,ϕ) 中，我们定义

$$\int_M \omega := \int_U \omega := \int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^* \omega.$$

我们前面的讨论说明：假如也有 $supp\ \omega \subset (V,\psi)$，其中 $(V,\psi) \in \mathscr{U}$ 是另一定向图卡，则 $\int_V \omega = \int_U \omega$。

<u>Step 2:</u> 在一般情形，选取从属于 $\mathscr{U}$ 的单位分解 $\{\rho_i\}_{i\in I}$，则对一般的 $\omega \in \Omega^n_c(M)$，有 $supp(\rho_i\omega) \subset U_i$，进而定义

$$\int_M \omega := \sum_{i\in I} \int_M \rho_i \omega = \sum_{i\in I} \int_{U_i} \rho_i \omega.$$

注意：由于 $supp\ \omega$ 是紧集，只有有限个 ρ_i 在 $supp\ \omega$ 上不恒为 0，进而只有有限个 $\rho_i\omega$ 不恒为 0，所以上式其实是有限和，不用担心收敛性。

我们需要说明这个定义不依赖于定向图册和单位分解的选取。假设 $\mathscr{V} = \{(V_\alpha,\psi_\alpha)\}_{\alpha\in\Gamma}$ 是另一定向图册，满足 $\mathscr{U}$ 与 $\mathscr{V}$ 相容，即相互间坐标变换的 Jacobi 行列式也是正的。再取从属于 $\mathscr{V}$ 的单位分解 $\{\eta_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$。需要说明

$$\sum_\alpha \int_{V_\alpha} \eta_\alpha \omega = \sum_{i\in I} \int_{U_i} \rho_i \omega.$$

事实上，我们有

$$\sum_\alpha \int_{V_\alpha} \eta_\alpha \omega = \sum_\alpha \int_{V_\alpha} \eta_\alpha (\sum_i \rho_i \omega) = \sum_\alpha \sum_i \int_{V_\alpha \cap U_i} \eta_\alpha \rho_i \omega.$$

[1]这里假定紧支集是为了避免积分收敛性的繁琐讨论。

由于 $supp(\eta_\alpha\rho_i\omega)\subset V_\alpha\cap U_i$，故无论用 (U_i,ϕ_i) 还是用 (V_α,ψ_α) 来算，$\int_{V_\alpha\cap U_i}\eta_\alpha\rho_i\omega$ 都一样。再注意到上面的求和其实都是有限和，所以可以交换求和顺序，有

$$\sum_\alpha\int_{V_\alpha}\eta_\alpha\omega=\sum_\alpha\sum_i\int_{V_\alpha\cap U_i}\eta_\alpha\rho_i\omega=\sum_i\int_{U_i}\rho_i(\sum_\alpha\eta_\alpha\omega)=\sum_i\int_{U_i}\rho_i\omega,$$

从而积分 $\int_M\omega$ 是 well-defined。

一个需要注意的地方是：微分形式的积分依赖于定向。假设 M 是连通定向流形，如果记 $\bar{M}$ 为 M 赋予相反的定向，则对 $\omega\in\Omega_c^n(M)$，有 $\int_{\bar{M}}\omega=-\int_M\omega$。事实上，如果 $supp\,\omega\subset(U,\phi)$，$\omega=fdx_1\wedge\cdots\wedge dx_n$，如果改变定向，考虑图卡 $(U,\tilde{\phi})$，满足 $\tilde{\phi}=(y_1,\ldots,y_n)=(-x_1,x_2,\ldots,x_n)$，则在 $\tilde{\phi}$ 下 $\omega=-fdy_1\wedge\cdots\wedge dy_n$，于是

$$\int_{\tilde{\phi}(U)}-f\circ\tilde{\phi}^{-1}(y)dy_1\ldots dy_n\overset{y=\tilde{\phi}\circ\phi^{-1}(x)}{=}\int_{\phi(U)}-f\circ\phi^{-1}(x)dx_1\ldots dx_n.$$

所以微分形式的积分就是多元微积分中第二型曲线、曲面积分的推广。

我们再陈述两条简单的性质：

引理 1 *(1),* 假设 M^n 是定向流形，则积分定义了线性满射:$I:\Omega_c^n(M^n)\to\mathbb{R}$;
(2), 假设 $\phi:M\to N$ 是保定向的微分同胚，则 $\int_M\phi^*\omega=\int_N\omega,\forall\omega\in\Omega_c^n(N)$。

