

复几何初步习题

试题说明：共 3 题，总分 110（含 10 分附加分）。每题解答按照正确的成分给分，最终成绩 $=\min\{\text{卷面成绩}, 100\}$ 。请于 2020 年 8 月 19 日中午 12:00 之前将解答发送至邮箱 shiyi@nju.edu.cn。如发邮件 24 小时内未收到回复，请与暑期学校组委会联系。

1. 假设 $X \subset \mathbb{C}P^3$ 定义为

$$X = \{[Z_0, Z_1, Z_2, Z_3] \in \mathbb{C}P^3 \mid Z_0^4 + Z_1^4 + Z_2^4 + Z_3^4 = 0\}.$$

- (a) 证明： X 是一个复流形（要求给出 X 的坐标覆盖，并说明坐标变换的全纯性。不需要讨论连通性）。(25 分)
 - (b) (选做) 请找出一个 X 上处处非 0 的全纯 2-形式。(附加：10 分)
2. 假设 $E \rightarrow X$ 是复流形 X 上 $\text{rank}=2$ 的全纯向量丛， h 是 E 上 Hermitian 度量，满足其 Chern 联络的曲率恒为 0。假设 $L \subset E$ 是 $\text{rank}=1$ 的全纯子丛，即 $L \rightarrow X$ 是全纯线丛， L 是 E 的复子流形，并且对任意 $p \in X$ ， $L_p \subset E_p$ 是 1 维线性子空间。证明： L 上诱导 Hermitian 度量的 Chern 联络的曲率 2-形式处处半负定。(40 分)
 3. 假设 X 是复二维的紧致复流形，证明： X 上的全纯 1-形式 $\omega \in H^0(X, \Omega^1)$ 一定满足 $d\omega = 0$ 。(35 分)