第十四讲

石亚龙

1 Poincaré 对偶定理

Poincaré 最早在研究单纯复形的同调论时发现了对偶的现象，也就是说在比较好的情形（如紧致可定向流形）互补维数的同调群同构。在 de Rham 理论中，这个同构是非常自然的。

定理 1 (Poincaré duality) 假设 M 是 n-维可定向的紧致光滑流形。则下述双线性映射

$$\int : H^k(M) \times H^{n-k}(M) \to \mathbb{R}, \quad ([\omega],[\eta]) \mapsto \int_M \omega \wedge \eta$$

诱导同构 $H^{n-k}(M) \cong \left(H^k(M)\right)^*$。特别地，$b_k = b_{n-k}$。

更一般地，我们有 de Rham 上同调与紧支集 de Rham 上同调之间的对偶：

定理 2 (Poincaré duality) 假设 M 是 n-维可定向的光滑流形。则下述双线性映射

$$\int : H^k(M) \times H_c^{n-k}(M) \to \mathbb{R}, \quad ([\omega],[\eta]) \mapsto \int_M \omega \wedge \eta$$

诱导同构 $H^k(M) \cong \left(H_c^{n-k}(M)\right)^*$。

先讨论 $\mathbb{R}^n$ 这一特殊情形。前面的课曾经证明了 $H_c^n(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}$。另外如果 $f \in \Omega_c^0(\mathbb{R}^n)$ 满足 $df = 0$，则 $f \equiv const.$。但是 f 具有紧支集，这说明 $f \equiv 0$。所以 $H_c^0(\mathbb{R}^n) = 0$。这说明对于 $k = 0, n$，Poincaré 对偶定理对 $\mathbb{R}^n$ 成立。下面我们说明对一般的 k，Poincaré 对偶定理对 $\mathbb{R}^n$ 也成立，即 $H_c^k(\mathbb{R}^n) = 0, 0 < k < n$。

为此我们将 $\mathbb{R}^n$ 等同于 $S^n \setminus \{p_0\}$。对 $0 < k < n$，假设 $\omega \in \Omega_c^k(\mathbb{R}^n)$ 满足 $d\omega = 0$，则我们可以将 ω 视为 $\Omega^k(S^n)$ 的元素，满足它在 p_0 的某个开邻域上为 0。由于 $H^k(S^n) = 0$，一定存在 $\tau \in \Omega^{k-1}(S^n)$ 满足 $d\tau = \omega$。

我们希望能够合适选取 τ，使得它也在 p_0 的某个开邻域上恒为 0。

当 $k = 1$ 时这是很简单的：此时 τ 是函数，由 ω 在 p_0 附近恒为 0 可知 τ 在 p_0 附近恒为常数，记为 a，则 $\tau - a$ 即满足要求。

假设 $1 < k < n$。取 p_0 足够小的开邻域 W 使得 W 微分同胚于 $\mathbb{R}^n$ 并且 $\omega|_W \equiv 0$。现在 $d\tau|_W \equiv 0$，所以由 Poincaré 引理，可以找到 W 中的 $k-1$ 形式 σ 满足 $\tau = d\sigma$。现在取光滑函数 $\rho \in C^\infty(S^n)$ 满足 $supp(\rho) \subset W$ 并且 ρ 在 p_0 的一个更小的开邻域 U 上恒为 1。于是 $\tau - d(\rho\sigma)$ 即满足要求。

在一般情形，为证明 Poincaré 对偶定理，我们考虑外积映射 $\Omega^k(M) \times \Omega_c^{n-k}(M) \to \Omega_c^n(M)$，它诱导双线性映射

$$H^k(M) \times H_c^{n-k}(M) \to H_c^n(M) \cong \mathbb{R}, \quad ([\omega_1],[\omega_2]) \mapsto \int_M \omega_1 \wedge \omega_2,$$

进而诱导线性映射 $D_M^k : H^k(M) \to \left(H_c^{n-k}(M)\right)^*$，$D_M^k([\omega_1])$ 在 $H_c^{n-k}(M)$ 上的作用就是 $[\omega_2] \mapsto \int_M \omega_1 \wedge \omega_2$。我们的目标是证明 D_M^k 是同构。

