“紧黎曼曲面”3 月 27 日作业

(4 月 12 日前交到西大楼信箱。)

我们总假设 $\tau \in \mathbb{C}$ 满足 $Im\tau > 0$, $\Lambda := \mathbb{Z} < 1, \tau >$ 为 $1, \tau$ 所生成的格点群。记 $P_a := \{a + s + t\tau 0 \leq s, t < 1\}$.

I (ℂ/Λ 上的 Mittag-Leffler 问题) 任给基本域 P_0 中的不同点 $b_1, \ldots, b_m$，以及每个 b_k 处的 Laurent 多项式

$$g_k(z) = \frac{C_1^{(k)}}{z - b_k} + \cdots + \frac{C_{n_k}^k}{(z - b_k)^{n_k}}, \quad k = 1, \ldots m.$$

证明：如果 $\sum_{k=1}^m C_1^{(k)} = 0$，则存在以 $1, \tau$ 为周期的椭圆函数 f，使得 f 在 P_0 中的所有极点是 $b_1, \ldots, b_m$，并且对所有 $k = 1, \ldots, m$，f 在 b_k 处的 Laurent 展开主部是 g_k.（提示：用 $\zeta(z - b_k)$ 及其直到 $n_k - 1$ 阶导数）

II 阅读教材 §2.2 节。