第十五讲

石亚龙

回顾：假设 $\{U_i\}_{i\in I}$ 是向量丛 E 的局部平凡化邻域构成的开覆盖，对每个 $i\in I$ 我们有平凡化 $\Phi_i:\pi^{-1}(U_i)\to U_i\times\mathbb{R}^r$。如果 $U_i\cap U_j\neq\emptyset$，则

$$\Phi_i\circ\Phi_j^{-1}(p,v)=(p,h_{ij}(p)v),$$

其中 $h_{ij}:U_i\cap U_j\to GL(r;\mathbb{R})$ 是光滑函数，称为“转移函数”（transition functions）。容易验证：这些转移函数满足如下“cocycle 条件”：

- 如果 $U_i\cap U_j\neq\emptyset$，则 $h_{ji}=h_{ij}^{-1}$；
- 如果 $U_i\cap U_j\cap U_k\neq\emptyset$，则 $h_{ik}=h_{ij}h_{jk}$。

1 向量丛（续）

假设 $s\in\Gamma(E)$ 是光滑截面，则在 U_i 上 $s|_{U_i}$ 可以等同于一个向量值函数 $s_i:U_i\to\mathbb{R}^r$:

$$\Phi_i\circ s|_{U_i}(p)=(p,s_i(p))\in U_i\times\mathbb{R}^r.$$

现在如果 $U_i\cap U_j\neq\emptyset$，利用转移函数 h_{ij} 我们可以得到：对于 $p\in U_i\cap U_j$，有

$$(p,s_i(p))=\Phi_i\circ s|_{U_i}(p)=(\Phi_i\circ\Phi_j^{-1})\circ(\Phi_j\circ s|_{U_j}(p))=(\Phi_i\circ\Phi_j^{-1})(p,s_j(p))=(p,h_{ij}(p)s_j(p)),$$

即在 $U_i\cap U_j$ 上总有

$$s_i=h_{ij}s_j.$$

转移函数其实完全刻画了向量丛：假设 $\{U_i\}_{i\in I}$ 是流形 M 的一个开覆盖，假设对任何 $U_i\cap U_j\neq\emptyset$，都指定了光滑矩阵值函数 $h_{ij}:U_i\cap U_j\to GL(r;\mathbb{R})$ 并满足 cocycle 条件，则我们可以构造光滑向量丛 E 如下：令

$$E:=\sqcup_i(U_i\times\mathbb{R}^r)\big/\sim,$$

其中 $(p,v)\in U_i\times\mathbb{R}^r$ 与 $(q,w)\in U_j\times\mathbb{R}^r$ 等价当且仅当 $p=q$（于是 $U_i\cap U_j\neq\emptyset$），并且 $v=h_{ij}(p)w$。容易验证 E 就是一个光滑向量丛。（细节留作练习）

假设 E,F 都是 M 上的光滑向量丛，E 与 F 之间的**丛同态**是一个光滑映射 $f:E\to F$，满足 $f(E_p)\subset F_p$，并且对任何 $p\in M$，$f|_{E_p}:E_p\to F_p$ 是线性映射。如果 E,F 之间存在互逆的丛同态 $f:E\to F,g:F\to E$，则称 E,F“同构”（isomorphic），f,g 都称为丛同构（bundle isomorphism）。一个简单的观察是：

引理 1 *假设 E,F 之间的丛同态 f 满足：对任何 $p\in M$ 都有 $f|_{E_p}:E_p\to F_p$ 是线性同构，则 f 是一个丛同构。*

证明 显然 f 存在一个逆映射 $f^{-1}:F\to E$，满足 $f^{-1}|_{F_p}:F_p\to E_p$ 是线性同构（就是 $f|_{E_p}$ 的逆），我们只需要证明 f^{-1} 是光滑映射。为此我们先分析 f 的坐标表示。我们不妨选取 E 和 F 的公共平凡化坐标邻域 U，则有 $\pi_E^{-1}(U)\xrightarrow{\Phi_E}U\times\mathbb{R}^r,\pi_F^{-1}(U)\xrightarrow{\Phi_F}U\times\mathbb{R}^r$。对应的坐标映射分别记为 Ψ_E,Ψ_F，他们是 Φ_E,Φ_F 的第一个分量再复合（相同的）坐标映射 $\phi:U\to\phi(U)\subset\mathbb{R}^n$。所以（跟前面讨论转移函数时类似）

$$\Psi_F\circ f\circ\Psi_E^{-1}(x,v)=(x,g(x)v),$$

其中 $g(x) \in GL(r;\mathbb{R})$。由 f 光滑可知映射 $g:\phi(U) \to GL(r;\mathbb{R})$ 是光滑映射。