我们的主要工具是 Mayer-Vietoris 序列。为了省去复杂的技术细节，我们加一个额外的假设：存在有限的“good cover”（follow Bott-Tu）。

我们称 M 的一个开覆盖 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 为一个“good cover”，如果任何非空的有限交集 $U_{\alpha_0}\cap\cdots\cap U_{\alpha_k}$ 都微分同胚于 $\mathbb{R}^n$。**我们从现在开始总假设 M 存在一个有限的“good cover”**。在 M 紧致的时候这总是可能的，原因是可以利用一下黎曼度量：根据黎曼几何中一个著名的“测地凸邻域”的存在性，每一点 p 都存在一个开邻域 U_p，使得对其中任意两点 $q_1,q_2\in U_p$，连接 q_1,q_2 的最短曲线（即所谓的“极小测地线”）一定都落在 U_p 中。有限个这样的测地凸邻域的交如果非空，一定还是测地凸的，进而可以说明微分同胚于 $\mathbb{R}^n$。这个细节可以参考任何一本比较完整的黎曼几何教材，例如 do Carmo 的“Riemannian Geometry”。

我们在习题中讨论过紧支集 de Rham 上同调的 Mayer-Vietoris 序列：假设 $U=U_1\cup U_2\subset M$ 是两个非空开集的并（如果 $U_1\cap U_2=\emptyset$，我们约定 $\Omega_c^k(U_1\cap U_2)=0=\Omega^k(U_1\cap U_2)$）。则对任何 $k=0,1\ldots,n$，都有短正合列：

$$0\leftarrow\Omega_c^k(U)\xleftarrow{I_*}\Omega_c^k(U_1)\oplus\Omega_c^k(U_2)\xleftarrow{J_*}\Omega_c^k(U_1\cap U_2)\leftarrow 0,$$

其中 $I_*(\omega_1,\omega_2):=i_{1*}\omega_1+i_{2*}\omega_2$，$J_*(\omega):=(j_{1*}\omega,-j_{2*}\omega)$。这里 i_1,i_2 是 U_1,U_2 到 U 的包含映射，而 j_1,j_2 是 $U_1\cap U_2$ 到 U_1 和 U_2 的包含映射，i_{k*},j_{k*} 都表示“0 延拓”算子。由此得到紧支集 de Rham 上同调的长正合列

$$\begin{aligned}
0\quad\leftarrow\quad & H_c^n(U)\xleftarrow{I_*}H_c^n(U_1)\oplus H_c^n(U_2)\xleftarrow{J_*}H_c^n(U_1\cap U_2)\xleftarrow{\delta_*}\ldots\\
\ldots\quad & \xleftarrow{\delta_*}H_c^k(U)\xleftarrow{I_*}H_c^k(U_1)\oplus H_c^k(U_2)\xleftarrow{J_*}H_c^k(U_1\cap U_2)\xleftarrow{\delta_*}H_c^{k-1}(U)\xleftarrow{I_*}\cdots\leftarrow H_c^0(U_1\cap U_2)\leftarrow 0.
\end{aligned}$$

我们证明的要点在于如下引理：

引理 1 *假设开集 U,V 满足 $U,V,U\cap V$ 上 Poincaré 对偶定理的结论成立，且每一个的 de Rham 上同调都是有限维的，则 $U\cup V$ 的 de Rham 上同调也是有限维的，且 Poincaré 对偶对 $U\cup V$ 也成立。*

证明 有限维的部分我们前面已经证过，这里略去。对于 Poincaré 对偶，我们的想法是把 de Rham 上同调和紧支集 de Rham 上同调的 Mayer-Vietoris 序列按照互补的维数配对起来。首先对紧支集 de Rham 上同调的 Mayer-Vietoris 序列取对偶，得到正合列：

$$\begin{aligned}
0\quad\to\quad & \big(H_c^n(U\cup V)\big)^*\xrightarrow{I^!}\big(H_c^n(U)\big)^*\oplus\big(H_c^n(V)\big)^*\xrightarrow{J^!}\big(H_c^n(U\cap V)\big)^*\xrightarrow{\delta^!}\ldots\\
\ldots\quad & \xrightarrow{\delta^!}\big(H_c^k(U\cup V)\big)^*\xrightarrow{I^!}\big(H_c^k(U)\big)^*\oplus\big(H_c^k(V)\big)^*\xrightarrow{J^!}\big(H_c^k(U\cap V)\big)^*\\
& \xrightarrow{\delta^!}\big(H_c^{k-1}(U\cup V)\big)^*\xrightarrow{I^!}\cdots\to\big(H_c^0(U\cap V)\big)^*\to 0.
\end{aligned}$$

