“紧黎曼曲面”3 月 20 日作业

(3 月 29 日前交到西大楼信箱。)

我们总假设 $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ 满足 $Im(\omega_2/\omega_1) > 0$, $\Lambda := \mathbb{Z} < \omega_1, \omega_2 >$ 为 ω_1, ω_2 所生成的格点群。记 $P_a := \{a + s\omega_1 + t\omega_2 | 0 \le s, t < 1\}$.

I 以下四题选做三道:

1. 证明典范映射 $\mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Lambda$ 是黎曼面之间的全纯映射，并且 $\mathbb{C}$ 上以 ω_1, ω_2 为周期的椭圆函数 1-1 对应于 $\mathbb{C}/\Lambda$ 上的亚纯函数。
2. 证明亚纯的偶函数在原点处的 Laurent 展开只含有 z 的偶数次方幂。
3. 证明
$$\zeta(z) := \frac{1}{z} + \sum_{\omega \in \Lambda,\ \omega \neq 0} \left(\frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right)$$
收敛，并定义 $\mathbb{C}$ 上亚纯函数。
4. $\zeta(z)$ 同上，证明：存在常数 $\eta_k \in \mathbb{C}, k = 1, 2$ 使得 $\zeta(z + \omega_k) = \zeta(z) + \eta_k, k = 1, 2$，并且
$$\eta_1 \omega_2 - \eta_2 \omega_1 = 2\pi i.$$
(提示：计算 $\int_{P_a} \zeta(z) dz$.)

II 提出三个你觉得有趣的问题（与前两次课相关）。