第十一讲

石亚龙

1 Stokes 公式的应用

作为 Stokes 公式的应用，我们来计算 n 维可定向流形的最高阶 de Rham 上同调。记 $\Omega_c^k(M)$ 为 M 上紧支集光滑 k-形式构成的线性空间，则我们有：

定理 1 假设 M 是 n 维连通的可定向流形，则下面的序列是正合列：

$$\Omega_c^{n-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega_c^n(M) \xrightarrow{\int_M} \mathbb{R} \to 0.$$

如果 M^n 本身就是紧的，则 $\Omega_c^*(M) = \Omega^*(M)$，所以由 $H^n(M) = \Omega^n(M)/d\Omega^{n-1}(M)$ 知：

推论 1 假设 M 是 n 维连通的紧致可定向流形，则积分 $\int_M$ 诱导同构 $H^n(M) \cong \mathbb{R}$。

证明 我们此前已经知道 $\int_M : \Omega_c^n(M) \to \mathbb{R}$ 是满射，以及 $d\Omega_c^{n-1}(M) \subset Ker\left(\int_M\right)$，于是只要证明：如果 $\omega \in \Omega_c^n(M)$ 满足 $\int_M \omega = 0$，则存在 $\eta \in \Omega_c^{n-1}(M)$ 使得 $\omega = d\eta$。

证明的基本想法是：将问题转化到一个坐标图卡里，为此需要说明：对给定的坐标邻域 U，能够找到 $\kappa \in \Omega_c^{n-1}(M)$，使得 $supp(\omega - d\kappa) \subset U$。然后利用坐标映射转化为 $\mathbb{R}^n$ 中的问题。

Step 1: $M = \mathbb{R}^n$ 时定理成立：假设 $\omega \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0$，则存在 $\eta \in \Omega_c^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ 使得 $\omega = d\eta$。

此时 $\omega = f(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, 其中 $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\int_{\mathbb{R}^n} f = 0$。可设要找的 $\eta = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} f_i(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$。$d\eta = \omega$ 即

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = f.$$

我们用数学归纳法来证明：$n = 1$ 时，如果 $f(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ 满足 $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = 0$，则令 $h(x) := \int_{-\infty}^x f(t)dt$，显然有 $dh = f(x)dx = \omega$。如果 $supp(f) \subset [-R, R]$，则由 $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = 0$ 可知 $supp(h) \subset [-R, R]$，从而 $h \in \Omega_c^0(\mathbb{R})$。

现在假设 $n-1$ 时已得到证明，再回到 $\mathbb{R}^n$：假设 $supp(f) \subset [-R, R]^n$，定义

$$g(x_1, \ldots, x_{n-1}) := \int_{-\infty}^\infty f(x_1, \ldots, x_n) dx_n.$$

则 $supp(g) \subset [-R, R]^{n-1}$，并且 $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g = 0$。所以由归纳假设，存在 $g_1, \ldots, g_{n-1} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ 满足

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial g_i}{\partial x_i} = g.$$

这些函数如果视为 $\mathbb{R}^n$ 上的函数并不是紧支集的，因此我们可以再取一个紧支集光滑函数 $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ 满足 $\int_{\mathbb{R}} \rho = 1$，$supp(\rho) \subset [-R, R]$，并定义

$$f_j(x_1, \ldots, x_n) := g_j(x_1, \ldots, x_{n-1})\rho(x_n), \quad j = 1, \ldots, n-1,$$

以及

$$h := f - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}.$$

显然 $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$。只要能说明存在 $f_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\frac{\partial f_n}{\partial x_n} = h$ 即可。