这里利用了正和列的对偶仍然正和：假设 $A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C$ 正合，则诱导的序列 $C^*\xrightarrow{g^*}B^*\xrightarrow{f^*}A^*$ 也正和：假设 $\eta\in B^*$ 满足 $f^*\eta=0$，这意味着 $f^*\eta(a)=0,\forall a\in A$，即 $\eta(f(a))=0,\forall a\in A$，也就是 $\eta|_{f(A)}\equiv 0$。而 $f(A)=ker(g)$，η 在 $ker(g)$ 上为 0 说明 η 诱导 $g(B)\subset C$ 上的线性函数，而子空间上的线性函数总可以扩张，从而存在 $\xi\in C^*$ 满足对任何 $b\in B$，$\xi(g(b))=\eta(b)$，即 $\eta=g^*\xi$。

Claim：Poincaré 对偶映射诱导（带正负号的）交换图：

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & H^k(U\cup V) \arrow[r, "I^*"] \arrow[d, "D^k_{U\cup V}"'] & H^k(U)\oplus H^k(V) \arrow[r, "J^*"] \arrow[d, "(D^k_U,D^k_V)"'] & H^k(U\cap V) \arrow[r, "\delta^*"] \arrow[d, "D^k_{U\cap V}"'] & H^{k+1}(U\cup V) \arrow[r] \arrow[d, "D^{k+1}_{U\cup V}"'] & {} \\
{} \arrow[r] & H_c^{n-k}(U\cup V)^* \arrow[r, "I^!"] & H_c^{n-k}(U)^*\oplus H_c^{n-k}(V)^* \arrow[r, "J^!"] & H_c^{n-k}(U\cap V)^* \arrow[r, "\delta^!"] & H_c^{n-k-1}(U\cup V)^* \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

<u>第一个方块的交换性：</u> 任取 $[\omega]\in H^k(U\cup V)$，则 $(D_U^k,D_V^k)(I^*[\omega])$ 在 $([\xi],[\eta])\in H_c^{n-k}(U)\oplus H_c^{n-k}(V)$ 上的取值是

$$\int_U\omega|_U\wedge\xi+\int_V\omega|_V\wedge\eta=\int_{U\cup V}\omega\wedge(i_{U,*}\xi+i_{V,*}\eta)=D^k_{U\cup V}[\omega]\big(I_*([\xi],[\eta])\big)=I^!D^k_{U\cup V}[\omega]([\xi],[\eta]).$$

第二个方块的交换性： 任取 $([\xi],[\eta])\in H^k(U)\oplus H^k(V)$，$D^k_{U\cap V}J^*([\xi],[\eta])$ 在 $[\theta]\in H^{n-k}_c(U\cap V)$ 上的取值为

$$\int_{U\cap V}(\xi|_{U\cap V}-\eta|_{U\cap V})\wedge\theta=\int_U\xi\wedge j_{U,*}\theta-\int_V\eta\wedge j_{V,*}\theta=(D^k_U[\xi],D^k_V[\eta])(J_*[\theta]),$$

恰等于 $J^!(D^k_U,D^k_V)([\xi],[\eta])$ 在 $[\theta]$ 的取值。

第三个方块的交换性： 任给 $[\omega]\in H^k(U\cap V)$，取 $\rho_U,\rho_V\in C^\infty(U\cup V)$ 满足 $0\le\rho_U,\rho_V\le$，$supp_{U\cup V}(\rho_U)\subset U,supp_{U\cup V}(\rho_V)\subset V$，并且 $\rho_U+\rho_V\equiv 1$。则 $\delta^*[\omega]=[\chi]$，其中 $\chi|_U=d(\rho_V\omega),\chi|_V=-d(\rho_U\omega)$。注意到 χ 在 $U\setminus V$ 和 $V\setminus U$ 上都是 0，所以 $D^{k+1}_{U\cup V}\delta^*[\omega]$ 在 $[\theta]\in H^{n-k-1}_c(U\cup V)$ 上的取值为

$$\int_{U\cup V}\chi\wedge\theta=\int_{U\cap V}-d(\rho_U\omega)\wedge\theta=-\int_{U\cap V}d\rho_U\wedge\omega\wedge\theta.$$