而逐点的求逆映射是 $GL(r;\mathbb{R})$ 到自身的光滑微分同胚，所以 $g^{-1}:\phi(U) \to GL(r;\mathbb{R}),\ x \mapsto (g(x))^{-1}$ 是光滑映射。而容易看出

$$\Psi_E \circ f^{-1} \circ \Psi_E^{-1}(x,v) = (x, g(x)^{-1}v),$$

从而也是光滑的。 □

向量丛理论的一个核心问题是分类：两个向量丛何时是同构的？M 上所有向量丛同构类的集合是否有特殊的代数结构？这个同构类的集合在多大程度上反映了 M 本身的拓扑性质以及微分结构的性质？代数拓扑学有一个分支叫"K-理论"就是回答这些问题的。感兴趣的同学可以在 Booss-Bleecker 的"Topology and Analysis"一书 Part III 找到一个初等的介绍。

一个向量丛如果同构于乘积丛，则我们称之为"平凡丛"。

引理 2 *流形 M 上秩 r 的向量丛是平凡丛 E 当且仅当存在 r 个 E 的光滑截面 $s_1,\dots,s_r$，使得对任意 $p \in M$，$s_1(p),\dots,s_r(p)$ 都线性无关。*

证明 假设 $f:E \to M \times \mathbb{R}^r$ 是丛同构。$M \times \mathbb{R}^r$ 显然存在 r 个处处线性无关的光滑截面：定义 $e_i \in \Gamma(M \times \mathbb{R}^r)$ 为

$$e_i(p) := (p, 0, \dots, 1, \dots, 0), \quad i = 1, \dots, r.$$

令 $s_i := f^{-1} \circ e_i,\ i = 1,\dots,r$，则 s_i 即是处处线性无关的光滑截面。

反之，假设存在这样的处处线性无关的光滑截面 $s_1,\dots,s_r$，则我们可以定义丛同态 $f:M \times \mathbb{R}^r \to E$

$$f(p, \lambda_1, \dots, \lambda_r) := (p, \sum_{i=1}^{r} \lambda_i s_i(p)),$$

则 f 限制在每一点的纤维上都是线性同构，从而由上一引理可知 f 是丛同构，进而可知 E 是平凡丛。 □

这个引理最起码可以告诉我们确实存在不是平凡丛的向量丛！例如 TS^2 就不是平凡丛，因为假如它平凡，我们就能找到两个处处线性无关的光滑截面，即两个处处线性无关的光滑向量场。可是我们前面证明了：不要说两个，我们甚至不能找到 S^2 上一个处处非 0 的光滑截面！

一般地，如何判断一个丛平凡或不平凡呢？示性类理论某种意义上就是 Hopf、Stiefel、Whitney、Pontryagin、陈省身等数学家为了回答这一问题而产生的：给定一个向量丛 E，他们以一种比较自然的方式构造了一些上同调类，称为 E 的"示性（上同调）类"（characteristic （cohomology） classes）。对于平凡丛，这些示性类都是 0，所以如果某个丛的某个示性类非 0，则它一定不是平凡丛！我们的课程主要侧重于 de Rham 上同调，与此联系最密切的是复向量丛的陈省身示性类[1]。

2 度量、联络和曲率

定义 1 *假设 $E \to M$ 是光滑流形 M 上的秩为 r 的光滑复向量丛。E 上的光滑 Hermitian 度量是指对每一点的纤维 E_p 都指定一个 Hermitian 内积 $h_p(\cdot,\cdot) = <\cdot,\cdot>_p$ 满足：对任意的 E 在 U 上的光滑截面 ξ,η，都有 $h(\xi,\eta) \in C^\infty(U;\mathbb{C})$。*

