二重黎曼积分及其可积性

石亚龙

September 22, 2016

设 $I = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ 是平面矩形。它的面积记为 $v(I) = (b-a)(d-c)$。我们总假设 $f : I \to \mathbb{R}$ 是有界函数，$m \le f \le M$。

1 上积分与下积分

设 π 是 I 的一个分割:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b, \quad c = x_0 < y_1 < \cdots < y_n = d.$$

记 I_{ij} 为子矩形 $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$，$i, j \ge 1$. 令

$$M_{ij} := \sup_{I_{ij}} f, \quad m_{ij} := \inf_{I_{ij}} f.$$

定义 Darboux 上和 $S(I, \pi, f)$ 和下和 $s(I, \pi, f)$ （如无混淆，可简记为 $S(\pi, f), s(\pi, f)$ 甚至 $S(\pi), s(\pi)$）如下:

$$S(I, \pi, f) := \sum_{i,j} M_{ij} v(I_{ij}), \quad s(I, \pi, f) := \sum_{i,j} m_{ij} v(I_{ij}).$$

显然总有 $S(\pi) \ge s(\pi)$。

命题 1. 假设分割 π' 是 π 的加细，则有

$$s(\pi) \le s(\pi') \le S(\pi') \le S(\pi),$$

即：“上和不增，下和不减”。

此命题的证明很简单，但写起来啰嗦，故略去。

现在如果有两个不同的分割 π^1, π^2，我们可以取一个公共的加细分割 π，于是由上一命题知:

$$s(\pi^1) \le s(\pi) \le S(\pi) \le S(\pi^2).$$

即：即使对不同的分割，也有“上和总不小于下和”。

于是我们可以考虑上和的下确界以及下和的上确界，分别称为“上积分”和“下积分”:

$$\overline{\int}_I f := \inf_{\pi} S(\pi, f), \quad \underline{\int}_I f := \sup_{\pi} s(\pi, f).$$

易见：对任意分割 π，总有

$$s(\pi, f) \le \underline{\int}_I f \le \overline{\int}_I f \le S(\pi, f).$$

2 Riemann 可积性

定义 1. 设 f 是 I 上有界函数，如果 $\underline{\int}_I f = \overline{\int}_I f$，则称 f 在 I 上 *Riemann* 可积，简称 R-可积。这个共同的值称为 f 在 I 上的积分，记为 $\int_I f$ 或 $\iint_I f(x,y)dxdy$。

例 1. *1.* 设 $f \equiv c$ 是常值函数，则总有 $S(\pi) = s(\pi) = cv(I)$，从而上下积分相等，f R-可积。

2. 设

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases},$$

则总有 $S(\pi) = v(I), s(\pi) = 0$，于是 f 不是 R-可积的。

我们的目标是建立一个好用的可积性判别法。为此，首先注意到如下引理：

引理 1. 有界函数 f R-可积当且仅当对任意 $\epsilon > 0$，都存在分割 π，使得 $S(\pi, f) - s(\pi, f) < \epsilon$。

证明: (1) 必要性：假设 f R-可积，则 $\overline{\int}_R f = \underline{\int}_R f = A$，故对任意 $\epsilon > 0$，存在分割 π^1 使得 $S(\pi^1) < A + \frac{\epsilon}{2}$；又存在分割 π^2 使得 $s(\pi^2) > A - \frac{\epsilon}{2}$。现在取 π^1 和 π^2 的一个公共加细 π，则有

$$S(\pi) - s(\pi) \le S(\pi^1) - s(\pi^2) < (A + \frac{\epsilon}{2}) - (A - \frac{\epsilon}{2}) = \epsilon.$$

(2) 充分性：如果对某个分割 π 满足 $S(\pi, f) - s(\pi, f) < \epsilon$，则由上一小节最后的不等式，得到：

$$\overline{\int}_I f \le S(\pi) < s(\pi) + \epsilon \le \underline{\int}_I f + \epsilon.$$

由于 ϵ 可以任意地小，故 $\overline{\int}_I f \le \underline{\int}_I f$，从而两者相等。 □

一个直接的应用是：

推论 1. I 上的连续函数一定 R-可积。

证明: 由于 I 紧，故 f 一致连续。对任意的 $\epsilon > 0$，一定存在 $\delta > 0$，使得只要 $p, q \in I$ 满足 $\|p - q\| < \delta$，就有 $|f(p) - f(q)| < \frac{\epsilon}{v(I)}$。选取分割 π 使得每个子矩形的直径都小于 δ，于是

$$S(\pi) - s(\pi) = \sum_{i,j} (M_{ij} - m_{ij}) v(I_{ij}) < \frac{\epsilon}{v(I)} \sum_{i,j} v(I_{ij}) = \epsilon.$$