我们别无选择，只能令

$$f_n(x_1,\ldots,x_n) := \int_{-\infty}^{x_n} h(x_1,\ldots,x_{n-1},t)dt.$$

需要看是否 $f_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$。注意到

$$\begin{aligned}
f_n(x_1,\ldots,x_n) &= \int_{-\infty}^{x_n} f(x_1,\ldots,x_{n-1},t)dt - \sum_{j=1}^{n-1}\int_{-\infty}^{x_n} \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x_1,\ldots,x_{n-1},t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{x_n} f(x_1,\ldots,x_{n-1},t)dt - \sum_j \frac{\partial g_j}{\partial x_j}(x_1,\ldots,x_{n-1})\int_{-\infty}^{x_n}\rho(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{x_n} f(x_1,\ldots,x_{n-1},t)dt - g(x_1,\ldots,x_{n-1})\int_{-\infty}^{x_n}\rho(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{x_n} f(x_1,\ldots,x_{n-1},t)dt - \int_{-\infty}^{x_n}\rho(t)dt\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n)dx_n.
\end{aligned}$$

由此立即得到 $supp(f_n) \subset [-R,R]^n$。从而 $\mathbb{R}^n$ 情形得证。

Step 2: 约化到一个给定的开集内: 若 $W \subset M$ 为非空开集, 则对任意 $\omega \in \Omega_c^n(M)$, 都能找到 $\kappa \in \Omega_c^{n-1}(M)$ 使得 $supp(\omega - d\kappa) \subset W$。

我们先说明 $M = \mathbb{R}^n$ 时此事成立：如果 $\int_{\mathbb{R}^n}\omega = c$，取 $\eta \in \Omega_c^n(W) \subset \Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\int_W \eta = 1$，则有 $\int_{\mathbb{R}^n}(\omega - c\eta) = 0$。根据 Step 1, 存在紧支集的 $\kappa \in \Omega_c^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ 使得 $\omega - c\eta = d\kappa$, 从而 $\omega - d\kappa = c\eta \in \Omega_c^n(W)$。

在一般情形，取 M 的定向图册 $\mathscr{U} = \{(U_\alpha,\phi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$，满足 $\phi_\alpha(U_\alpha) = \mathbb{R}^n$。假设 $\omega \in \Omega_c^n(M)$，利用单位分解，可将 ω 写为 $\omega = \sum_{j=1}^m \omega_j$，其中 $supp(\omega_j) \subset U_{\alpha_j}$。如果对每个 ω_j 都能找到 $\kappa_j \in \Omega_c^{n-1}(M)$ 使得 $supp(\omega_j - d\kappa_j) \subset W$，则 $\kappa := \kappa_1 + \cdots + \kappa_m$ 仍然是紧支集的，并且 $supp(\omega - d\kappa) \subset W$。所以我们可以不妨假设 $supp(\omega) \subset U_\alpha$，其中 $U_\alpha \in \mathscr{U}$ 是坐标邻域。我们也可以设 $W \subset U_\beta$，其中 $U_\beta \in \mathscr{U}$ 也是坐标邻域。(否则，取坐标邻域 U_β 满足 $U_\beta \cap W \neq \emptyset$，用 $W \cap U_\beta$ 取代 W 即可。)

我们取一族 $U_\alpha = U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \ldots, U_{\alpha_k} = U_\beta$ 满足 $U_{\alpha_j} \cap U_{\alpha_{j+1}} \neq \emptyset, j = 1,\ldots,k-1$。[1] 对每个开集对 $(U_{\alpha_j}, U_{\alpha_j}\cap U_{\alpha_{j+1}})$，可以用 $\mathbb{R}^n$ 时的结果。从 $\omega \in \Omega_c^n(U_{\alpha_1})$ 出发，首先找到 $\kappa_1 \in \Omega_c^{n-1}(U_{\alpha_1}) \subset \Omega_c^{n-1}(M)$，使得 $\omega_1 := \omega - d\kappa_1 \in \Omega_c^n(U_{\alpha_1}\cap U_{\alpha_2}) \subset \Omega_c^n(U_{\alpha_2})$。再找 $\kappa_2 \in \Omega_c^{n-1}(U_{\alpha_2})$, 使得 $\omega_2 := \omega_1 - d\kappa_2 \in \Omega_c^n(U_{\alpha_2}\cap U_{\alpha_3}) \subset \Omega_c^n(U_{\alpha_3})$，依次类推，最后 $\omega_{k-1} = \omega - d(\kappa_1 + \cdots + \kappa_{k-1}) \in \Omega_c^n(U_{\alpha_{k-1}}\cap U_{\alpha_k}) \subset \Omega_c^n(U_{\alpha_k})$。（一个形象的比喻是：就像毛毛虫往前爬。）