如果 U 是 E 的一个平凡化邻域，$\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^r$，则可以定义 E 在 U 上的 r 个光滑截面如下：

$$e_\alpha(p) := \varphi_U^{-1}(p, 0, \dots, 0, 1, 0 \dots, 0),$$

[1] 如果用 $\mathbb{Z}$ 系数的上同调，Chern class 也是最有用的，其他的示性类可以由陈类通过某种方式导出。

则对任意 $p\in U$, $\{e_\alpha(p)\}_{\alpha=1}^r$ 是 E_p 的基。我们称 $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^r$ 是 E 在 U 上的一个局部标架（local frame）。如果 ξ 是 E 在 U 上的光滑截面，则我们可以将 ξ 以唯一的方式写为 $\xi=\xi^\alpha e_\alpha$，其中 $\xi^\alpha\in C^\infty(U;\mathbb{C}),\alpha=1,\dots,r$。（这里及以后我们都用 Einstein 求和约定：相同的上下标表示求和。）如果我们定义 (正定的) Hermitian 矩阵值的光滑函数: $h_{\alpha\bar\beta}:=h(e_\alpha,e_\beta)$，则有

$$h(\xi,\eta)=h(\xi^\alpha e_\alpha,\eta^\beta e_\beta)=h_{\alpha\bar\beta}\xi^\alpha\bar\eta^\beta.$$

有时候为了记号简便，我们将矩阵 $(h_{\alpha\bar\beta})$ 简记为 h。

回忆：E 在 U 上的光滑截面全体构成的线性空间记为 $C^\infty(U;E)$。

定义 2 *假设 E 是光滑流形 M 上的秩 r 光滑复向量丛，E 上的联络（connection）是一个映射 $D: C^\infty(M;E)\to C^\infty(M,T^{*\mathbb{C}}M\otimes E)$ 满足:*

1. D 是复线性的；

2.（Leibniz 法则）$D(f\xi)=df\otimes\xi+fD\xi,\forall f\in C^\infty(M;\mathbb{C}),\xi\in C^\infty(M;E)$。

D 也称为 E 上的协变微分（covariant differentiation）。

假设 $\{e_\alpha\}$ 是一个局部标架，则我们可以定义一族局部的光滑 1-形式 $\theta_\alpha^\beta\in\Omega^1(U)$ 满足:

$$De_\alpha=\theta_\alpha^\beta\otimes e_\beta.$$

有时候我们也简记为 $De_\alpha=\theta_\alpha^\beta e_\beta$。我们称这些 1-形式 $\{\theta_\alpha^\beta\}$ 为“联络 1-形式”。对于局部光滑截面 $\xi=\xi^\alpha e_\alpha\in C^\infty(U;E)$，我们得到

$$D\xi=D(\xi^\alpha e_\alpha)=(d\xi^\alpha+\xi^\beta\theta_\beta^\alpha)e_\alpha.$$

记号约定：我们总把 ξ^α 当作列向量，而对矩阵 θ_β^α，我们把上指标当作行指标，下指标当作列指标。注意：在微分几何与物理文献中，这件事情并不统一，因此公式的形式会略有区别。

如果我们将截面 ξ 和它在局部标架 $\{e_\alpha\}$ 下的坐标列向量等同起来，则我们得到 $D\xi=d\xi+\theta\xi$，或者 $D=d+\theta$。物理学家经常用这个方式来表示联络。

我们可以把联络 D 的作用扩展到丛值的微分形式上：记 $\Omega^k(M,E):=C^\infty(M;\Lambda^kT^{*\mathbb{C}}M\otimes E)$，则我们可以定义 $D:\Omega^k(M,E)\to\Omega^{k+1}(M,E)$ 如下

$$D(\varphi\xi):=(d\varphi)\xi+(-1)^k\varphi\wedge D\xi,$$

其中 φ 是 $\mathbb{C}$-值的 k-形式，ξ 是 E 的光滑截面。

定义 3 *我们定义联络 D 的曲率为 $\Theta:=D^2:\Omega^0(M;E)\to\Omega^2(M,E)$。*

如果 f 是光滑函数，$\xi\in\Omega^0(M,E)$ 是光滑截面，则有

$$\begin{aligned}\Theta(f\xi)&=D(df\xi+fD\xi)\\&=d(df)\xi-df\wedge D\xi+df\wedge D\xi+fD^2\xi\\&=f\Theta(\xi).\end{aligned}$$

