第十六讲

石亚龙

回顾：上次课我们介绍了复向量丛的联络和曲率。回忆：联络在局部平凡化下可等同于算子 $D=d+\theta$，其中 $\theta=(\theta^\alpha_\beta)$ 满足 $De_\beta=\theta^\alpha_\beta e_\alpha$。而曲率则有局部表示 $\Theta=(\Theta^\alpha_\beta)$ 满足 $D^2 e_\beta=\Theta^\alpha_\beta e_\alpha$，此时有 $\Theta=d\theta+\theta\wedge\theta$。在标架变换 $e_\alpha\mapsto\tilde{e}_\alpha=a^\beta_\alpha e_\beta$ 之下，有 $\tilde{\theta}=a^{-1}\theta a+a^{-1}da$ 以及 $\tilde{\Theta}=a^{-1}\Theta a$。

1 Chern-Weil 理论与陈省身示性类

第一个观察是：向量丛 E 上的联络全体构成一个仿射空间：

引理 1 假设 $\tilde{D}$ 是 E 上的另一个联络，则 $\tilde{D}-D\in\Omega^1(M,EndE)$。

证明 要点在于：对光滑函数 f 和光滑截面 s，有

$$(D-\tilde{D})(fs)=(df\otimes s+fDs)-(df\otimes s+f\tilde{D}s)=f(D-\tilde{D})s.$$

任给切向量 $v\in T_pM$，我们记 Ds 与 v 的配对为 D_vs，称为 s 沿 v 的“协变导数”，则由上式可得 $D_v-\tilde{D}_v$ 是 E_p 到自身的线性映射，即 $(D-\tilde{D})_v\in End(E_p)$，从而 $D-\tilde{D}\in\Omega^1(M,EndE)$。

□

对于 $EndE$-值的微分形式 $\eta\in\Omega^k(M,EndE)$，我们可以定义其“trace”——只需把 η 的 $EndE$ 部分取 trace，就得到 k-形式 $tr(\eta)$。局部上，可以将 η 写成 k-形式构成的方阵，$tr(\eta)$ 就是把这个微分形式方阵的对角元都加起来。或者等价地，可以将 η 写为 $\sum_i\omega_i\otimes A_i$ 的形式，其中 ω_i 是局部 k-形式，A_i 是 $EndE$ 的局部截面，于是此时 $tr(\eta)=\sum_i tr(A_i)\omega_i$。不难验证这两种刻画其实是相同的。

另一个我们要用的工具是 (超)-换位子, 定义为 $[\omega\otimes A,\eta\otimes B]:=(\omega\wedge\eta)\otimes[A,B]$，其中 ω,η 是局部定义的微分形式，A,B 是 $EndE$ 的局部截面。容易验证

$$[\omega\otimes A,\eta\otimes B]=\omega A\wedge\eta B-(-1)^{deg(\omega)deg(\eta)}\eta B\wedge\omega A.$$

因子 $(-1)^{deg(\omega)deg(\eta)}$ 的出现是我们在“换位子”前加上一个“超”字的原因。我们有时候也定义联络 D 与 $\omega\otimes A$ 的换位子，虽然 D 并不是 $EndE$ 值的 1-形式：

$$[D,\omega\otimes A]s:=D(\omega\otimes As)-(-1)^{deg(\omega)}\omega\otimes A\wedge Ds.$$

我们还需要一个引理，其证明是显然的：

引理 2 假设 P,Q 都是 $EndE$-值微分形式，则 $tr[P,Q]=0$。

第一个非平凡的引理是：

引理 3 (Bianchi 恒等式) 我们总有 $[D,\Theta^k]=0,\ \forall k\in\mathbb{N}$。

证明 只要注意到 $\Theta=D^2$ 即可，此时 $[D,\Theta^k]=[D,D^{2k}]=0$。 □

练习 1 证明：在局部标架下，$[D,\Theta]=0$ 等价于 $d\Theta=[\Theta,\theta]=\Theta\wedge\theta-\theta\wedge\Theta$。