而 $\delta_*[\theta]=[d(\rho_U\theta)|_{U\cap V}]$，所以

$$\delta^!D^k_{U\cap V}[\omega]([\theta])=\int_{U\cap V}\omega\wedge d(\rho_U\theta)=\int_{U\cap V}\omega\wedge d\rho_U\wedge\theta=(-1)^k\int_{U\cap V}d\rho_U\wedge\omega\wedge\theta.$$

所以 $\delta^!D^k_{U\cap V}=(-1)^{k+1}D^{k+1}_{U\cup V}\delta^*$。

容易证明：5-引理对于这样的差一个正负号的交换图仍然成立，所以从 $D^*_U,D^*_V,D^*_{U\cap V}$ 是同构可以得到 $D^*_{U\cup V}$ 也是同构。 □

证明 [Poincaré 对偶定理的证明：] 我们假设 M 有一个有限的“good cover” $\mathscr{U}=\{U_0,U_1,\dots,U_k\}$。我们对覆盖的开集个数做归纳。$k=0$ 时的 Poincaré 对偶定理由 $\mathbb{R}^n$ 情形的计算可得。假设对于存在个数不超过 $k+1$ 的“good cover”的 n-维流形 Poincaré 对偶定理成立。现在假设 M 有一个有限的“good cover” $\mathscr{U}=\{U_0,U_1,\dots,U_k,U_{k+1}\}$。记 $U=U_0\cup\cdots\cup U_k$，$V=U_{k+1}$，则由归纳假设 D^*_U,D^*_V 都是同构。现在 $U\cap V=(U_0\cap U_{k+1})\cup\cdots\cup(U_k\cap U_{k+1})$ 也可以用归纳假设，所以 $D^*_{U\cap V}$ 也是同构。由上述引理，Poincaré 对偶定理对 M 也成立。 □

例 1 *假设 M 是连通可定向的紧致四维流形，则 $H^0(M)\cong\mathbb{R}\cong H^4(M)$，$H^1(M)$ 和 $H^3(M)$ 互为对偶。而对于 $H^2(M)$，Poincaré 对偶定理告诉我们 $D^2_M:H^2(M)\to H^2(M)^*$ 是同构。这说明：对称双线性型 $\mu:H^2(M)\times H^2(M)\to\mathbb{R}$*

$$\mu([\omega_1],[\omega_2]):=\int_M\omega_1\wedge\omega_2$$

是非退化的，称为 M 的“相交型”(intersection form)。μ 的符号差称为 M 的符号差 (signature)，记为 τ_M。著名的 Hirzebruch signature formula（4 维其实由 Thom 和 Rohlin 更早得到）告诉我们 $\tau_M=\frac{1}{3}\int_M p_1(M)$，其中 $p_1(M)$ 表示 M 的第一庞特里亚金示性类（式）。对于单连通的四维流形，相交型（准确说是在 $H^2(M,\mathbb{Z})$ 上的相交型）蕴含了很多拓扑信息，例如完全决定了 M 的同伦型（J.H.C.Whitehead），并几乎决定了 M 的同胚型（M. Freedman）。如果想了解的更多，可以参考 Donaldson-Kronheimer “The Geometry of Four-Manifolds”。

2 向量丛

通俗地说，所谓向量丛就是一族向量空间“连续地”拼在一起，并且局部上是一个乘积结构。可以定义很一般的拓扑空间上的“连续向量丛”。我们这里只限于讨论微分流形上的光滑实/复向量丛。

定义 1 *假设 M 是 n 维微分流形，M 上的一个秩为 r 的实（复）向量丛是指一个微分流形 E 以及一个光滑满射 $\pi:E\to M$，满足：*

1. 对任意 $p\in M$，$E_p:=\pi^{-1}(p)$ 有一个秩为 r 的实（复）线性空间结构；

2. 对每一个点 $p\in M$ 都存在开邻域 U 以及微分同胚 $\phi_U:\pi^{-1}(U)\to U\times\mathbb{R}^n$（$\phi_U:\pi^{-1}(U)\to U\times\mathbb{C}^n$）使得对任意 $q\in M$，$\phi_U|_{E_q}$ 是 E_q 到 $\{q\}\times\mathbb{R}^n$（$\{q\}\times\mathbb{C}^n$）的实（复）线性同构。