证明 （1），积分的线性性是显然的。为证 I 是满射，我们只需要证明存在 $\omega\in\Omega_c^n(M)$ 使得 $\int_M\omega\neq0$ 即可。为此任取定向图卡 (U,ϕ)，再取 $\phi(U)$ 中紧支集光滑函数 $\eta\in C_0^\infty(\phi(U))$，满足 $\eta\geq0$ 且不恒为 0。令

$$\omega(x)=\begin{cases}\eta\circ\phi(x)dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n, & \text{if } x\in U;\\ 0, & \text{if } x\in M\setminus U\end{cases}$$

则有 $\omega\in\Omega_c^n(M)$，并且 $\int_M\omega=\int_{\phi(U)}\eta(x)dx>0$。

（2），利用单位分解，不妨假设 ω 的支集包含于某个坐标邻域，利用本节开始部分的计算直接可以得到。 □

3 Stokes 公式

微分形式的积分理论中最核心的工具是 Stokes 公式，它将高维的积分与低一维的积分联系起来，可以视为 Newton-Leibniz 公式的自然推广。

定义 1 微分流形 M^n 的闭子集 N 称为一个“光滑带边区域”，如果对任意 $p\in N$，存在 M 的光滑图卡 (U,ϕ) 使得 $\phi(U\cap N)$ 是 $\mathbb{R}_-^n$ 中的（诱导拓扑下）开子集，其中 $\mathbb{R}_-^n=\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n\mid x_1\leq0\}$。这样的图卡 (U,ϕ) 称为 *adapted* 的。

例如：$D_n:=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\|x\|\leq1\}$ 就是 $\mathbb{R}^n$ 中一个光滑带边区域。

容易看出 N 中的点 p 分为两类：或者 p 在 adapted 图卡 (U,ϕ) 下坐标 $\phi(p)$ 为 $\mathbb{R}_-^n$ 的内点，则这样的点必然是 N 的内点；或者 p 在某个 adapted 图卡下坐标 $\phi(p)$ 为 $\mathbb{R}_-^n$ 的边界点，即 $x_1(p)=0$，则在 p 的任意开邻域中都既有 N 中的点，也有 N^c 中的点，所以 $p\in\partial N$。这个刻画也能说明：如果 p 在某个 adapted 图卡下 $x_1(p)=0$，则在其他 adapted 图卡下也是如此。

引理 2 假设 N 是流形 M^n 的光滑带边区域，则 ∂N 是 M 的余 *1* 维光滑子流形；并且如果 M 可定向，则 ∂N 也可定向。

证明 首先由前面的讨论可以知道 ∂N 可以刻化为那些 $p\in M$ 的集合：存在某个 adapted 图卡 (U,ϕ)，$p\in U$ 并且 $x_1(p)=0$。于是在 adapted 图卡下，有

$$\phi\big(\partial N\cap U\big)=\phi(U)\cap\mathbb{R}^{n-1}.$$

这说明 ∂N 是 M 的 $n-1$ 维光滑子流形。

如果 M 可定向，则可以找到连通的定向 adapted 图卡（如果 adapted 图卡 (U,ϕ) 与给定的 M 的定向相反，则可在 x_2 坐标前乘 -1，从而得到定向的 adpated 图卡）。此时 $\psi:=\pi\circ\phi|_{\partial N\cap U}:\partial N\cap U\to\mathbb{R}^{n-1}$ 就是 ∂N 的一个光滑图卡，其中 $\pi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n-1}$ 为投影 $(x_1,\ldots,x_n)\mapsto(x_2,\ldots,x_n)$。

Claim: 所有这些 $(\partial N\cap U,\psi)$ 构成一个定向光滑图册。

为此，注意到对于定向的 adapted 图卡 (U_1,ϕ_1) 和 (U_2,ϕ_2)，记 $\phi_1=(x_1,\ldots,x_n),\phi_2=(y_1,\ldots,y_n)$，则当 $U_1\cap U_2\neq\emptyset$ 时有 $J(\phi_2\circ\phi_1^{-1})>0$。对于 $p\in U_1\cap U_2$，由于 $y_1(0,x_2,\ldots,x_n)\equiv0$，故有

$$\det J(\phi_2\circ\phi_1^{-1})\big(\phi_1(p)\big)=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1}(\phi_1(p)) & 0\\ * & \frac{D(y_2,\ldots,y_n)}{D(x_2,\ldots,x_n)}\big(\phi_1(p)\big)\end{pmatrix}>0.$$

