# 平面等周不等式

石亚龙

March 8, 2019

## 1 简单闭曲线和弧长参数

设 $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ 是平面 $C^1$ 曲线，$t \in [a, b]$。我们假设 $\|\sigma'(t)\| \neq 0, \forall t \in [a, b]$。对于这样的曲线，我们可以定义弧长函数

$$s(t) := \int_a^t \|\sigma'(\tau)\| d\tau.$$

显然 $s$ 是关于 $t$ 的严格增函数，值域为 $[0, L]$，其中 $L$ 为该段曲线的总长。于是我们可以反解出 $t = t(s)$，$s \in [0, L]$。我们有

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{\|\sigma'(t)\|}$$

于是该曲线可以用 $s$ 重新参数化：

$$\gamma(s) := \sigma(t(s)), \quad s \in [0, L].$$

我们称 $s$ 为该曲线的弧长参数。易见：

$$\|\gamma'(s)\|^2 = \left(x'(t)\frac{dt}{ds}\right)^2 + \left(y'(t)\frac{dt}{ds}\right)^2 = \frac{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}{\|\sigma'(t)\|^2} = 1.$$

以下我们都选取弧长作为参数。

## 2 平面等周不等式

平面等周不等式是说在给定周长 $L$ 的所有 $C^1$ 平面简单闭曲线中，圆周所围面积最大。设这个圆周的半径为 $r$，于是 $L = 2\pi r$，从而这个最大面积是 $\pi r^2 = \frac{L^2}{4\pi}$。所以这个结果等价于不等式：

$$S \leq \frac{L^2}{4\pi}.$$

该不等式及其推广有着悠久的历史和广泛的应用，证明方法也有很多，参见 [1]。我们这里将要给出的证明属于 Peter Lax [2]。值得指出的是：对于最一般的平面可求长闭曲线，对应的等周不等式也是成立的，一个初等（完全在数学分析课程框架下）并且完整的证明可在 Blaschke 的书 [3] 的第一章找到。

我们不妨设 $C^1$ 简单闭曲线 $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ 的长度 $L = 2\pi$，并且 $s$ 是弧长参数（思考：为什么可以这样假设?）。此时，有

$$(x')^2 + (y')^2 = 1, \quad S = \left|\int_0^{2\pi} y(s)x'(s)ds\right|.$$

我们要证明 $S \leq \pi$，并且等号成立当且仅当该曲线是单位圆周。

再不妨假设 $\gamma(0)$ 和 $\gamma(\pi)$ 都在 $x$-轴上，即

$$y(0) = y(\pi) = 0.$$

由于

$$S \leq \left|\int_0^{\pi} y(s)x'(s)ds\right| + \left|\int_{\pi}^{2\pi} y(s)x'(s)ds\right| =: S_1 + S_2,$$

我们只要证明 $S_1$ 和 $S_2$ 都不超过 $\pi/2$。下面我们只讨论 $S_1$，由对称性，同样方法可证明 $S_2 \leq \pi/2$。

首先我们有

$$\begin{aligned} S_1 &= \left|\int_0^\pi y(s)x'(s)ds\right| \le \int_0^\pi |y(s)x'(s)|ds \\ &\le \frac{1}{2}\int_0^\pi y^2(s)+(x'(s))^2 ds \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\pi y^2(s)+1-(y'(s))^2 ds. \end{aligned}$$

由 $y(0)=y(\pi)$，我们可令

$$u(s)=\frac{y(s)}{\sin s}, \quad s\in(0,\pi),$$

于是 $u$ 在 $(0,\pi)$ 上可导且导函数连续。由 L'Hospital 法则，可补充定义 $u(0)$ 和 $u(\pi)$ 使得 $u$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，并且 $y(s)=u(s)\sin s$。于是

$$\begin{aligned} y^2(s)+1-(y'(s))^2 &= u^2\sin^2 s+1-(u'\sin s+u\cos s)^2 \\ &= 1-u^2\cos 2s-uu'\sin 2s-(u')^2\sin^2 s \\ &= 1-\frac{1}{2}(u^2\sin 2s)'-(u')^2\sin^2 s \\ &\le 1-\frac{1}{2}(u^2\sin 2s)'. \end{aligned}$$

于是得到

$$S_1\le\frac{\pi}{2}.$$

如果等号成立，那么 $u'$ 恒为 0，于是 $u$ 为常数 $\lambda\in\mathbb{R}$, $y(s)=\lambda\sin s$, $s\in[0,\pi]$。另一方面，由前面 Cauchy-Schwarz 不等式的等号条件，有 $|x'(s)|\equiv|y(s)|=|\lambda|\sin s$。再由 $1=|x'(s)|^2+|y'(s)|^2$ 得 $\lambda=\pm1$。不妨假设 $\lambda=1$，则可解出 $x(s)=\pm\cos s$。所以曲线在 $s\in[0,\pi]$ 这一段是半径为 1 的半圆。

# References


[1] Chavel, Isaac, *Isoperimetric inequalities: differential geometric and analytic perspectives*, Cambridge University Press, 2001.

[2] Lax, Peter, *A short path to the shortest path*, Amer. Math. Monthly 102 (1995), no. 2, 158–159.

[3] 布拉施克（Blaschke, Wilhelm），圆与球，苏步青译，高等教育出版社, 2015。