JOURNAL OF NANJING UNIVERSITY,

MATHEMATICAL BIQUARTERLY, VOL.1, NO.1, 1984.

二部竞赛图的点泛偶回路性

张 克 民

（南 京 大 学）

VEXTEX EVEN-PANCYCLIC ity IN BIPARTITE TOURNAMENTS

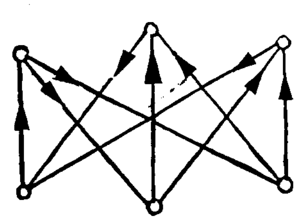
Zhang Kemin

(Nanjing University)

Abstract

It is shown that if a diconnected oriented bipartite complete graph (i. e. diconnected bipartite tournament) T has a longest directed cycle of length $2n$, then each vertex of T is contained in directed cycles of all smaller lengths $2k(2\leqslant k\leqslant n)$ unless n is even and every $2n$-cycle of T induces a special digraph F_{4r}. In particularly, if T is hamiltonian, then T is vertex even-pancyclic unless $T\simeq F_{4r}$.

有向图 $D=(V,A)$，$|V|=p$，若对每个（偶数）$k(3\leqslant k\leqslant p)$，$D$ 中含有长度为 k 的回路，简称 k－回路记为 C_k，则称 D 具有**泛（偶）回路性**．若有向图 $D=(V,A)$，$|V|=p$，对每个（偶数）$k(3\leqslant k\leqslant p)$，$\forall v\in V$，$D$ 中含有包含 v 的 C_k，记为 $C_k(v)$，则称 D 具有**点泛（偶）回路性**．一个定向的完全二部图称为**二部竞赛图**．对于二部竞赛图，它不含奇数长的回路．很自然地应该转向研究它的泛偶回路性和点泛偶回路性．〔1〕中对二部竞赛图的泛偶回路性作了研究．如同对竞赛图，〔2〕研究了竞赛图的泛回路性后，〔4〕进一步研究了竞赛图的点泛回路性，得到更强更深刻的结果一样；本文对二部竞赛图的点泛偶回路性，得到下面定理 1 的基本结果．由于即使是 $n\times n$ 的强连通二部竞赛图，也不一定存在 Hamilton 回路，下图就是一例，为此本文引进拟点泛偶回路性的概念，来进一步刻划二部竞赛图的点泛偶回路性．设有向图 $D=(V,A)$ 中最长偶回路的长度为 $2l$，若对每个 $k(2\leqslant k\leqslant l)$，$\forall v\in V$，$D$ 中存在 $C_{2k}(v)$，则称 D 具有**拟点泛偶回路性**．显然当 D 具有 Hamilton 回路时，拟点泛偶回路性就是点泛偶性．本文对二部竞赛图的拟点泛偶回路性得到下面定理 2 的结果．



为了方便，下面给出一些定义和约定．对二部竞赛图 $T=(V,A)$ 中的 C_{2n}，按顶点在 C_{2n} 上的顺序记为 $0,1,2,\cdots,2n-1,0$，于是对 $\forall\, i\in\{0,1,\cdots,2n-1\}$，$(i,i+1)\in A$．这里顶点标号的加法在本文均理解为对 $2n$ 取模．

1983 年 11 月 10 日收到．

定义 1 C_{2r} 如上约定，对正整数 $r(r\leqslant n-1)i,i+2r+1$ 两顶点间的弧，称为 **2r－弦**．特别 $(i,i+2r+1)\in A$ 称为 C_{2n} 的**2r－跳跃弦**．又当 r 为奇数时，$(i,i+2r+1)\in A$；当 r 为偶数时，$(i+2r+1,i)\in A$，分别称为 C_{2n} 的 **2r－一致弦**．

定义 2 对整数 $r>0$，如下特殊的二部竞赛图，记为 $F_{4r}=(V,A)$：$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_{4r}\}$，$(v_i,v_j)\in A\Longleftrightarrow j-i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$．