Step 3: 证明的完成：

取 M 的定向图卡 (U,ϕ) 使得 $\phi(U) = \mathbb{R}^n$，则对 $\omega \in \Omega_c^n(M)$ 满足 $\int_M \omega = 0$，由 Step 2，可以找到紧支集的 $\kappa \in \Omega_c^{n-1}(M)$ 使得 $supp(\omega - d\kappa) \subset U$。此时有

$$\int_U \omega - d\kappa = \int_M \omega - d\kappa = \int_M \omega - \int_M d\kappa = 0.$$

[1] 这样的序列一定可以找到，理由如下：对任意两点 $p,q \in M, p \neq q$，都存在有限多个 $\alpha_1,\ldots,\alpha_k \in I$（允许重复），满足：

(i) $p \in U_{\alpha_1}, q \in U_{\alpha_k}$；

(ii) 当 $j = 1,\ldots,k-1$ 时，都有 $U_{\alpha_j} \cap U_{\alpha_{j+1}} \neq \emptyset$。

事实上，取一条连续曲线 $\sigma : [0,1] \to M$ 满足 $\sigma(0) = p, \sigma(1) = q$。则像集 $\sigma([0,1]) \subset M = \cup_{\alpha\in I} U_\alpha$ 是紧子集，所以存在有限个 $\alpha_1,\ldots,\alpha_k \in I$ 满足 $\sigma([0,1]) \subset \cup_{i=1}^k U_{\alpha_i}$。重新编号即可满足条件 (i) 与 (ii)。

现在 $(\phi^{-1})^*(\omega-d\kappa)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上紧支集的光滑 n-形式，并且积分为 0。于是由 Step 1，存在 $\tilde{\eta}\in\Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$ 使得 $(\phi^{-1})^*(\omega-d\kappa)=d\tilde{\eta}$。$\phi^*\tilde{\eta}$ 是 U 上紧支集微分形式，从而也可视为 M 上紧支集微分形式。令 $\eta:=\kappa+\phi^*\tilde{\eta}$，则有 $d\eta=d\kappa+\phi^*d\tilde{\eta}=\omega$。 □

2 映射度

上述定理有一个非常有用的应用：假设 M,N 都是 n 维连通定向的紧致光滑流形，$f:M\to N$ 是光滑映射，则 $f^*:H^n(N)\to H^n(M)$ 是一个 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的线性映射，从而一定是数乘，这个乘上去的数我们称为 f 的映射度，记为 $deg(f)$。回忆 $H^n(N)$ 到 $\mathbb{R}$ 的同构是如何给出的：任何 N 上 n-形式 ω 都是闭的，我们将 $[\omega]$ 等同于 $\int_M\omega\in\mathbb{R}$。于是 $deg(f)$ 可以如下刻画：对任意 $\omega\in\Omega^n(N)$，有

$$\int_M f^*\omega=deg(f)\int_N\omega.$$

这个定义的好处是比较容易计算和操作，例如立即可以得到 $deg(f\circ g)=deg(f)\cdot deg(g)$，以及 $deg(f)$ 只依赖于 f 的同伦类（因为我们已证过 $f^*:H^n(N)\to H^n(M)$ 只依赖于 f 的同伦类），进而利用连续映射的同伦逼近，我们还可以定义连续映射的映射度。