下一引理是我们的核心工具：

引理 4 对于 $A\in\Omega^k(M,EndE)$，总有

$$d\,tr(A)=tr[D,A].$$

证明 首先注意到等式的左边与联络的选取无关，且微分形式的闭性只需要局部验证。而对右边，假设 $\tilde D$ 是另一联络，则由引理 1和引理 2，我们有 $tr[\tilde D,A]=tr[\tilde D-D,A]+tr[D,A]=tr[D,A]$。所以右边也与联络选取无关。

所以我们可以在局部上选取一个平凡联络来完成计算：假设 $D_0=d$ 为平凡丛 $E|_U\to U$ 的一个平凡联络，则

$$\begin{aligned}[D_0,A]s&=D_0(As)-(-1)^{deg(A)}A\wedge D_0s\\&=d(A^\beta_\alpha f^\alpha)e_\beta-(-1)^{deg(A)}A^\beta_\alpha\wedge df^\alpha e_\beta\\&=dA^\beta_\alpha f^\alpha e_\beta.\end{aligned}$$

由此即得 $tr[D_0,A]=d\,tr(A)$。 □

对任何单变量的形式幂级数 $f(x)=a_0+a_1x+\dots$，我们定义 $f(\Theta):=a_0+a_1\Theta+\dots+a_n\Theta^n\in\Omega^*(M)$。

定理 1 (Chern-Weil) 假设 f 同上，则有：

1. $d\,trf(\Theta)=0$；

2. 如果 $\tilde D$ 是另外一个联络，曲率为 $\tilde\Theta$，则存在微分形式 $\eta\in\Omega^*(M)$ 使得 $tr\,f(\tilde\Theta)-tr\,f(\Theta)=d\eta$。

于是 $tr\,f(\Theta)$ 的上同调类与联络选取无关。我们称之为从属于 f 的 E 的“示性类”，并称 $tr\,f(\Theta)$ 为从属于 f 和 D 的“向量丛 E 的示性式”。

例 1 由于 $det(I_r+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta)=\exp\Big(tr\log(I_r+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta)\Big)$，所以 $c_i(E,D)\in\Omega^{2i}(M)$ 都是闭形式，其上同调类与联络 D 的选取无关。我们称 $c_i(E):=[c_i(E,D)]\in H^{2i}(M)$ 为 E 的第 i 陈类。例如

$$c_1(E,D)=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}tr\Theta,\quad c_2(E,D)=\frac{1}{8\pi^2}\Big(tr(\Theta^2)-(tr\Theta)^2\Big).$$

证明 [定理 1:] 对第一个结论，只需利用引理 4和引理 3：

$$\begin{aligned}d\,trf(\Theta)&=tr[D,f(\Theta)]\\&=\sum_k a_k tr[D,\Theta^k]=0.\end{aligned}$$

对于第二个结论，我们选择一族联络 $D_t:=t\tilde D+(1-t)D$，则

$$\dot D_t:=\frac{dD_t}{dt}=\tilde D-D\in\Omega^1(M,EndE),$$

以及

$$\dot\Theta_t:=\frac{d\Theta_t}{dt}=\frac{dD_t}{dt}D_t+D_t\frac{dD_t}{dt}=[D_t,\frac{dD_t}{dt}]=[D_t,\dot D_t].$$

于是得到（由引理 2，我们可以随意交换 Θ 和 $\dot\Theta$ 的位置)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}tr\,f(\Theta_t)&=tr(\dot\Theta_t f'(\Theta_t))\\&=tr([D_t,\dot D_t]f'(\Theta_t))\\&\overset{\text{Bianchi}}{=}tr[D_t,\dot D_tf'(\Theta_t)]\\&=d\,tr\Big(\dot D_tf'(\Theta_t)\Big).\end{aligned}$$

于是我们得到结论 $tr\,f(\tilde\Theta)-tr\,f(\Theta)=d\int_0^1tr\Big(\dot D_tf'(\Theta_t)\Big)dt$。 □