含参变量积分的一致收敛性

石亚龙

January 2, 2017

Contents

1 含参变量积分的一致收敛性

我们学过函数序列的一致收敛性：设 I 是一个区间（可开可闭，允许无界），一列 I 上的函数 f_n 称为在 I 上一致收敛于函数 f，如果对任意 $\epsilon > 0$，都存在 $N_0 > 0$，使得对任何 $n > N_0$，都有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in I.$$

现在如果如果我们有一族 I 上的函数 f_λ，$\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}$，$\lambda_0$ 是 Λ 的一个聚点 (允许为 ∞)。如果对任意 $\epsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得对任何 $\lambda \in \Lambda$, $0 < |\lambda - \lambda_0| < \delta$，都有

$$|f_\lambda(x) - f(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in I,$$

则称当 $\lambda \to \lambda_0$ 时 f_λ 在 I 上一致收敛于 f.

不难证明一致收敛也满足 Cauchy 收敛原理：一族函数 f_λ 当 $\lambda \to \lambda_0$ 时一致收敛当且仅当对任意 $\epsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得对任何 $\lambda_i \in \Lambda$, $0 < |\lambda_i - \lambda_0| < \delta, i = 1, 2$，都有

$$|f_{\lambda_1}(x) - f_{\lambda_2}(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in I.$$

含参变量的广义积分可以看成是函数列的极限：

$$\int_c^\infty f(x,y)dy = \lim_{A\to\infty} \int_c^A f(x,y)dy.$$

如果函数列 $\varphi_A(x) := \int_c^A f(x,y)dy$ 当 $A \to \infty$ 时在区间 I 上一致收敛，则称积分 $\int_c^\infty f(x,y)dy$ 对 $x \in I$ 一致收敛。

类似我们可以定义含参变量瑕积分的一致收敛性，这里略去。

2 两个极限交换顺序：一个一般的结论

一致收敛最重要的性质是保证两个极限过程可以交换：

定理 **1.** 设 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ 都是欧氏空间的子集，$f : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$. 设 x_0, y_0 分别是 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 的聚点（可以为无穷）。设 $\lim_{x\to x_0} f(x,y) = \psi(y)$, $\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \phi(x)$ 极限都存在。如果这两个极限中有一个是一致收敛的，则两个累次极限都存在，且相等：

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x,y) = \lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x,y).$$

我们后面会看到：一致收敛积分的很多性质都是这个定理的推论。

Proof. 不妨设 $\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\phi(x)$ 在 $\mathcal{X}$ 上一致收敛。由一致收敛的 Cauchy 收敛原理，对任意 $\epsilon>0$，都存在 $\delta>0$，使得对任何 $y,y'\in\mathcal{Y}$，$0<|y-y_0|,|y'-y_0|<\delta$，都有

$$|f(x,y)-f(x,y')|<\epsilon,\quad \forall x\in\mathcal{X}.$$

而 $\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\psi(y)$, 故由上式得

$$|\psi(y)-\psi(y')|\le\epsilon.$$

这说明当 $y\to y_0$ 时 $\{\psi(y)\}$ 是 Cauchy 列，故极限 $\lim_{y\to y_0}\psi(y)$ 存在，记为 A。

下面证 $\lim_{x\to x_0}\phi(x)=A$:

对任意的 $\epsilon>0$, 由 $y\to y_0$ 时 $\psi(y)$ 的收敛性和 $f(x,y)$ 对 $x\in\mathcal{X}$ 的一致收敛性，必存在 $y\in\mathcal{Y}$ 使得

$$|\psi(y)-A|<\frac{\epsilon}{3},$$

并且

$$|f(x,y)-\phi(x)|<\frac{\epsilon}{3},\forall x\in\mathcal{X}.$$

对这个 y，我们有 $\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\psi(y)$，于是存在 $\delta>0$ 使得对任何 $x\in\mathcal{X},0<|x-x_0|<\delta$，都有

$$|f(x,y)-\psi(y)|<\frac{\epsilon}{3}.$$

于是

$$|\phi(x)-A|\le|\phi(x)-f(x,y)|+|f(x,y)-\psi(y)|+|\psi(y)-A|<\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}=\epsilon.$$

从而 $\lim_{x\to x_0}\phi(x)=A$.