你能否看出 $deg(f)\in\mathbb{Z}$? 为此我们需要映射度的一个微分学刻画。回忆切映射 $(f_*)_p=D_pf:T_pM\to T_{f(p)}N$，如果 M 与 N 各取了 p 与 $q=f(p)$ 附近的定向图卡 $(U,\phi),(V,\psi)$，如果记 $\phi=(x_1,\ldots,x_n),\psi=(y_1,\ldots,y_n)$，则可以记 $\psi\circ f\circ\phi^{-1}(x_1,\ldots,x_n)=\big(y_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,y_n(x_1,\ldots,x_n)\big)$，于是

$$D_pf\big(\frac{\partial}{\partial x_i}\big|_p\big)=\sum_j\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\big(\phi(p)\big)\frac{\partial}{\partial y_j}\big|_q,$$

这里 $\big(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\big)_{1\le i,j\le n}=J(\psi\circ\phi^{-1})$。当 $\det D_pf:=\det J(\psi\circ\phi^{-1})\big(\phi(p)\big)\neq 0$ 时，如果 $\det J(\psi\circ\phi^{-1})\big(\phi(p)\big)>0$，我们称 f 在 p 处“保定向”，否则称 f 在 p 处“反定向”。如果改变定向图卡的选择，则一般 $\det D_pf=\det J(\psi\circ\phi^{-1})\big(\phi(p)\big)$ 的数值会发生变化[2]，但是符号不变。

定理 2 假设 M,N 都是 n 维连通定向的紧致光滑流形，$f:M\to N$ 是光滑映射，$q\in N$ 是 f 的正则值。则 $f^{-1}(q)$ 是有限点集（允许为空集），并且有

$$deg(f)=\sum_{p\in f^{-1}(q)}sgn\Big(\det D_pf\Big),$$

其中当 $f^{-1}(q)=\emptyset$ 时约定上式右端为 0。

为了证明此事，我们需要如下引理：

引理 1 (“唱片引理”) 假设 M,N 都是 n 维紧致光滑流形，$f:M\to N$ 是光滑映射，$q\in N$ 是 f 的正则值，则 $f^{-1}(q)$ 是有限点集（允许为空集）。如果记 $f^{-1}(q)=\{p_1,\ldots,p_k\}$，则存在 q 的开邻域 V 使得 $f^{-1}(V)=\sqcup_{j=1}^kU_k$，其中 U_k 是 p_k 的开邻域，并且 $f|_{U_k}:U_k\to V$ 是微分同胚。

证明 假设 $p\in f^{-1}(q)$，由于 q 是正则值，可知 D_pf 是满射，从而是同构（由于维数相同）。由逆映射定理，存在 p 的开邻域 U 和 q 的开邻域 V 使得 $f|_U:U\to V$ 是微分同胚。由此可知 $f^{-1}(q)$ 是 M 的离散子集。再由 $f^{-1}(q)$ 闭以及 M 紧可知 $f^{-1}(q)$ 紧，结合离散性可知 $f^{-1}(q)$ 是有限的。

假设 $f^{-1}(q)=\{p_1,\ldots,p_k\}$，由上面的讨论，对每个 p_k，存在开邻域 $\tilde{U}_k$ 和 q 的开邻域 V_k 使得 $f|_{\tilde{U}_k}:\tilde{U}_k\to V_k$ 是微分同胚。令 $V:=(\cap_{j=1}^kV_k)\setminus f(M\setminus\cup_{j=1}^k\tilde{U}_k)$，则 V 仍然是 q 的开邻域，并且 $f^{-1}(V)\subset\cup_{j=1}^k\tilde{U}_k$。令 $U_k:=f^{-1}(V)\cap\tilde{U}_k$，则容易看到 $f|_{U_k}:U_k\to V$ 是微分同胚。 □

