e 的超越性

石亚龙

March 8, 2019

一个实数如果是某个整系数多项式的根，则我们称该实数为“代数数”，否则称为“超越数”。显然所有的有理数都是代数数，有些无理数如 $\sqrt{2}$ 也是代数数。但是所有代数数构成的集合是可数集 (按照多项式的次数分类，注意每个 n 次多项式最多有 n 个实根)。于是几乎所有的实数都是超越数。

然而要判断一个具体的实数是否是超越数往往是很不容易的。1873 年法国数学家 Charles Hermite 证明了 e 是超越数，随后德国数学家 Ferdinand von Lindemann 在此基础上证明了 π 也是超越数，但是证明更加复杂。1893 年 David Hilbert 在论文 [1] 中给出了 e 和 π 超越性的简化证明。我们下面的证明本质属于 Hilbert，也可参考 [2]。

证明的出发点是如下简单的分部积分公式: 设 f 是 n 次多项式, 则 $f^{(n+1)} \equiv 0$，于是

$$\begin{aligned}\int_0^b f(x)e^{-x}dx &= -e^{-x}f(x)\Big|_0^b + \int_0^b f'(x)e^{-x}dx \\ &= -e^{-x}[f(x)+f'(x)]\Big|_0^b + \int_0^b f''(x)e^{-x}dx \\ &= \cdots = -e^{-x}[f(x)+f'(x)+\cdots+f^{(n)}(x)]\Big|_0^b.\end{aligned}$$

记 $Q(x) := f(x)+f'(x)+\cdots+f^{(n)}(x)$, 则可将上式写为

$$e^bQ(0) = Q(b) + e^b\int_0^b f(x)e^{-x}dx. \tag{1}$$

假设 e 是代数数，则存在整数 $c_0,\dots,c_m$ 满足

$$c_0 + c_1e + \cdots + c_me^m = 0,$$

$c_0 \neq 0$。在 (1) 中令 $b = 0,\dots,m$ 可得

$$0 = \sum_i c_ie^iQ(0) = \sum_{i=0}^m c_iQ(i) + \sum_{i=0}^m c_ie^i\int_0^i f(x)e^{-x}dx. \tag{2}$$

注意 (2) 对任何多项式 f 都成立。

下面我们将构造特殊的 f 使得 (2) 不可能成立，这就说明 e 一定是超越数。

设 p 是一个大于 m 和 $|c_0|$ 的素数。令

$$f(x) := \frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p\cdots(x-m)^p,$$

以及 $Q(x) = f(x)+f'(x)+\cdots+f^{(mp+p-1)}(x)$。我们要说明 f 满足如下三条性质:

1. 对 $i = 1,\dots,m$, $Q(i)$ 都是整数，且 $p|Q(i)$；
2. $Q(0)$ 也是整数，但 $p\nmid Q(0)$；
3. 当 $p\to\infty$ 时，有
$$\sum_{i=0}^m c_ie^i\int_0^i f(x)e^{-x}dx \to 0.$$

先承认这三条性质。由于 $p > |c_0|$，故 $p\nmid |c_0|$。结合性质 (1)(2) 可知 $\sum_{i=0}^m c_iQ(i)$ 一定是整数，但不能被 p 整除。于是 $|\sum_{i=0}^m c_iQ(i)| \geq 1$。但现在由性质 (3) 可知: 当 p 足够大时 $\sum_{i=0}^m c_iQ(i) + \sum_{i=0}^m c_ie^i\int_0^i f(x)e^{-x}dx$ 不可能是 0，于是得到矛盾。

性质 (1) 的证明: 首先我们来说明当 $k \geq p$ 时，$f^{(k)}$ 的系数都是整数并且可被 p 整除。注意我们有

$$f(x) = \frac{\big((-1)^m m!\big)^p x^{p-1} + B_p x^p + \cdots + x^{mp+p-1}}{(p-1)!},$$

且分子的各项系数都是整数。求 k 次导数之后，分子上每项的系数如果非 0 一定是 k 个连续正整数的乘积的整数倍。显然 p 个连续正整数的乘积能被 $p!$ 整除:

$$\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+p)}{p!} = \frac{(n+p)!}{n!p!} = C_{n+p}^p \in \mathbb{N}.$$

于是 $f^{(k)}$ 的系数都是整数，并且能被 p 整除。于是对 $i = 0, 1, \ldots m$ 和 $k = p, p+1, \ldots, mp+p-1$, 有 $f^{(k)}(i) \in \mathbb{Z}$ 以及 $p | f^{(k)}(i)$。

另一方面，当 $i = 1, \ldots, m$ 且 $k \leq p-1$ 时，显然有 $f^{(k)}(i) = 0$。于是 $Q(i) \in \mathbb{Z}$ 并且 $p | Q(i)$ ，$i = 1, \ldots, m$。

性质 (2) 的证明: 由性质 (1) 的证明，我们只需计算 $f^{(k)}(0)$ ，其中 $k \leq p-1$。

如果 $k < p-1$，则显然有 $f^{(k)}(0) = 0$。又 $f^{(p-1)}(0) = \big((-1)^m m!\big)^p$。由于 $p > m$ 是素数，故 $p \nmid m!$，进而有 $p \nmid Q(0)$。

性质 (3) 的证明: 在 $[0, m]$ 上我们有不等式:

$$|f(x)| \leq \frac{m^{(p-1)+mp}}{(p-1)!}.$$

于是

$$\Big| \int_0^i f(x) e^{-x} dx \Big| \leq \frac{m^{(p-1)+mp}}{(p-1)!} \int_0^i e^{-x} dx < \frac{m^{p-1+mp}}{(p-1)!}.$$

所以

$$\Big| \sum_{i=0}^m c_i e^i \int_0^i f(x) e^{-x} dx \Big| < C e^m \frac{m^{p-1+mp}}{(p-1)!} = C e^m m^m \frac{(m^{m+1})^{p-1}}{(p-1)!} \to 0 \quad (p \to \infty).$$

References

[1] Hilbert, David, *Über die Transcendenz der Zahlen e und π*, Math. Ann.,43(1893), 216-219.

[2] 菲赫金哥尔茨，微积分学教程，高等教育出版社。