□

这个证明过程非常典型，我们称之为 "$\frac{\epsilon}{3}$-argument".

3 一致收敛性的应用：含参变量积分的连续、可微、可积性

应用一： 考虑函数 $F(y,A)=\int_a^A f(x,y)dx$。为应用上节的定理，我们需要 $A\to\infty$ 时极限存在，$y\to y_0$ 时极限存在，并且上述两个极限至少有一个是一致收敛。

定理 2. 设 $\int_a^\infty f(x,y)dx$ 在 y_0 附近一致收敛，且 $y\to y_0$ 时 $f(x,y)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $\phi(x)$, $\forall b\in(a,\infty)$. 则 $\int_a^\infty\phi(x)dx$ 收敛，并且

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^\infty f(x,y)dx=\int_a^\infty\phi(x)dx.$$

Proof. 积分的一致收敛保证 $\lim_{A\to\infty}F(y,A)$ 一致收敛。$f(x,y)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $\phi(x)$, $\forall b\in(a,\infty)$ 保证

$$\lim_{y\to y_0}F(y,A)=\int_a^A\phi(x)dx.$$

由上述定理，有

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{A\to\infty}F(y,A)=\lim_{A\to\infty}\lim_{y\to y_0}F(y,A),$$

此即
$$\lim_{y\to y_0}\int_a^\infty f(x,y)dx=\int_a^\infty \phi(x)dx.$$
□

应用二：设 $f(x,y)$ 在 $[a,\infty)\times[c,\infty)$ 上连续，考虑函数 $F(A,B)=\int_a^A dx\int_c^B f(x,y)dy=\int_c^B dy\int_a^A f(x,y)dx$。为应用上节的定理，我们需要 $A\to\infty$ 时极限存在，$B\to\infty$ 时极限存在，并且上述两个极限至少有一个是一致收敛。

定理 3. 设 $f(x,y)$ 在 $[a,\infty)\times[c,\infty)$ 上连续，并且满足：

(1) $\int_a^\infty fdx$ 对 $y\in[c,B]$ 一致收敛，$\forall B>c$; $\int_c^\infty fdy$ 对 $x\in[a,A]$ 一致收敛，$\forall A>a$;

(2) $\int_a^\infty dx\int_c^\infty |f|dy$ 和 $\int_c^\infty dy\int_a^\infty |f|dx$ 中至少有一个收敛.

则
$$\int_a^\infty dx\int_c^\infty f(x,y)dy=\int_c^\infty dy\int_a^\infty f(x,y)dx$$
存在且相等。

Proof. 由上次课的内容，条件 (1) 说明：
$$\lim_{A\to\infty}F(A,B)=\int_a^\infty dx\int_c^B fdy=\int_c^B dy\int_a^\infty fdx$$
和
$$\lim_{B\to\infty}F(A,B)=\int_a^A dx\int_c^\infty fdy=\int_c^\infty dy\int_a^A fdx$$
都存在。

不妨设 $\int_a^\infty dx\int_c^\infty |f|dy<\infty$. 记 $G(x):=\int_c^\infty |f(x,y)|dy$, 则 $\int_a^\infty G(x)dx$ 收敛。于是对任意 $\epsilon>0$, 总存在 $A_0>0$，使得 $\int_{A_0}^\infty G(x)dx<\epsilon$. 于是当 $A>A_0$ 时，对任意的 B，都有
$$|F(A,B)-\int_a^\infty dx\int_c^B fdy|=|\int_A^\infty dx\int_c^B fdy|\le\int_A^\infty dx\int_c^\infty |f|dy<\epsilon.$$
这说明 $\lim_{A\to\infty}F(A,B)$ 一致收敛。利用定理 1 立即得到所要结论。 □

练习：不用定理 1，而是用定理 1 的证明方法来证明定理 2 和定理 3，并说明这就是梅老师书中的证明。