# 第十三讲

石亚龙

回顾：我们上次课定义了向量场孤立零点的指标 $\iota(X;p)$，并且说明了紧致的 $n$ 维流形 $M$，$M$ 上具有孤立零点的光滑向量场的奇点指标之和与向量场的选取无关。一个自然的问题是：它等于多少？这个问题的答案是 Poincaré-Hopf 定理。

## 1 Poincaré-Hopf 定理的证明概要

**定理 1 (Poincaré-Hopf)** 对于紧致的 $n$ 维流形 $M$，和 $M$ 上只有孤立零点的光滑向量场 $X$，总有

$$Index(X;M)=\chi(M),$$

其中 $\chi(M)=\sum_i(-1)^i\dim H^i(M)$ 是 $M$ 的 *Euler* 数。

我们的想法是：既然这个指标之和与向量场的选取无关，我们就选一个特别好的向量场。比如一个 Morse 函数的梯度向量场。

我们首先定义 Morse 函数：一个 $M$ 上的光滑函数 $f$ 称为是 **Morse 函数**，如果 $f$ 的临界点都非退化。回忆：$p$ 是 $f$ 的临界点是指 $df|_p=0$，而临界点 $p$ 称为"非退化"的，如果对任意 $p$ 附近坐标图卡 $(U,\phi)$，有 $\left(\frac{\partial^2 f\circ\phi^{-1}}{\partial x_i\partial x_j}(\phi(p))\right)$ 非退化。此时 $\left(\frac{\partial^2 f\circ\phi^{-1}}{\partial x_i\partial x_j}(\phi(p))\right)$ 的负特征值的个数称为 $f$ 在 $p$ 处的 Morse index。

再来解释什么叫梯度向量场。为此我们要定义流形上的黎曼度量。所谓流形 $M$ 上的黎曼度量 $g$ 是指对流形的每一点 $p\in M$ 指定一个 $T_pM$ 上的内积 $g_p:T_pM\times T_pM\to\mathbb{R}$。$g$ 称为是光滑的黎曼度量，如果对任何坐标图卡 $(U,\phi)$ 和坐标向量场 $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_{i=1,\dots,n}$，有 $g_{ij}:=g(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j})\in C^\infty(U)$。任何微分流形上总存在光滑的黎曼度量：首先给一个坐标覆盖 $\mathscr{U}=\{(U_i,\phi_i)\}_{i\in I}$ 以及从属于它的单位分解 $\{\eta_i\}_{i\in I}$。对每个 $(U_i,\phi_i)$，我们可以定义一个半正定的双线性型 $g_i$，满足 $g_i$ 在 $U_i$ 外恒为 0，在 $U_i$ 上有

$$g_i(\frac{\partial}{\partial x_j},\frac{\partial}{\partial x_k}):=\eta_i\delta_{jk}.$$

不难验证：$\sum_{i\in I}g_i$ 光滑并且处处正定，就是一个 $M$ 上的黎曼度量。

另一个存在性证明可以利用 Whitney 嵌入定理：首先将 $M$ 嵌入 $\mathbb{R}^{n+k}$ 成为光滑的嵌入子流形，然后将 $\mathbb{R}^{n+k}$ 的标准内积限制在 $n$ 维线性子空间 $T_pM\subset\mathbb{R}^{n+k}$ 上即可。[1]

一旦有了内积，我们就知道：对 $T_pM$ 上的任意线性泛函 $\omega_p\in(T_pM)^*$，都存在唯一的 $\omega_p^\sharp\in T_pM$ 使得 $\omega_p(v)=g_p(\omega_p^\sharp,v),\forall v\in T_pM$。现在对于 $M$ 上的光滑函数 $f$，我们定义 $f$ 在 $p$ 处的梯度向量为

$$grad_pf:=(\nabla f)|_p:=(df|_p)^\sharp,$$

即

$$v(f)=df|_p(v)=g_p(grad_pf,v),\quad\forall v\in T_pM.$$

在局部坐标下记 $(g_{ij})^{-1}=:(g^{ij})$，则易见

$$grad\ f=\sum_{ij}g^{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}(f)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

[1] J. Nash 的著名定理说：事实上任何黎曼流形都可以用这种方式得到。为了证明这个定理，Nash 以 Newton 迭代法为出发点，发展了一套复杂的无穷维隐函数定理，称为"Nash-Moser 隐函数定理"，至今仍然是非线性偏微分方程领域的重要工具。