局部上，如果我们定义 2-形式 Θ_α^β 满足

$$\Theta(e_\alpha)=\Theta_\alpha^\beta e_\beta.$$

则有

$$\begin{aligned}\Theta(\xi) &= \Theta(\xi^\alpha e_\alpha)\\ &= \xi^\alpha \Theta(e_\alpha)\\ &= \Theta^\alpha_\beta \xi^\beta e_\alpha.\end{aligned}$$

由此可知 $\Theta \in \Omega^2(M, End(E))$。

我们下面将 Θ^α_β 用 θ^α_β 表示出来：

$$\begin{aligned}\Theta^\beta_\alpha e_\beta &= D(De_\alpha) = D(\theta^\gamma_\alpha e_\gamma)\\ &= d\theta^\gamma_\alpha e_\gamma - \theta^\gamma_\alpha \wedge De_\gamma\\ &= d\theta^\beta_\alpha e_\beta - \theta^\gamma_\alpha \wedge \theta^\beta_\gamma e_\beta\\ &= (d\theta^\beta_\alpha + \theta^\beta_\gamma \wedge \theta^\gamma_\alpha) e_\beta\end{aligned}$$

于是我们得到

$$\Theta^\alpha_\beta = d\theta^\alpha_\beta + \theta^\alpha_\gamma \wedge \theta^\gamma_\beta,$$

或者等价地 $\Theta = d\theta + \theta \wedge \theta$。

我们下面研究在标架发生变化时（等价于换一个平凡化映射！）联络 1-形式和曲率 2-形式如何变化。

假设 $\{\tilde{e}_\alpha\}$ 是 U 上的另一个局部标架，则一定有 $\tilde{e}_\alpha = a^\beta_\alpha e_\beta$，其中 (a^β_α) 是定义在 U 上的 $GL(r,\mathbb{C})$-值的光滑函数。我们记新标架下的联络 1-形式矩阵和曲率 2-形式矩阵为 $\tilde{\theta}$ 和 $\tilde{\Theta}$，则有

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}^\gamma_\alpha \tilde{e}_\gamma &= D\tilde{e}_\alpha = D(a^\beta_\alpha e_\beta)\\ &= da^\beta_\alpha e_\beta + a^\beta_\alpha \theta^\gamma_\beta e_\gamma\\ &= (da^\beta_\alpha + \theta^\beta_\gamma a^\gamma_\alpha) e_\beta.\end{aligned}$$

另一方面，左边又可以写为

$$\tilde{\theta}^\gamma_\alpha a^\beta_\gamma e_\beta,$$

从而

$$a\tilde{\theta} = da + \theta a,$$

或者等价地

$$\tilde{\theta} = a^{-1}da + a^{-1}\theta a. \tag{1}$$

由此，我们进而得到

$$\begin{aligned}\tilde{\Theta} &= d\tilde{\theta} + \tilde{\theta} \wedge \tilde{\theta}\\ &= d(a^{-1}da + a^{-1}\theta a) + (a^{-1}da + a^{-1}\theta a) \wedge (a^{-1}da + a^{-1}\theta a)\\ &= -a^{-1}da \wedge a^{-1}da - a^{-1}da \wedge a^{-1}\theta a + a^{-1}d\theta a - a^{-1}\theta \wedge da\\ &\quad + a^{-1}da \wedge a^{-1}da + a^{-1}da \wedge a^{-1}\theta a + a^{-1}\theta \wedge da + a^{-1}\theta \wedge \theta a\\ &= a^{-1}(d\theta + \theta \wedge \theta)a.\end{aligned}$$

所以我们得到结论：

$$\tilde{\Theta} = a^{-1}\Theta a. \tag{2}$$

从这件事出发，我们可以得到流形上整体定义的光滑 $2k$-形式 $c_k(E,D)\in\Omega^{2k}(M), k=1,\ldots,r$ 如下：

$$\det\left(I_r+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta\right):=1+c_1(E,D)+\cdots+c_r(E,D).$$