此时 ϕ_U 称为一个“局部平凡化”，U 称为“平凡化邻域”。E_p 称为“p 点的纤维”。E 称为“丛空间”，M 称为“底空间”。

实向量丛和复向量丛的理论有很多都是类似的。我们下面讨论的时候往往假设是实向量丛，但是结果和证明都于复向量丛没有区别。

例 2 $E=M\times\mathbb{R}^r$ 或者 $M\times\mathbb{C}^r$ 显然是秩为 r 的实/复向量丛，称为“乘积丛”或“平凡丛”。

例 3 光滑流形 M 的切丛 $TM=\{(p,v)\,|\,p\in M,v\in T_pM\}$，$\pi:TM\to M$ 定义为 $\pi(p,v)=p$。显然 $\pi^{-1}(p)=T_pM$ 有一个自然的 n-维实线性空间结构。TM 的流形结构和局部平凡化可以由如下方式得到：假设 $\mathscr{U}=\{(U_i,\phi_i)\}_{i\in I}$ 是一个光滑图册，则在 U_i 上我们有 1-1 对应 $\Phi_i:\pi^{-1}(U_i)\to U_i\times\mathbb{R}^n$ 如下：

$$\Phi_i(p,\sum_j\lambda_j\frac{\partial}{\partial x_j}|_p):=\big(p,(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\big).$$

我们可以选取 TM 的坐标图卡为 $(\pi^{-1}(U_i),\Psi_i)$，其中 $\Psi_i=(\phi_i,id)\circ\Phi_i$，即

$$\Psi_i(p,\sum_j\lambda_j\frac{\partial}{\partial x_j}|_p):=\big(\phi_i(p),(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\big)\in\phi_i(U_i)\times\mathbb{R}^n\subset\mathbb{R}^{2n}.$$

容易验证：当 $\pi^{-1}(U_i)\cap\pi^{-1}(U_j)\neq\emptyset$ 时，$\Psi_i\big(\pi^{-1}(U_i)\cap\pi^{-1}(U_j)\big)$ 是 $\mathbb{R}^{2n}$ 中的开集，并且 $\Psi_j\circ\Psi_i^{-1}$ 是其上的微分同胚。我们可以赋予 TM 如下的拓扑：称子集 W 是开集，如果对任何 $i\in I$，$\Psi_i\big(\pi^{-1}(U_i)\cap W\big)$ 是 $\mathbb{R}^{2n}$ 中的开集。在此拓扑下，容易验证 TM 成为光滑流形，π 是光滑映射，并且 Φ_i 都是微分同胚。于是 TM 成为 M 上的秩为 n 的光滑向量丛，称为流形 M 的“切丛”。

类似地，$T^*M:=\{(p,\xi)\,|\,p\in M,\xi\in T_p^*M\}$ 也成为 M 上的秩为 n 的光滑向量丛，称为流形 M 的“余切丛”。

与向量丛密切相关的概念是“截面”：假设 $E\xrightarrow{\pi}M$ 是光滑向量丛，E 的光滑截面是指一个光滑映射 $s:M\to E$，满足 $\pi\circ s=id_M$，即 $s(p)\in E_p$。E 的光滑截面全体构成一个线性空间，记为 $\Gamma(E)$ 或者（不严谨地）$C^\infty(M;E)$。