由此可以看出：$grad\ f$ 的零点就是 $f$ 的临界点。

Morse 理论的两个最基本的结果是：

**引理 1 (形变引理)** *假设 $f$ 是紧致流形 $M$ 上的光滑函数，$[a,b]\subset f(M)$，且其中无 $f$ 的临界值，则次水平集 $M_a := \{p\in M \mid f(p)<a\}$ 和 $M_b := \{p\in M \mid f(p)<b\}$ 一定微分同胚。*

大致的想法是：利用 $grad\ f$，将它在 $M_a$ 内部乘一个截断函数变为 0，得到一个光滑向量场 $X$，则利用 $X$ 的"流"所对应的一族微分同胚，即可将 $M_b$"形变"到 $M_a$。

形变引理说明：次水平集在演化的过程中，如果不穿过临界点，则拓扑没有变化。接下来的问题是：如果穿过了临界点，次水平集的拓扑如何变化？在临界点非退化时，利用如下的 Morse 引理可以分析清楚拓扑的变化：

**引理 2 (Morse 引理)** *假设 $p$ 是 $f$ 的非退化临界点，Morse 指标为 $k$，则存在 $p$ 附近的坐标图卡 $(U,\phi)$，满足 $\phi(p)=0$，以及*

$$f\circ\phi^{-1}(x)=f(p)-x_1^2-\cdots-x_k^2+x_{k+1}^2+\cdots+x_n^2.$$

由此通过认真分析次水平集的变化，即可得到 $M$ 的拓扑信息。事实上 5 维以上的光滑 Poincaré 猜想即是 S. Smale 用这个办法证明的。感兴趣的同学可参考 J. Milnor 的"Lectures on the H-Cobordism Theorem"一书。M. Morse 最早沿这个思路得到了：

**定理 2 (Morse)** *假设 $f$ 是 $n$ 维紧致光滑流形 $M$ 上的 Morse 函数，则 Euler 数*

$$\chi(M)=\sum_{\lambda}(-1)^{\lambda}c_{\lambda},$$

*其中 $c_\lambda$ 为 Morse 指标为 $\lambda$ 的临界点的个数。*

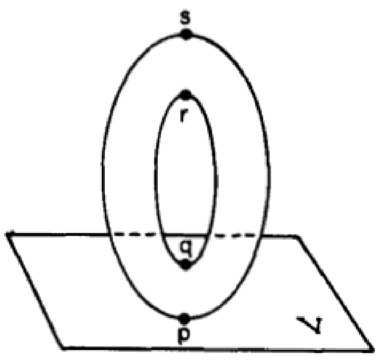


**Figure 1:** 摘自 Milnor "Morse theory" Page1：$p,q,r,s$ 四点都是高度函数的非退化临界点。

利用 Morse 引理我们可以很容易得到：

**引理 3** *假设 $p_0\in M$ 是 $f$ 的非退化临界点，Morse 指标为 $k$，$g$ 是 $M$ 上光滑的黎曼度量。则*

$$\iota(grad\ f;p_0)=(-1)^k.$$

**证明** 由 Morse 引理，我们取坐标图卡 $(U,\phi)$ 满足

$$f\circ\phi^{-1}(x)=f(p)-x_1^2-\cdots-x_k^2+x_{k+1}^2+\cdots+x_n^2.$$

在此坐标下，有 $df=-2x_1dx_1-\cdots-2x_kdx_k+2x_{k+1}dx_{k+1}+\cdots+2x_ndx_n$。假设 $g_{ij}:=g(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j})$，并且记 $(g_{ij})^{-1}=:(g^{ij})$，$(grad\ f)|_U:=\sum_{i=1}X^i\frac{\partial}{\partial x_i}$, 则易见

$$X^i=\sum_{j=1}^n g^{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}(f)=-2\sum_{j=1}^k g^{ij}x_j+2\sum_{j=k+1}^n g^{ij}x_j.$$

由此得到

$$\frac{\partial(X^i\circ\phi^{-1})}{\partial x_l}(0)=\begin{cases}-2g^{il} & \text{if } 1\le l\le k;\\ 2g^{il} & \text{if } k+1\le l\le n.\end{cases}$$

于是 $p_0$ 是 $grad\ f$ 的非退化零点，从而

$$\iota(grad\ f;p_0)=sign\det\Big(\frac{\partial(X^i\circ\phi^{-1})}{\partial x_l}(0)\Big)=(-1)^k.$$