我们称 $c_k(E,D)$ 为复向量丛 E 的（从属于联络 D 的）第 k 个“陈省身示性式”（Chern form）。

向量丛上的联络不唯一，如果 E 上还有一个 Hermitian 内积 h，则我们可以考虑一类特殊的联络：称联络 D 与度量 h 相容，或者 D 是酉联络（unitary connection），如果对任何光滑截面，都有 $dh(\xi,\eta)=h(D\xi,\eta)+h(\xi,D\eta)$。此时，对于任何局部的正交归一标架 $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^r$，联络 1-形式 θ_β^α 是取值于 $\mathfrak{u}(r)$ 的 1-形式，即 $\theta_\beta^\alpha+\overline{\theta_\alpha^\beta}=0$。反之，如果联络 1-形式在局部正交归一标架下是取值于 $\mathfrak{u}(r)$ 的 1-形式，则对任意 $\xi=\xi^\alpha e_\alpha, \eta=\eta^\beta e_\beta$，有

$$dh(\xi,\eta)=d(\sum_\alpha\xi^\alpha\bar\eta^\alpha)=\sum_\alpha(\xi^\alpha d\bar\eta^\alpha+\bar\eta^\alpha d\xi^\alpha).$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned}
h(D\xi,\eta)+h(\xi,D\eta) &= h\big((d\xi^\alpha+\theta_\gamma^\alpha\xi^\gamma)e_\alpha,\eta^\beta e_\beta\big)+h\big(\xi^\alpha e_\alpha,(d\eta^\beta+\theta_\gamma^\beta\eta^\gamma)e_\beta\big)\\
&= \sum_\alpha(\xi^\alpha d\bar\eta^\alpha+\bar\eta^\alpha d\xi^\alpha)+\sum_\alpha\theta_\gamma^\alpha\xi^\gamma\bar\eta^\alpha+\sum_\beta\xi^\beta\overline{\theta_\gamma^\beta}\bar\eta^\gamma\\
&= \sum_\alpha(\xi^\alpha d\bar\eta^\alpha+\bar\eta^\alpha d\xi^\alpha)\\
&= dh(\xi,\eta).
\end{aligned}$$

所以这是酉联络的等价刻画。

例 1 *我们来看一个最简单的例子：E 为秩 1 的光滑复向量丛，此时也称 E 是复“线丛”（line bundle）。假设 D 是 E 上的一个联络，e 是一个局部标架，则 $De=\theta\otimes e$，其中 $\theta=A_\mu dx^\mu$ 是联络 1-形式。此时曲率的表达式也很简单：*

$$\Theta=d\theta+\theta\wedge\theta=d\theta=\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}dx^\nu\wedge dx^\mu=\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)dx^\mu\wedge dx^\nu=:F_{\mu\nu}dx^\mu\wedge dx^\nu.$$

如果换一个标架 $\tilde e=ae$，其中 a 是处处非 0 的光滑复值函数，则新的联络 1-形式满足

$$\tilde\theta=a^{-1}da+a^{-1}\theta a=\theta+a^{-1}da.$$

现在假设 E 上有度量 h，并且 D 是酉联络。假设局部截面 e 满足 $h(e,e)=1$，则 $De=iAe=\theta e$，其中 A 是实的 1-形式。曲率 $F=d(iA)=idA$，进而

$$c_1(E,D)=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F=-\frac{dA}{2\pi}$$

是一个实的 2-形式。

此时如果 $\tilde e$ 是另一个酉标架，则存在实值函数 f 满足 $\tilde e=e^{if}e$，即 $a=e^{if}$，所以在此“$U(1)$ 规范变换”之下，新的联络 1-形式满足

$$\tilde\theta=\theta+a^{-1}da=iA+idf=i(A+df).$$

例 2 *在物理学家的术语中，联络对应“规范势”，曲率对应“规范场”，而选取一个局部标架被称为“选取一个规范（gauge）”。这些术语源自 H. Weyl 的工作。我们这里来从现代数学的角度看一看 Weyl 对 Maxwell 方程组做了哪些数学上的处理：考虑真空中的 Maxwell 方程组：*

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\rho,\qquad \nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0,\qquad \nabla\times\mathbf{B}=\mathbf{j}+\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}.$$