例 4 M 上的光滑向量场 $=$ 切丛 TM 的光滑截面；M 上的光滑微分形式 $=$ 余切丛 T^*M 的光滑截面。

假设 $\{U_i\}_{i\in I}$ 是向量丛 E 的局部平凡化邻域构成的开覆盖，对每个 $i\in I$ 我们有平凡化 $\Phi_i:\pi^{-1}(U_i)\to U_i\times\mathbb{R}^r$。如果 $U_i\cap U_j\neq\emptyset$，则 $\Phi_i\circ\Phi_j^{-1}:(U_i\cap U_j)\times\mathbb{R}^r\to(U_i\cap U_j)\times\mathbb{R}^r$ 是什么样子的？首先我们知道 $\Phi_i\circ\Phi_j^{-1}(p,v)$ 一定形如 $(p,*)$。又，当给定 p 时 $\{p\}\times\mathbb{R}^r\to\{p\}\times\mathbb{R}^r$ 应该是线性同构，所以存在一个 $GL(r;\mathbb{R})$ 的元素（依赖于 p），记为 $h_{ij}(p)\in GL(r;\mathbb{R})$，满足

$$\Phi_i\circ\Phi_j^{-1}(p,v)=(p,h_{ij}(p)v).$$

由 $\Phi_i\circ\Phi_j^{-1}$ 的光滑性，我们可以知道映射 $h_{ij}:U_i\cap U_j\to GL(r;\mathbb{R})$ 是光滑函数。我们称之为“转移函数”（transition functions）。容易验证：这些转移函数满足如下条件（称为“cocycle 条件”[1]）

- 如果 $U_i\cap U_j\neq\emptyset$，则 $h_{ji}=h_{ij}^{-1}$；
- 如果 $U_i\cap U_j\cap U_k\neq\emptyset$，则 $h_{ik}=h_{ij}h_{jk}$。

[1] 有同学可能会好奇：为什么叫“cocycle”？难道也对应某种上同调理论？答案是肯定的，这是 Čech 版本的“层上同调”里的 cocycle！

假设 $s\in\Gamma(E)$ 是光滑截面，则在 U_i 上 $s|_{U_i}$ 可以等同于一个向量值函数 $s_i: U_i \to \mathbb{R}^r$:

$$\Phi_i \circ s|_{U_i}(p) = (p, s_i(p)) \in U_i \times \mathbb{R}^r.$$

现在如果 $U_i \cap U_j \neq \emptyset$，利用转移函数 h_{ij} 我们可以得到：对于 $p \in U_i \cap U_j$，有

$$(p, s_i(p)) = \Phi_i \circ s|_{U_i}(p) = (\Phi_i \circ \Phi_j^{-1}) \circ (\Phi_j \circ s|_{U_j}(p)) = (\Phi_i \circ \Phi_j^{-1})(p, s_j(p)) = (p, h_{ij}(p)s_j(p)),$$

即在 $U_i \cap U_j$ 上总有

$$s_i = h_{ij}s_j.$$

转移函数其实完全刻画了向量丛：假设 $\{U_i\}_{i\in I}$ 是流形 M 的一个开覆盖，假设对任何 $U_i \cap U_j \neq \emptyset$，都指定了光滑矩阵值函数 $h_{ij}: U_i \cap U_j \to GL(r;\mathbb{R})$ 并满足 cocycle 条件，则我们可以构造光滑向量丛 E 如下：令

$$E := \sqcup_i (U_i \times \mathbb{R}^r) \big/ \sim,$$

其中 $(p,v) \in U_i \times \mathbb{R}^r$ 与 $(q,w) \in U_j \times \mathbb{R}^r$ 等价当且仅当 $p = q$（于是 $U_i \cap U_j \neq \emptyset$），并且 $v = h_{ij}(p)w$。容易验证 E 就是一个光滑向量丛。(细节留作练习)

假设 E, F 都是 M 上的光滑向量丛，E 与 F 之间的**丛同态**是一个光滑映射 $f: E \to F$，满足 $f(E_p) \subset F_p$，并且对任何 $p \in M$，$f|_{E_p}: E_p \to F_p$ 是线性映射。如果 E, F 之间存在互逆的丛同态 $f: E \to F, g: F \to E$，则称 E, F “同构”(isomorphic)，f, g 都称为丛同构 (bundle isomorphism)。一个简单的观察是：

引理 2 假设 E, F 之间的丛同态 f 满足：对任何 $p \in M$ 都有 $f|_{E_p}: E_p \to F_p$ 是线性同构，则 f 是一个丛同构。