□

由此我们可以得到 Poincaré-Hopf 定理的证明：

**证明** 取 $f$ 为 $M$ 上的 Morse 函数，则有

$$\sum_{p\in M:grad\ f|_p=0}\iota(grad\ f;p)=\sum_{p\in M:df|_p=0}(-1)^{\text{Morse index of } p}=\sum_{p\in M:df|_p=0,\text{Morse index of } p=\lambda}(-1)^\lambda=\sum_\lambda(-1)^\lambda c_\lambda,$$

从而根据 Morse 定理可以知道这个和等于 $\chi(M)=\sum_{i=1}^n(-1)^ib_i$，其中 $b_i:=\dim H^i(M)$。 □

**推论 1** 假设 $M$ 是奇数维紧致可定向流形，则 $\chi(M)=0$。

**证明** 任取 $M$ 上具有非退化孤立零点的向量场 $X$，则对任意零点 $p$，记 $\phi_*X=F\in C^\infty(\phi(U);\mathbb{R}^n)$，有

$$\iota(-X;p)=sign\det(-D_0F)=(-1)^n sign\det(D_0F)=-sign\det(D_0F)=-\iota(X;p),$$

从而由 Poincaré-Hopf 定理 $\chi(M)=Index(-X;M)=-Index(X;M)=-\chi(M)$，从而 $\chi(M)=0$。 □

Morse 函数是否总存在？答案是肯定的。事实上可以证明任何光滑函数都可以用 Morse 函数来逼近。我们这里给出一个直接的存在性证明：假设紧流形 $M^n$ 已经光滑嵌入 $\mathbb{R}^{n+k}$，则对几乎所有的 $q\in\mathbb{R}^{n+k}$，函数 $f(x):=\frac{1}{2}\|x-q\|^2$ 是 $M$ 上的 Morse 函数。为了简便，我们只讨论 $k=1$ 的情形，一般情形只是记号更复杂一点。

我们在坐标图卡上讨论。这个时候其实坐标映射的逆更好用：设 $V\subset\mathbb{R}^n$ 为开集, $\psi:V\to M$ 为 $V$ 到 $M$ 中开集 $U$ 的微分同胚。我们总是把 $\psi$ 视为 $\mathbb{R}^{n+1}$-值的映射（对应微分几何课程中的“正则曲面片”)。适当缩小 $V$,可以假设我们能找到处处由定义的单位法向量场 $\nu:V\to\mathbb{R}^{n+1}$,满足 $\nu(x)\in T_{\psi(x)}M^\perp,\forall x\in V$。这时候 $\{E_i(x):=\frac{\partial\psi}{\partial x_i}(x)\}_{i=1,\dots,n}$ 是 $T_{\psi(x)}M$ 的一组基。考虑映射 $\Phi(x,t):V\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{n+1}$, $\Phi(x,t):=\psi(x)+t\nu(x)$。

**Claim:** 若 $q$ 是 $\Phi$ 的正则值，则 $f$ 是 $U$ 上的 Morse 函数。

由于 $M$ 总可以由至多可数个坐标图卡覆盖，可数多个零测集的并总是零测集，所以我们一定可以找到足够多的 $q$ 使得 $f$ 是 $M$ 上的 Morse 函数。

下面证明 Claim：为此我们记 $h:=f\circ\psi:V\to\mathbb{R}$。假设 $q$ 是 $\Phi$ 的正则值，则由定义，若 $q=\psi(x_0)+t_0\nu(x_0)$，矩阵

$$(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1},\cdots\frac{\partial\Phi}{\partial x_n},\frac{\partial\Phi}{\partial t})(x_0,t_0)$$

可逆。这说明 $\{\tilde{E}_i(x_0):=\frac{\partial\psi}{\partial x_i}(x_0)+t_0\frac{\partial\nu}{\partial x_i}(x_0)\}_{i=1,\dots,n}$ 也是 $T_{\psi(x_0)}M$ 的基。

现在 $h(x)=\frac{1}{2}\langle\psi(x)-q,\psi(x)-q\rangle$，所以

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}=\langle E_i(x),\psi(x)-q\rangle,$$