由引理 1知 f R-可积。 □

事实上，如果 f 只在很小的地方不连续，仍然是 R-可积的。这就是下一小节要讨论的 Lebesgue 定理。

3 零测集与 R-可积性的 Lebesgue 定理

$A \subset \mathbb{R}^2$ 称为零测集，如果对任意 $\epsilon > 0$，存在至多可数个闭矩形 $I_k, k = 1, 2, \dots$，满足 $A \subset \cup_{k \ge 1} I_k$，并且 $\sum_k v(I_k) < \epsilon$。我们有：

定理 1 (Lebesgue 定理)**.** I 上的有界函数 f R-可积当且仅当 f 的不连续点集 D_f 是零测集。

为了证明这个定理，我们需要对“不连续性”给一个定量的刻画。为此，我们引入振幅函数的概念：

3.1 函数的振幅与连续性

对 $a \in I$ 和 $r > 0$，定义函数在半径为 r 的球上的上下确界：

$$M(f,a,r) := \sup\{f(x) |\ x \in I, \|x-a\| < r\}, \quad m(f,a,r) := \inf\{f(x) |\ x \in I, \|x-a\| < r\}.$$

随着 r 递降到 0，$M(f,a,r) - m(f,a,r) \geq 0$ 也递降，于是有极限。我们把这个极限称为 f 在 a 处的振幅，记为

$$\omega(f,a) := \lim_{r \to 0} \big(M(f,a,r) - m(f,a,r)\big).$$

由定义，我们总有 $\omega(f,a) \geq 0$。

我们还需要下面两个结论：

引理 **2.** 函数 f 在 a 处连续当且仅当 $\omega(f,a) = 0$。

此引理证明很简单，留作练习。

引理 **3.** 对任何 $c > 0$，集合 $D_c := \{x \in I | \omega(f,x) \geq c\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的闭集。(从而是紧集。)

证明: 我们来证明 $\mathbb{R}^2 \setminus D_c$ 是开集。任取 $x \in \mathbb{R}^2 \setminus D_c$，则或者 $x \in \mathbb{R}^2 \setminus I$，或者 $x \in I$，并且 $\omega(f,x) < c$。如果 $x \in \mathbb{R}^2 \setminus I$，则显然存在开球 $B_\delta(x) \subset \mathbb{R}^2 \setminus I \subset \mathbb{R}^2 \setminus D_c$。

如果 $x \in I$ 并且 $\omega(f,x) < c$。由定义，可以找到 $r > 0$ 使得 $M(f,x,r) - m(f,x,r) < c$。则易验证：$B_{\frac{r}{2}}(x) \subset \mathbb{R}^2 \setminus D_c$。

因此，不管哪种情况，都能找到 x 的开邻域整个落在 $\mathbb{R}^2 \setminus D_c$ 中，从而 $\mathbb{R}^2 \setminus D_c$ 是开集。 □

3.2 Lebesgue 定理的证明

我们还需要一个预备性的引理：

引理 **4.** 设 I' 是 I 的一个子矩形，满足 $\omega(f,x) < c,\ \forall x \in I'$，则存在 I' 的分割 π'，使得

$$S(I',\pi',f) - s(I',\pi',f) < cv(I').$$

证明: 对任意 $x \in I'$，由于 $\omega(f,x) < c$，总可以找到以 x 为中心的闭矩形 I_x，使得

$$\sup_{I_x \cap I} f - \inf_{I_x \cap I} f < c.$$

所有这样的 I_x 的内部构成 I' 的开覆盖，由紧性，可以找到有限子覆盖。设这有限多个矩形为 $I_1, \ldots, I_N$。取 I' 的分割 π'，使得此分割的每个子矩形都落在某个 I_k 中。(由于 I_k 只有有限多个，这件事总能很容易地做到。) 这样，对落在 I_k 中的子矩形 I_{ij}，总有

$$M_{ij} - m_{ij} \leq \sup_{I_k \cap I} f - \inf_{I_k \cap I} f < c.$$

从而

$$S(I',\pi',f) - s(I',\pi',f) = \sum_{i,j} (M_{ij} - m_{ij}) v(I_{ij}) < cv(I').$$

□

下面我们可以来证明 Lebesgue 定理了：

Lebesgue 定理的证明*:* (1) 必要性: 令 $D_n := \{x \in I \mid \omega(f,x) \geq \frac{1}{n}\}$. 则 $D_f = \cup_{n \geq 1} D_n$. 于是只要证每个 D_n 是零测集即可。为此任取 $\epsilon > 0$, 由于 f 是 R-可积的，故存在分割 π 使得 $S(\pi,f) - s(\pi,f) < \frac{\epsilon}{2n}$.

Claim: 如果 $I_{ij}^o \cap D_n \neq \emptyset$, 则 $M_{ij} - m_{ij} \geq \frac{1}{n}$.