证明 显然 f 存在一个逆映射 $f^{-1}: F \to E$，满足 $f^{-1}|_{F_p}: F_p \to E_p$ 是线性同构 (就是 $f|_{E_p}$ 的逆)，我们只需要证明 f^{-1} 是光滑映射。为此我们先分析 f 的坐标表示。我们不妨选取 E 和 F 的公共平凡化坐标邻域 U，则有 $\pi_E^{-1}(U) \xrightarrow{\Phi_E} U \times \mathbb{R}^r, \pi_F^{-1}(U) \xrightarrow{\Phi_F} U \times \mathbb{R}^r$。对应的坐标映射分别记为 Ψ_E, Ψ_F，他们是 Φ_E, Φ_F 的第一个分量再复合（相同的）坐标映射 $\phi: U \to \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$。所以（跟前面讨论转移函数时类似）

$$\Psi_F \circ f \circ \Psi_E^{-1}(x, v) = (x, g(x)v),$$

其中 $g(x) \in GL(r;\mathbb{R})$。由 f 光滑可知映射 $g: \phi(U) \to GL(r;\mathbb{R})$ 是光滑映射。

而逐点的求逆映射是 $GL(r;\mathbb{R})$ 到自身的光滑微分同胚，所以 $g^{-1}: \phi(U) \to GL(r;\mathbb{R}),\ x \mapsto (g(x))^{-1}$ 是光滑映射。而容易看出

$$\Psi_E \circ f^{-1} \circ \Psi_E^{-1}(x, v) = (x, g(x)^{-1}v),$$

从而也是光滑的。 □

向量丛理论的一个核心问题是分类：两个向量丛何时是同构的？M 上所有向量丛同构类的集合是否有特殊的代数结构？这个同构类的集合在多大程度上反映了 M 本身的拓扑性质以及微分结构的性质？代数拓扑学有一个分支叫“K-理论”就是回答这些问题的。感兴趣的同学可以在 Booss-Bleecker 的“Topology and Analysis”一书 Part III 找到一个初等的介绍。

一个向量丛如果同构于乘积丛，则我们称之为“平凡丛”。

引理 3 流形 M 上秩 r 的向量丛是平凡丛 E 当且仅当存在 r 个 E 的光滑截面 $s_1, \ldots, s_r$，使得对任意 $p \in M$，$s_1(p), \ldots, s_r(p)$ 都线性无关。

证明 假设 $f: E \to M \times \mathbb{R}^r$ 是丛同构。$M \times \mathbb{R}^r$ 显然存在 r 个处处线性无关的光滑截面：定义 $e_i \in \Gamma(M \times \mathbb{R}^r)$ 为

$$e_i(p) := (p, 0, \ldots, 1, \ldots, 0), \quad i = 1, \ldots, r.$$

令 $s_i := f^{-1} \circ e_i$, $i = 1, \ldots, r$，则 s_i 即是处处线性无关的光滑截面。

反之，假设存在这样的处处线性无关的光滑截面 $s_1, \ldots, s_r$，则我们可以定义丛同态 $f: M \times \mathbb{R}^r \to E$

$$f(p, \lambda_1, \ldots, \lambda_r) := (p, \sum_{i=1}^{r} \lambda_i s_i(p)),$$

则 f 限制在每一点的纤维上都是线性同构，从而由上一引理可知 f 是丛同构，进而可知 E 是平凡丛。
□

这个引理最起码可以告诉我们确实存在不是平凡丛的向量丛！例如 TS^2 就不是平凡丛，因为假如它平凡，我们就能找到两个处处线性无关的光滑截面，即两个处处线性无关的光滑向量场。可是我们前面证明了：不要说两个，我们甚至不能找到 S^2 上一个处处非 0 的光滑截面！

一般地，如何判断一个丛平凡或不平凡呢？示性类理论某种意义上就是 Hopf、Stiefel、Whitney、Pontryagin、陈省身等数学家为了回答这一问题而产生的：给定一个向量丛 E，他们以一种比较自然的方式构造了一些上同调类，称为 E 的“示性（上同调）类”（characteristic （cohomology）classes）。对于平凡丛，这些示性类都是 0，所以如果某个丛的某个示性类非 0，则它一定不是平凡丛！我们的课程主要侧重于 de Rham 上同调，与此联系最密切的是复向量丛的陈省身示性类[2]，我们将在后面两次课做一简要的介绍。

[2]如果用 $\mathbb{Z}$ 系数的上同调，Chern class 也是最有用的，其他的示性类可以由陈类通过某种方式导出。