所以如果 $a\in V$ 是 $h$ 的临界点，则 $\psi(a)-q\in T_{\psi(a)}M^{\perp}$，从而存在 $\lambda\in\mathbb{R}$ 满足 $\psi(a)-q=-\lambda\nu(a)$，即 $q=\Phi(a,\lambda)$。于是得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 h}{\partial x_i\partial x_j}(a) &= \langle E_i(a),E_j(a)\rangle-\langle\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial x_j}(a),\lambda\nu(a)\rangle\\ &= \langle E_i(a),E_j(a)\rangle-\lambda\frac{\partial}{\partial x_j}\langle E_i(x),\nu(x)\rangle|_{x=a}+\lambda\langle E_i(a),\frac{\partial\nu}{\partial x_j}(a)\rangle\\ &= \langle E_i(a),E_j(a)+\lambda\frac{\partial\nu}{\partial x_j}(a)\rangle=\langle E_i(a),\tilde{E}_j(a)\rangle.\end{aligned}$$

因为 $\{E_i(a)\}_{i=1,\dots,n},\{\tilde{E}_i(a)\}_{i=1,\dots,n}$ 都是 $T_{\psi(a)}M$ 的基，所以 $(\frac{\partial^2 h}{\partial x_i\partial x_j}(a))$ 非退化。

**注 1** 由于 $\langle\nu(x),\nu(x)\rangle\equiv 1$,所以 $\frac{\partial\nu}{\partial x_i}$ 都是 $M$ 的切向量场。如果记 $h_{ij}(x):=\langle\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial x_j}(x),\nu(x)\rangle=-\langle E_j(x),\frac{\partial\nu}{\partial x_i}(x)\rangle$。$(h_{ij})$ 就是微分几何中的“第二基本形式”，而 $g_{ij}=\langle E_i(x),E_j(x)\rangle$ 就是“第一基本形式”，也就是 $M$ 上的一个黎曼度量。$(h_{ij})$ 相对于 $(g_{ij})$ 的特征值是指 $\det(h_{ij}-tg_{ij})$ 的零点，在微分几何中称为“主曲率”( *principal curvature* )。所以对 $t_0>0$，$(x_0,t_0)$ 是映射 $\Phi$ 的临界点的充分必要条件是 $E_i(x_0)+t_0\frac{\partial\nu}{\partial x_i}(x_0)$ 线性相关。注意到

$$\langle E_i(x_0)+t_0\frac{\partial\nu}{\partial x_i}(x_0),E_j(x_0)\rangle=g_{ij}(x_0)-t_0h_{ij}(x_0),$$

所以 $E_i(x_0)+t_0\frac{\partial\nu}{\partial x_i}(x_0)$ 线性相关的充要条件是 $\frac{1}{t_0}$ 是主曲率。

作为 Poincaré-Hopf 定理（或者 Morse 定理）的另一个应用，我们来证明古典的 Gauss-Bonnet 定理：

**定理 3** 对 $\mathbb{R}^3$ 中的正则闭曲面 $\Sigma$，一定有

$$\int_\Sigma KdA=2\pi\chi(\Sigma),$$

其中 $K$ 为 *Gauss* 曲率，$dA$ 为面积元。

事实上这个整体版本的 Gauss-Bonnet 公式最早也是 H. Hopf 得到的。

为了证明这个定理，我们首先有：

**引理 4** 对于球面的标准面积形式 $\omega_0:=i^*(x_1dx_2\wedge dx_3+x_2dx_3\wedge dx_1+x_3dx_1\wedge dx_2)$，总有

$$KdA=\mathbf{n}^*\omega_0,$$

其中 $\mathbf{n}:\Sigma\to S^2$ 为“*Gauss* 映射”，即 $\mathbf{n}(x)$ 为 $\Sigma$ 在 $x$ 处的单位外法向量。于是有 $\int_\Sigma KdA=deg(\mathbf{n})\int_{S^2}\omega_0=4\pi deg(\mathbf{n})$。

**证明** 回忆 Gauss 曲率的定义：取 $\Sigma$ 的局部参数化 $\mathbf{r}(u,v)$,其中 $(u,v)$ 为正定向的坐标系,即 $\det(\mathbf{n},\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v)>0$。此时 $dA=\|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\|du\wedge dv$，以及

$$\mathbf{n}(u,v)=\frac{\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\|}.$$

由拉回映射的定义，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbf{n}^*\omega_0(\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial v}) &= \omega_0|_{\mathbf{n}(u,v)}(\mathbf{n}_u,\mathbf{n}_v)\\ &= \det(\mathbf{n},\mathbf{n}_u,\mathbf{n}_v).\end{aligned}$$