而当 $x_1<0$ 时，亦有 $y_1<0$，所以（记 $\phi_1(p)=(0,a)$）

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1}(\phi_1(p))=\lim_{x_1\to0-}\frac{y_1(0,a)-y_1(x_1,a)}{0-x_1}=\lim_{x_1\to0-}\frac{0-y_1(x_1,a)}{0-x_1}\geq0.$$

而由 $\det J(\phi_2\circ\phi_1^{-1})\big(\phi_1(p)\big)=\frac{\partial y_1}{\partial x_1}(\phi_1(p))\cdot\frac{\partial(y_2,\ldots,y_n)}{\partial(x_2,\ldots,x_n)}\big(\phi_1(p)\big)>0$ 可知 $\frac{\partial y_1}{\partial x_1}(\phi_1(p))\neq0$，于是 $\frac{\partial y_1}{\partial x_1}(\phi_1(p))>0$，进而有

$$\det J(\psi_2\circ\psi_1^{-1})\big(\psi_1(p)\big)=\frac{\partial(y_2,\ldots,y_n)}{\partial(x_2,\ldots,x_n)}\big(\phi_1(p)\big)>0.$$

由此得到 ∂N 也可定向。 □

证明中给出的 ∂N 的定向称为“∂N 的诱导定向”。如无特殊说明，在 M 为定向流形时，我们总赋予 ∂N 诱导定向。

定理 2 (Stokes 公式) 假设 $N\subset M^n$ 是 n 维流形 M 中的光滑带边区域，$\omega\in\Omega_c^{n-1}(M)$，则有

$$\int_{\partial N}\iota^*\omega=\int_N d\omega,$$

其中 $\iota:\partial N\to M$ 是自然的嵌入映射。

证明 用 adapted 图卡 $\{(U_i,\phi_i)\}_{i\in I}$ 覆盖 N，再结合开集 $U_0:=N^c$ 就得到 M 的一个开覆盖。取从属于这个覆盖的单位分解 $\{\eta_0,\eta_i\}_{i\in I}$。则有

$$\int_{\partial N}\iota^*\omega=\sum_{i\in I}\int_{\partial N\cap U_i}\iota^*(\eta_i\omega),\quad\int_N d\omega=\sum_{i\in I}\int_{N\cap U_i}d(\eta_i\omega),$$

于是只需要证明 $\int_{\partial N\cap U_i}\iota^*(\eta_i\omega)=\int_{N\cap U_i}d(\eta_i\omega)$。于是我们可以不妨假设 $supp(\omega)\subset U_i$ 包含于某个 adapted 图卡中。

<u>情形 1: $U_i\cap\partial N=\emptyset$。</u>

此时 $\iota^*\omega\equiv0$，于是只要证明 $\int_{U_i\cap N}d\omega=0$。注意现在一定有 $U_i\subset N^\circ$。通过坐标图卡，只需要证明如下结论：假设 ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中开集 U 上的紧支集光滑 $n-1$ 形式，则 $\int_U d\omega\equiv0$。此时不妨假设

$\omega = f(x)dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_j}\wedge\cdots\wedge dx_n$，其中 $f\in C_0^\infty(U)$。在 U 外做 0 延拓，可以视 ω 为 $\mathbb{R}^n$ 上的紧支集微分形式。此时 $d\omega = (-1)^{j-1}\frac{\partial f}{\partial x_j}dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n$。假设 $supp(f)\subset[-R,R]^n$，则有

$$\begin{aligned}\int_U d\omega &= \int_{-R}^R\cdots\int_{-R}^R(-1)^{j-1}\frac{\partial f}{\partial x_j}dx_1\dots dx_n\\ &= \int_{-R}^R\cdots\int_{-R}^R\Big(\int_{-R}^R(-1)^{j-1}\frac{\partial f}{\partial x_j}dx_j\Big)dx_1\dots\widehat{dx_j}\dots dx_n\\ &= \int_{-R}^R\cdots\int_{-R}^R\Big(0-0\Big)dx_1\dots\widehat{dx_j}\dots dx_n=0.\end{aligned}$$