(事实上，假设 $x \in I_{ij}^o \cap D_n$, 由定义 $\omega(f,x) \geq \frac{1}{n}$。由于 $M(f,x,r) - m(f,x,r)$ 随着 r 的减小单调地递降到 $\omega(f,x)$，从而可以找到 $\delta > 0$，使得 $B_\delta(x) \subset I_{ij}^o$ 并且 $M(f,x,\delta) - m(f,x,\delta) \geq \frac{1}{n}$。于是 $M_{ij} - m_{ij} \geq M(f,x,\delta) - m(f,x,\delta) \geq \frac{1}{n}$。)

于是

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon}{2n} &> S(\pi,f) - s(\pi,f) = \sum_{i,j}(M_{ij} - m_{ij})v(I_{ij}) \\ &\geq \sum_{I_{ij}^o \cap D_n \neq \emptyset}(M_{ij} - m_{ij})v(I_{ij}) \\ &\geq \frac{1}{n}\sum_{I_{ij}^o \cap D_n \neq \emptyset} v(I_{ij}). \end{aligned}$$

从而 $\sum_{I_{ij}^o \cap D_n \neq \emptyset} v(I_{ij}) < \frac{\epsilon}{2}$.

注意到

$$I = (\cup_{i,j} I_{ij}^o)\bigcup(\cup_{ij}\partial I_{i,j}),$$

而 $\cup_{ij}\partial I_{i,j}$ 是零测集，故 $D_n \cap (\cup_{ij}\partial I_{i,j})$ 是零测集。于是由定义，存在最多可数个闭矩形 $I_k, k = 1,2,\ldots$ 盖住 $D_n \cap (\cup_{ij}\partial I_{i,j})$，并且 $\sum_{k\geq 1} v(I_k) < \frac{\epsilon}{2}$。又因为

$$D_n \bigcap(\cup_{i,j} I_{ij}^o) \subset \bigcup_{I_{ij}^o \cap D_n \neq \emptyset} I_{i,j},$$

故

$$D_n \subset \Big(\bigcup_{I_{ij}^o \cap D_n \neq \emptyset} I_{i,j}\Big)\bigcup\Big(\bigcup_{k \geq 1} I_k\Big),$$

并且

$$\sum_{I_{ij}^o \cap D_n \neq \emptyset} v(I_{ij}) + \sum_{k\geq 1} v(I_k) < \epsilon$$

从而 D_n 是零测集。

<u>(2) 充分性：</u> 假设 D_f 是零测集。为证明 f 可积，我们任取 $\epsilon > 0$，要找到分割 π，使得 $S(\pi) - s(\pi) < \epsilon$。为此，我们考虑集合 $D_\epsilon := \{x \in I | \omega(f,x) \geq \epsilon\} \subset D_f$。由引理 3，$D_\epsilon$ 是紧集，并且（由于是零测集的子集）是零测集。于是我们可以找到有限多个闭矩形 $I_1,\ldots,I_N$ 盖住 D_ϵ，并且 $\sum_{k=1}^N v(I_k) < \epsilon$。[1]

取一个 I 的分割 $\tilde{\pi}$，使得所有子矩形落入如下两类之一（允许同时满足两个条件，这不影响下面的证明）:

$$\mathcal{S}_1 := \{I_{ij} | I_{ij} \subset I_k, \text{ for some } k = 1,\ldots,N\},$$
$$\mathcal{S}_2 := \{I_{ij} | I_{ij} \cap D_\epsilon = \emptyset\}.$$

于是有（利用 $m \leq f \leq M$）

$$\sum_{I_{ij}\in\mathcal{S}_1}(M_{ij} - m_{ij})v(I_{ij}) \leq (M-m)\sum_{I_{ij}\in\mathcal{S}_1} v(I_{ij}) \leq (M-m)\sum_{k=1}^N v(I_k) < (M-m)\epsilon.$$

对于 $\mathcal{S}_2$ 中的每个 I_{ij}，都有 $\omega(f,x) < \epsilon, \forall x \in I_{ij}$。于是由引理 4，可以找到 I_{ij} 的分割 π^{ij}，使得

$$S(I_{ij},\pi^{ij},f) - s(I_{ij},\pi^{ij},f) < \epsilon v(I_{ij}).$$

[1]这一步可以这样实现：首先由零测集的定义，存在最多可数个闭矩形 $\tilde{I}_k, k = 1,2,\ldots$ 盖住 D_ϵ，并且 $\sum_k v(\tilde{I}_k) < \frac{\epsilon}{4}$。将每个 $\tilde{I}_k$ 沿中心向外放大至原来两倍，所得矩形记为 I_k。则这些 I_k 的内部 I_k^o 构成 D_ϵ 的开覆盖，从而有有限子覆盖，记为 $I_1,\ldots,I_N$。

将这些 π^{ij} 的分点都加入 $\tilde{\pi}$ 中，得到新的分割，记为 π。此过程不影响上面对 $\mathcal{S}_1$ 求和的估计。于是

$$S(\pi, f) - s(\pi, f) \leq (M - m)\epsilon + \epsilon \sum_{I_{ij} \in \mathcal{S}_2} v(I_{ij}) \leq [(M - m) + v(I)]\epsilon.$$

由引理 1，f R-可积。 □