显然 F_{4r} 具有 $4k$－回路 $(k=1,2,\cdots,r)$，但不含任何 $(4k+2)$－回路．

定理 1 设 $T=(V,A)$ 是 $n\times n$ 的二部竞赛图，$T\not\simeq F_{4r}$，则 T 具有点泛偶回路性的充要条件是 T 具有 Hamilton 回路．

证 必要性是显然的．对于充分性，由假设 T 中存在 $2n$－回路 C_{2n}．下面分别证明断言Ⅰ、Ⅱ．

Ⅰ．T 中总存在 $C_{2n-2}(0)$．

由〔1〕中引理 3 "$n\times n$ 的二部竞赛图，具有一条无一致弦的 Hamilton－回路，则 $n=2r$，且 $T\simeq F_{4r}$．" 知，C_{2n} 总存在一致弦．令 $r=\mathrm{Min}\{k|C_{2n}$ 中存在 $2k$－一致弦$\}$．于是 $r>0$．

情况 1 $r=1$．对 $(i,i+3)\in A,i\neq 2n-1,2n-2$ 的 2－一致弦，显然有 $C_{2n-2}(0)\subseteq T$．故下面假定：$i\neq 2n-1,2n-2$，有 $(i+3,i)\in A$．由于 $(3,0)$、$(0,2n-3)\in A$ 故在 C_{2n} 上总存在某个 i，有 $(i,0)$、$(0,i+2)\in A$．若 $(2n-1,2)\in A$，则有 $C_{2n-2}(0)$：

$$2n-1,2,3,\cdots,i,0,i+2,\cdots,2n-1$$

类似地，若 $(2n-2,1)\in A$，T 中也有 $C_{2n-2}(0)$．故下面讨论总假定 $(i+3,i)\in A$，$i\in\{0,1,\cdots,2n-1\}$．

情况 2 $r=2m+1,m>0$．设 $(i,i+4m+3)\in A$．由 r 的定义，有 $(i+3,i+4m+4)\in A$．

(1) 当 $i\neq 2n-1,2n-4m-2$ 时，T 中有 $C_{2n-2}(0)$：

$i,i+4m+3,i+4m,i+4m+1,i+4m-2,i+4m-1,i+4m-4,i+4m-3,\cdots,i+4,i+5,i+2,i+3,i+4m+4,i+4m+5,i+4m+6,\cdots,i-1,i$．

(2) 当 $(2n-1,4m+2)\in A$ 时，有 $(2,4m+3)\in A$．T 中有 $C_{2n-2}(0)$：

$2n-1,4m+2,4m-1,4m,4m-3,4m-2,4m-5,4m-4,\cdots,3,0,1,2,4m+3,4m+4,\cdots,2n-1$．

(3) 当 $(2n-4m-2,1)\in A$ 时，有 $(2n-4m+1,2)\in A$．T 中有 $C_{2n-2}(0)$：

$2n-4m-2,1,2n-2,2n-1,0,2n-3,2n-6,2n-5,2n-8,2n-7,2n-10,\cdots,2n-4m+2,2n-4m+3,2n-4m,2n-4m+1,2,3,\cdots,2n-4m-2$．

情况 3 $r=2m>0$，设 $(i+4m+1,i)\in A$，由 r 的定义，有 $(i+4m-3,i-2)\in A$．

(1) 当 $i\neq 2n-4m+1,2n-4m+2$ 时，T 中有 $C_{2n-2}(0)$：

$i,i+1,i+2,\cdots,i+4m-3,i-2,i-1,i-4,i-3,i-6,i-5,\cdots,i+4m+3,i+4m,i+4m+1,i$．

(2) 当 $(2,2n-4m+1)\in A$ 时，由 r 的定义，有 $(2n-1,2n-4m)\in A$，用类似情况 2(2) 的找 $C_{2n-2}(0)$ 的办法知，T 中有 $C_{2n-2}(0)$．