[2]所以严格讲“$\det D_pf$”不是一个好的记号，因为它不仅依赖 D_pf 也依赖于图卡的选取，这里我们只是为了记号简便。

证明 [定理 2的证明：] 假设 $q, p_1, \ldots, p_k, U_k, V$ 如上述唱片引理。通过适当缩小 V 我们可以假设 V 包含于定向坐标图卡 $\big(W, \psi = (y_1, \ldots, y_n)\big)$ 且 $\psi(V) = B_r(0) \subset \mathbb{R}^n$。取 $\chi \in C_0^\infty(B_r(0))$ 满足 $\int_{B_r(0)} \chi(y)dy = 1$，令 $\omega := \chi \circ \phi dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$，则通过在 W 外做零延拓，ω 可视为 N 上的光滑 n-形式，并且 $\int_N \omega = \int_W \omega = \int_{B_r(0)} \chi(y) dy_1 \ldots dy_n = 1$。于是根据 $deg(f)$ 的定义，我们得到

$$deg(f) = \int_M f^* \omega = \sum_{j=1}^{k} \int_{U_j} f^* \omega,$$

其中第二个等号是因为 $supp(f^*\omega) \subset f^{-1}(V) = \sqcup_{j=1}^k U_j$。于是定理的证明归结为如下的：
Claim: 对每个 $j = 1, \ldots k$，都有

$$\int_{U_j} f^* \omega = sgn\big(\det D_{p_j} f\big) = \pm 1.$$

事实上，根据我们上次课的讨论，$f|_{U_k}$ 是 U_k 到 V 的微分同胚，是否保定向取决于 $\det J(\psi \circ \phi^{-1})$ 的符号。而由 U_k 的连通性，这个符号等于 $sgn\big(\det D_{p_j} f\big)$。于是当 $\det D_{p_j} f > 0$ 时，$\int_{U_j} f^* \omega = \int_V \omega = 1$；当 $\det D_{p_j} f < 0$ 时，$\int_{U_j} f^* \omega = -\int_V \omega = -1$。

如果 $f^{-1}(q) = \emptyset$，由于 $f(M)$ 紧，从而闭，所以存在 q 的开邻域 V 满足 $f^{-1}(V) = \emptyset$。取和上面一样的 ω，则 $f^*\omega \equiv 0$，由此得到 $deg(f) = \int_M f^* \omega = 0$。 □

为了应用方便，我们需要如下的：

定理 3 (Sard-Brown) 对于微分流形之间的光滑映射，临界点集的像是零测集，从而正则值的集合是稠密的。

回忆：欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的子集 E 称为"零测集"，如果对任意 $\varepsilon > 0$，存在一个至多可数的覆盖 $E \subset \cup_i I_i$，其中 I_i 是非退化的矩形 $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$，满足 $\sum_i |I_i| < \varepsilon$，其中 I_i 表示 I_i 的 n-维体积。由于 $\mathbb{R}^n$ 中的 C^1 映射将零测集变为零测集，所以我们可以定义 n-维光滑流形 M 的零测集：$E \subset M$ 称为零测集，如果对任何 M 的光滑图卡 (U, ϕ)，集合 $\phi(U \cap E)$ 是 $\phi(U)$ 中的零测集。如果 E 是 M 的零测集，则 $M \setminus E$ 必然是 M 的稠密子集，即 $\overline{M \setminus E} = M$，因为否则 E 就会有内点，不可能是零测集。

由上述讨论，证明的关键是如下的欧氏空间的版本（Sard）：假设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是非空开集，$f : U \to \mathbb{R}^m$ 是光滑映射，记 $C_f := \{p \in U \mid rk(D_p f) < m\}$，则 $f(C_f)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的零测集。

我们这里只讲一下证明的核心想法，具体细节留给大家做练习（可参考 Madsen 的书或者 Milnor 的《从微分观点看拓扑》。）

假设 $m = n$，并且 $U = Q$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的单位方体。将每边 K 等分（$K \in \mathbb{N}$）则得到 K^n 个边长为 $\frac{1}{K}$ 的子方体。假设 $p \in J \cap C_f$，其中 J 为其中的子方体，则 $f(p) + D_p f(\mathbb{R}^n)$ 是一个过 $f(p)$ 的低维仿射子空间，记为 H。对其他的 $q \in J$，有