这里我们把相关的常数都设为是 *1*。注意：这里的 $\nabla\cdot$ 和 $\nabla\times$ 都是在 $\mathbb{R}^3$ 里对 (x^1,x^2,x^3) 坐标进行的，虽然 $\mathbf{E},\mathbf{B}$ 也都依赖于时间 $t=:x^0$。

根据 $\mathbb{R}^3$ 中的 *Poincaré* 引理，由 $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$ 可以知道一定存在光滑函数 $\mathbf{A}(t,x)$ 满足 $\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$。$\mathbf{A}$ 称为“矢量势”（*vector potential*）。

现在再看第一行的第二个方程，利用 $\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$ 得到

$$\nabla\times\big(\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\big)=0.$$

再一次用 $\mathbb{R}^3$ 中的 *Poincaré* 引理，可以得到光滑函数 $\varphi(t,x)$，满足

$$\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi.$$

φ 称为“标量势”（*scalar potential*）。

$\mathbf{A}$ 与 φ 的选取并不唯一，对任意时空光滑函数 f，向量值函数 $\mathbf{A}':=\mathbf{A}-\nabla f$ 和数量函数 $\varphi':=\varphi+\frac{\partial f}{\partial t}$ 仍然满足 $\nabla\times\mathbf{A}'=\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t}=\nabla\varphi'$。$\mathbf{A}$ 与 φ 的一个具体的选择称为“选取一个规范”，而 $(\varphi,\mathbf{A})\mapsto(\varphi+\frac{\partial f}{\partial t},\mathbf{A}-\nabla f)$ 则称为一个“规范变换”。在物理学中有两种常用的规范选取：

- *Lorentz* 规范：$\nabla\cdot\mathbf{A}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$;
- *Coulomb* 规范：$\nabla\cdot\mathbf{A}=0$。

我们以 *Lorentz* 规范为例。现在通过选取 $\mathbf{A}$ 和 φ，*Maxwell* 方程组里面有两个方程自动满足了，剩下的两个变为

$$\rho=\nabla\cdot\mathbf{E}=-\Delta\varphi-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{A})=\big(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\big)\varphi$$

以及

$$\mathbf{j}-\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\Delta\mathbf{A},$$

或等价地

$$\big(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\big)\mathbf{A}=\mathbf{j}.$$

所以 φ 和 $\mathbf{A}$ 都满足波动方程。

我们下面来看这些东西与向量丛的微分几何有什么关系。令 $A_0:=-\varphi$ 以及记 $\mathbf{A}=(A_1,A_2,A_3)$，我们考虑 $\mathbb{R}^4$ 上的 *1*-形式

$$A:=A_\mu dx^\mu=-\varphi dt+A_i dx^i.$$

则

$$\begin{aligned} dA &= -\big(\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}dx^i\big)\wedge dt+\frac{\partial A_i}{\partial t}dt\wedge dx^i+\frac{\partial A_i}{\partial x^j}dx^j\wedge dx^i \\ &= E_1dx^1\wedge dt+E_2dx^2\wedge dt+E_3dx^3\wedge dt \\ &\quad +B_1dx^2\wedge dx^3+B_2dx^3\wedge dx^1+B_3dx^1\wedge dx^2. \end{aligned}$$

这个 *2*-形式给出了全部的电磁场的信息！规范变换 $(-\varphi,\mathbf{A})\mapsto(-\varphi-\frac{\partial f}{\partial t},\mathbf{A}-\nabla f)$ 恰好对应 *1*-形式的变换 $A\mapsto A-df$。

与例 *1* 做对比，立即看出电磁场的 *Maxwell* 方程组等价于一个时空流形上的复线丛的酉联络的几何。由于“规范群”是 $U(1)$，我们又称之为“$U(1)$-规范场”。

例 3 当杨振宁和 *Mills* 试图推广 *Weyl* 的 $U(1)$ 规范场论时，他们允许 $\theta=A_\mu dx^\mu$ 的每个 A_μ 是 *rank* 为 r 的矩阵值函数。他们希望有一个对应的理论，并且很早认识到单纯令 $F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$ 会导致一个自相矛盾的理论。在多次试验后，他们选择了一个二次项做修正，恰好得到了 $d\theta+\theta\wedge\theta$。随后很多数学家都意识到：*Yang-Mills* 理论就是向量丛的微分几何学。