回忆 $E=\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_u, F=\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_v, G=\mathbf{r}_v\cdot\mathbf{r}_v$，以及 $L=\mathbf{r}_{uu}\cdot\mathbf{n}=-\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{n}_u$，$M=\mathbf{r}_{uv}\cdot\mathbf{n}=-\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{n}_v=-\mathbf{r}_v\cdot\mathbf{n}_u$，$N=\mathbf{r}_{vv}\cdot\mathbf{n}=-\mathbf{r}_v\cdot\mathbf{n}_v$。通过用 $\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v$ 来表示 $\mathbf{n}_u,\mathbf{n}_v$，立即得到

$$\det(\mathbf{n},\mathbf{n}_u,\mathbf{n}_v)=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}\det(\mathbf{n},\mathbf{r}_u,\mathbf{r}_v)=K\|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\|,$$

从而得到 $\mathbf{n}^*\omega_0=K\|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\|du\wedge dv=KdA$。 □

**证明** [Gauss-Bonnet 公式的证明] 由上引理，我们只需证明 $\chi(\Sigma)=2deg(\mathbf{n})$。为此我们考虑 $\Sigma\subset\mathbb{R}^3$ 沿某一方向 $a$ 的高度函数 $f(x)=\langle x,a\rangle$，其中 $a\in\mathbb{R}^3$ 满足 $\|a\|=1$。由 Sard 定理，$\mathbf{n}$ 与 $-\mathbf{n}$ 的正则值都稠密，所以存在 $a\in S^2$ 满足 $\pm a$ 都是 $\mathbf{n}$ 的正则值。我们不妨假设 $a=e_3=(0,0,1)=:p_+$ 为北极点，$-a=(0,0,-1)=:p_-$ 为南极点。此时 $f(x)=x_3$。

**Claim:** $f$ 是 $\Sigma$ 上的 Morse 函数。

事实上，如果 $x_0=\mathbf{r}(u_0,v_0)$ 是 $f$ 的临界点，则 $df|_{x_0}=0$。而 $df=d(\mathbf{r}\cdot e_3)=(\mathbf{r}_u\cdot a)du+(\mathbf{r}_v\cdot a)dv$。所以 $T_{x_0}\Sigma\perp a$，即 $\mathbf{n}(x_0)=\pm a=p_\pm$。由于 $p_\pm$ 是 Gauss 映射的正则值，所以一定有 $K(x_0)\neq 0$。如果 $K(x_0)>0$，则 $\mathbf{n}_*$ 在 $x_0$ 处保定向，否则反定向。为说明 $x_0$ 是 $f$ 的非退化临界点，我们换一组坐标来看：局部上曲面 $\Sigma$ 就是函数 $f$ 的图像。所以我们可以取到正定向的局部参数化 $\tilde{\mathbf{r}}(\xi,\eta)=(\xi,\eta,f(\xi,\eta))$，满足 $\tilde{\mathbf{r}}(0,0)=x_0$。容易得到此时的 Gauss 曲率

$$K=\frac{\det D^2f}{(1+f_\xi^2+f_\eta^2)^2}.$$

所以 $f$ 在此坐标系下的 Hessian 矩阵非退化，从而 $x_0$ 是非退化临界点。由此我们还可以看出：如果 $K(x_0)>0$，则 $f$ 在 $x_0$ 的 Morse index 一定是 0 或者 2，否则 Morse index 为 1。

现在一方面由 Morse 定理或者 Poincaré-Hopf 定理，我们有

$$\chi(\Sigma)=\sum_{x\in\Sigma:df|_x=0}(-1)^{\text{Morse index of }x}=\sum_{x\in\Sigma:\mathbf{n}(x)=p_\pm}sign\,K(x).$$

另一方面，由映射度的微分学刻画，我们有

$$deg(\mathbf{n})=\sum_{x\in\Sigma:\mathbf{n}(x)=p_+}sign\,K(x)=\sum_{x\in\Sigma:\mathbf{n}(x)=p_-}sign\,K(x),$$

从而 $\chi(\Sigma)=2deg(\mathbf{n})$。 □

## 2 Poincaré 对偶定理

Poincaré 最早在研究单纯复形的同调论时发现了对偶的现象，也就是说在比较好的情形（如紧致可定向流形）互补维数的同调群同构。在 de Rham 理论中，这个同构是非常自然的。