$$\|f(q) - f(p) + D_p f(q - p)\| \leq \varepsilon \|q - p\|,$$

只要 K 充分大（严格的做法：任取 $\varepsilon > 0$，存在 $K \in \mathbb{N} \cdots\cdots$）。所以 $f(q)$ 到 H 的距离不超过 $\varepsilon \cdot \frac{c(n)}{K}$。另一方面由拟微分中值不等式，得到

$$\|f(q) - f(p)\| \leq C(n, f)\|q - p\|, \forall q \in J,$$

所以 $|f(J \cap C_f)| \leq \varepsilon \frac{\tilde{C}(n,f)}{K^n}$，而覆盖 C_f 的那些 J 最多只有 K^n 个，从而 $|f(C_f)| \leq C(n, f)\varepsilon$。

我们来看一些映射度的应用：在定理 2的证明中，我们看到如果对某一点 $q \in N$ 满足 $f^{-1}(q) = \emptyset$，则 $deg(f) = 0$，于是有：

推论 2 假设 M,N 都是 n 维连通定向的紧致光滑流形，$f:M\to N$ 是光滑映射，如果 $deg(f)\neq 0$，则 f 一定是满射。

注 1 如果给定 $q\in N$ 我们要求解方程 $f(x)=q$，则 $deg(f)\neq 0$ 保证该方程必定有解。这件事情有无穷维的推广（*Leray-Schauder* 度），是利用拓扑方法求解非线性偏微分方程的重要工具。感兴趣的同学可以参考张恭庆《非线性分析方法》。

例 1 假设存在 $n+1$ 维定向流形 X，使得 M 是 X 中光滑带边区域 Ω 的边界。如果光滑映射 $f:M^n\to N^n$ 是一个光滑映射 $F:\Omega\to N$ 的限制，则必有 $deg(f)=0$。

事实上，任取 $\omega\in\Omega^n(N)$ 满足 $\int_N\omega\neq 0$，根据 *Stokes* 公式，有

$$deg(f)\int_N\omega=\int_M f^*\omega=\int_M F^*\omega=\int_\Omega dF^*\omega=\int_\Omega F^*d\omega=0,$$

从而 $deg(f)=0$。

作为特例，我们又一次得到了：$S^n=\partial B_1(0)$ 到 S^n 的恒同映射不能延拓为 $\overline{B_1(0)}$ 到 S^n 的光滑映射，因为恒同映射的映射度当然是 *1*。

例 2 我们来计算一下球面 S^n 的对径映射的映射度：$A:S^n\to S^n,x\mapsto -x$。

和前面一样，我们利用

$$\omega:=\iota^*\eta:=\iota^*\Big(\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1}x_idx_1\wedge\widehat{dx_i}\wedge\cdots\wedge dx_{n+1}\Big),$$

其中 $\iota:S^n\to\mathbb{R}^{n+1}$ 是自然嵌入映射。$\mathbb{R}^{n+1}$ 的对径映射记为 $\tilde{A}$，则有 $\tilde{A}\circ\iota=\iota\circ A$。而

$$\tilde{A}^*\eta=\tilde{A}^*\Big(\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1}x_idx_1\wedge\widehat{dx_i}\wedge\cdots\wedge dx_{n+1}\Big)=(-1)^{n+1}\Big(\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1}x_idx_1\wedge\widehat{dx_i}\wedge\cdots\wedge dx_{n+1}\Big)=(-1)^{n+1}\eta,$$

所以

$$A^*\omega=A^*(\iota^*\eta)=(\iota\circ A)^*\eta=(\tilde{A}\circ\iota)^*\eta=\iota^*(\tilde{A}^*\eta)=(-1)^{n+1}\iota^*\eta=(-1)^{n+1}\omega,$$

于是由 $deg(A)\int_{S^n}\omega=\int_{S^n}A^*\omega=(-1)^{n+1}\int_{S^n}\omega$ 立即得到 $deg(A)=(-1)^{n+1}$。