情形 2: $U_i\cap\partial N\neq\emptyset$。

此时仍然利用 adapted 图卡转化为欧氏空间: 假设 $supp(\omega)\subset U\subset[-R,R]^n$，$\omega=\sum_{i=1}^n f_i(x)dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\cdots\wedge dx_n$，我们需要计算 $\int_{U\cap\mathbb{R}^n_-}d\omega$ 以及 $\int_{U\cap\mathbb{R}^{n-1}}\omega$，这里我们将 $\mathbb{R}^{n-1}$ 等同于 $\mathbb{R}^n$ 的子空间 $\{x_1=0\}$。

一方面，我们有 $\omega|_{\mathbb{R}^{n-1}} = f_1(0,x_2,\dots,x_n)dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n$，从而

$$\int_{U\cap\mathbb{R}^{n-1}}\omega = \int_{U\cap\mathbb{R}^{n-1}} f_1(0,x_2,\dots,x_n)dx_2\dots dx_n = \int_{-R}^R\cdots\int_{-R}^R f_1(0,x_2,\dots,x_n)dx_2\dots dx_n.$$

另一方面，

$$d\omega = \Big(\sum_{i=1}^n(-1)^{i-1}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\Big)dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n,$$

所以有

$$\begin{aligned}\int_{U\cap\mathbb{R}^n_-}d\omega &= \int_{-R}^0\int_{-R}^R\cdots\int_{-R}^R\Big(\sum_{i=1}^n(-1)^{i-1}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\Big)dx_1\dots dx_n\\ &= \int_{-R}^0\int_{-R}^R\cdots\int_{-R}^R\frac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1\dots dx_n+\sum_{i=2}^n(-1)^{i-1}\int_{-R}^0\int_{-R}^R\cdots\int_{-R}^R\frac{\partial f_i}{\partial x_i}dx_1\dots dx_n\\ &= \int_{-R}^R\cdots\int_{-R}^R\Big(\int_{-R}^0\frac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1\Big)dx_2\dots dx_n+\sum_{i=2}^n(-1)^{i-1}\int_{-R}^0\int_{-R}^R\cdots\int_{-R}^R\Big(\int_{-R}^R\frac{\partial f_i}{\partial x_i}dx_i\Big)dx_1\dots\widehat{dx_i}\dots dx_n\\ &= \int_{-R}^R\cdots\int_{-R}^R\Big(f_1(0,x_2,\dots,x_n)-f_1(-R,x_2,\dots,x_n)\Big)dx_2\dots dx_n\\ &= \int_{-R}^R\cdots\int_{-R}^R f_1(0,x_2,\dots,x_n)dx_2\dots dx_n.\end{aligned}$$

所以 $\int_{U\cap\mathbb{R}^n_-}d\omega=\int_{U\cap\mathbb{R}^{n-1}}\omega$。 □

推论 2 *假设 $\omega\in\Omega_c^{n-1}(M^n)$，$M$ 是定向流形，则有 $\int_M d\omega=0$。*

证明 此结果就是 $N=M$ 的特殊情形。或者利用单位分解，则上定理证明中的情形 1 即可说明这个结论。 □

例 3 *我们前面已经说明 $\omega=\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1}x_idx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\cdots\wedge dx_{n+1}$ 限制在 S^n 上是一个处处非 0 的 n 形式。如果将 S^n 视为闭单位球 $D\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 的边界，则有 $\int_{S^n}\omega=\int_D d\omega=\int_D(n+1)dx_1\dots dx_{n+1}=(n+1)\omega_{n+1}>0$。由上述推论，这也能说明 ω 不是 S^n 上的恰当形式，从而 $H^n(S^n)\neq 0$。*

下次课我们将利用积分说明 $[\omega]\mapsto\int_M\omega$ 是 n 维可定向紧致流形 M^n 的 n-阶 de Rham 上同调到 $\mathbb{R}$ 的线性同构，即总有 $H^n(M^n)\cong\mathbb{R}$。

练习 2 *考虑如下的光滑映射 $\pi:S^3\to S^2$（称为“Hopf 纤维化”Hopf fibration）*

$$\pi(x_1,x_2,x_3,x_4):=\Big(2(x_1x_3+x_2x_4),2(x_2x_3-x_1x_4),x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2\Big).$$

令 $\omega\in\Omega^2(S^2)$ 同例 3，证明：存在 $\alpha\in\Omega^1(S^3)$ 使得 $d\alpha=\pi^*\omega$，并计算积分 $\int_{S^3}\alpha\wedge d\alpha$。