**定理 4 (Poincaré duality)** 假设 $M$ 是 $n$-维可定向的紧致光滑流形。则下述双线性映射

$$\int:H^k(M)\times H^{n-k}(M)\to\mathbb{R},\quad ([\omega],[\eta])\mapsto\int_M\omega\wedge\eta$$

诱导同构 $H^{n-k}(M)\cong\left(H^k(M)\right)^*$。特别地，$b_k=b_{n-k}$。

更一般地，我们有 de Rham 上同调与紧支集 de Rham 上同调之间的对偶：

**定理 5 (Poincaré duality)** 假设 $M$ 是 $n$-维可定向的光滑流形。则下述双线性映射

$$\int : H^k(M) \times H_c^{n-k}(M) \to \mathbb{R}, \quad ([\omega],[\eta]) \mapsto \int_M \omega \wedge \eta$$

诱导同构 $H^k(M) \cong \left(H_c^{n-k}(M)\right)^*$。

我们今天先讨论 $\mathbb{R}^n$ 这一特殊情形。前面的课曾经证明了 $H_c^n(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}$。另外如果 $f \in \Omega_c^0(\mathbb{R}^n)$ 满足 $df = 0$, 则 $f \equiv const.$。但是 $f$ 具有紧支集, 这说明 $f \equiv 0$。所以 $H_c^0(\mathbb{R}^n) = 0$。这说明对于 $k = 0, n$, Poincaré 对偶定理对 $\mathbb{R}^n$ 成立。下面我们说明对一般的 $k$, Poincaré 对偶定理对 $\mathbb{R}^n$ 也成立, 即 $H_c^k(\mathbb{R}^n) = 0, 0 < k < n$。

为此我们将 $\mathbb{R}^n$ 等同于 $S^n \setminus \{p_0\}$。对 $0 < k < n$，假设 $\omega \in \Omega_c^k(\mathbb{R}^n)$ 满足 $d\omega = 0$，则我们可以将 $\omega$ 视为 $\Omega^k(S^n)$ 的元素，满足它在 $p_0$ 的某个开邻域上为 0。由于 $H^k(S^n) = 0$，一定存在 $\tau \in \Omega^{k-1}(S^n)$ 满足 $d\tau = \omega$。

我们希望能够合适选取 $\tau$，使得它也在 $p_0$ 的某个开邻域上恒为 0。

当 $k = 1$ 时这是很简单的：此时 $\tau$ 是函数，由 $\omega$ 在 $p_0$ 附近恒为 0 可知 $\tau$ 在 $p_0$ 附近恒为常数，记为 $a$，则 $\tau - a$ 即满足要求。

假设 $1 < k < n$。取 $p_0$ 足够小的开邻域 $W$ 使得 $W$ 微分同胚于 $\mathbb{R}^n$ 并且 $\omega|_W \equiv 0$。现在 $d\tau|_W \equiv 0$, 所以由 Poincaré 引理，可以找到 $W$ 中的 $k-1$ 形式 $\sigma$ 满足 $\tau = d\sigma$。现在取光滑函数 $\rho \in C^\infty(S^n)$ 满足 $supp(\rho) \subset W$ 并且 $\rho$ 在 $p_0$ 的一个更小的开邻域 $U$ 上恒为 1。于是 $\tau - d(\rho\sigma)$ 即满足要求。

**练习 1 (Witten deformation)** 假设 $M^n$ 为光滑流形，$f \in C^\infty(M)$ 是一个光滑函数，$t \geq 0$ 为一个常数。定义“扭化”的外微分算子 $d_{t,f} : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ 如下:

$$d_{t,f}\omega := e^{-tf} \cdot d\left(e^{tf}\omega\right).$$

*(1)* 证明: $d_{t,f} \circ d_{t,f} = 0$，于是可以定义 $H_{t,f}^k(M) := Ker\left(d_{t,f} : \Omega^k \to \Omega^{k+1}\right) / d_{t,f}\Omega^{k-1}$;

*(2)* 证明: 对任意 $k = 0, \ldots, n$ 都有 $H_{t,f}^k(M) \cong H^k(M)$。

**练习 2** 考虑环面 $T^2 = S^1 \times S^1$。

*(1)* 证明: $T^2$ 上存在一个处处非 *0* 的光滑向量场，并由此说明 $\chi(T^2) = 0$，进而计算 $H^1(T^2)$;

*(2)* 请直接计算 $H^1(T^2)$ ( 例如可用 *MV* 序列 )。