特别地，如果 n 是偶数，则 $deg(A)=-1$，从而 A 一定不能和恒同映射同伦，因为否则 A 的映射度就会是 *1*。

H. Hopf 的一个著名的定理告诉我们：

定理 4 (Hopf) 假设 M^n 是 n 维连通紧致定向光滑流形，则 M 到 S^n 的连续映射的同伦类由映射度唯一决定。

该定理的证明是比较困难的，可参考 Milnor 的《从微分观点看拓扑》正文最后一节。一个初等（不超出本课程范围）的证明的纲要可以在 Dubrovin-Fomenko-Novikov 的“Modern Geometry”第二卷第 13 节找到。

3 向量场孤立奇点的指标

假设 $X\in\mathfrak{X}(M)$，$p\in M$ 是 X 的一个孤立奇点，即 $X_p=0$，并且存在 p 的开邻域 U 使得 $X_q\neq 0,\forall q\in U\setminus\{p\}$。此时我们可以定义一个 X 在 p 处的“指标” $\iota(X;p)$ 如下：考虑 p 附近的坐标图卡 (U,ϕ)，不妨设 $\phi(p)=0$。假设 $\phi^{-1}(B_r(0))$ 中 X 只有 p 一个零点。利用坐标映射 $\phi=(x_1,\dots,x_n)$，可以设 $X|_U=\sum_{i=1}^n X^i\frac{\partial}{\partial x_i}$，则我们得到一个光滑映射

$$F:B_r(0)\to\mathbb{R}^n,\quad x\mapsto(X^1\circ\phi^{-1}(x),\dots,X^n\circ\phi^{-1}(x)).$$

则 $x \mapsto \frac{F(rx)}{\|F(rx)\|}$ 是 S^{n-1} 到 S^{n-1} 的光滑映射，记为 f_r。我们定义

$$\iota(X;p) := deg(f_r).$$

显然这个定义不依赖于 r——对不同的 r_1, r_2，只要充分小，就有 $f_{r_1} \sim f_{r_2}$，所以 $deg(f_{r_1}) = deg(f_{r_2})$。

我们还要说明 $\iota(X;p)$ 与坐标图卡的选择也无关。为此我们只需要证明：

引理 2 假设 $F : U \to \mathbb{R}^n$ 是 U 上光滑向量场，其中 $U \subset \mathbb{R}^n$ 为开集，$0 \in U$ 为 F 的孤立零点。假设 $\phi : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ 是微分同胚，满足 $\phi(0) = 0$，则对 V 上的光滑向量场 $\phi_* F$，有 $\iota(F;0) = \iota(\phi_* F;0)$。

证明细节将在下次课给出。

对于 n 维紧致光滑流形 M，令 $b_k := \dim_{\mathbb{R}} H^k(M)$ 为 M 的"第 k Betti 数"，则可定义 M 的 Euler 数（或"Euler-Poincaré 示性数"（Euler-Poincaré characteristic））为

$$\chi(M) := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k b_k.$$

我们接下来几次课的主要任务是证明如下的：

定理 5 (Poincaré-Hopf) 假设 M 是紧致光滑流形，$X \in \mathfrak{X}(M)$ 是光滑向量场，且只有孤立奇点，则有

$$\sum_{p \in X : X_p = 0} \iota(X;p) = \chi(M).$$

此定理也是陈省身先生给出 Gauss-Bonnet-Chern 定理简短的内蕴证明的主要工具之一。

练习 1 考虑 n 维连通定向流形 M, N 之间的逆紧（*proper*）光滑映射 f，请用紧支集的 n 形式合理地定义 $deg(f)$，并证明如果 $deg(f) \neq 0$ 则 f 一定是满射。

练习 2 请直接证明 S^3 上的对径映射和恒同映射同伦。

练习 3 考虑 $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ 上的光滑向量场 $X_k : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$，$X_k(z) = z^k$，$k \in \mathbb{N}$。请计算 $\iota(X_k;0)$。