(3) 当 $(3,2n-4m+2)\in A$ 时，由 r 的定义，有 $(0,2n-4m+1)\in A$，用类似情况 2 (1) 的找 $C_{2n-2}(0)$ 的办法知，T 中有 $C_{2n-2}(0)$。

综合情况 1—3，I 成立。

Ⅱ 若 T 中存在 $C_{2l}(0)(l\geqslant 4)$，则 T 中总存在 $C_{2l-4}(0)$。

设 $C_{2l}(0)$ 记为：$0,1,2,\cdots,2l-1,0$。若对 $C_{2l}(0)$ 有 4－跳跃弦 $(i,i+5)\in A$，$i\neq 2l-4,2l-3,2l-2,2l-1$；或对 $C_{2l}(0)$ 有二个内部互不相交的 2－跳跃弦 $(i,i+3)\in A$，$i\neq 2l-2,2l-1$ 时，显然 T 中有 $C_{2l-4}(0)$。故下面总假定 $(i+5,i)\in A,i\neq 2l-4$、$2l-3$、$2l-2$、$2l-1$ 和 $(i+3,i)\in A,i\neq 2l-2,2l-1,j_0$、$j_0+1$、$j_0+2$，其中 $j_0\in\{0,1,2,\cdots,2l-1\}$ 的某个确定的顶点。下面分别讨论 j_0 的几种情况：

情况 1 若 $j_0\in\{2l-9,2l-8,\cdots,2l-3\}$ 时，T 中有 $C_{2l-4}(0)$：

$0,2l-5,2l-4,2l-3,2l-8,2l-7,2l-10,2l-9,\cdots,4,5,2,3,0$。

若 $j_0\in\{2l-2,2l-1,0,\cdots,4\}$ 时，T 中有 $C_{2l-4}(0)$：

$0,2l-3,2l-2,2l-5,2l-4,2l-7,2l-6,\cdots,7,8,3,4,5,0$。

情况 2 若 $j_0\in\{5,6,\cdots,2l-10\},j_0=$ 奇数，T 中有 $C_{2l-4}(0)$：

$0,2l-3,2l-2,2l-5,2l-4,2l-7,2l-6,\cdots,j_0+6,j_0+7,j_0+2,j_0+3,j_0+4,j_0-1,j_0,j_0-3,j_0-2,j_0-5,j_0-4,\cdots,7,4,5,2,3,0$。

情况 3 若 $j_0\in\{5,6,\cdots,2l-10\},j_0=$ 偶数，T 中有 $C_{2l-4}(0)$：

$0,2l-3,2l-2,2l-5,2l-4,2l-7,2l-6,\cdots,j_0+7,j_0+8,i_0+3,j_0+4,j_0+5,j_0,j_0+1,j_0-2,j_0-1,j_0-4,j_0-3,\cdots,7,4,5,2,3,0$。

综合情况 1—3，Ⅱ 成立。

由 Ⅰ、Ⅱ 知，T 中存在 $C_{2k}(0),2\leqslant k\leqslant n$，又因为 0 是 C_{2n} 中任取的一个顶点，故 T 具有点泛偶回路性。证毕。

推论 $n\times n$ 的正则二部竞赛图 T，或是点泛偶回路的，或 $n=2r$ 且 $T\simeq F_{4r}$。

证 由〔3〕中推论 8.2：“任意正则二部竞赛图是 Hamilton 的。”知，T 中存在 C_{2n}，于是由定理 1，推论成立。证毕。

记 $T[V_0]$ 表示 V_0 在 T 中的顶点诱导子图，于是有：

定理 2 设 $T=(V,A)$ 是强连通的二部竞赛图，则或者 T 具有拟点泛偶回路性；或者 T 中的任一最长回路 C_{2n}，均有 $T[V(C_{2n})]\simeq F_{4r}$，这里 $n=2r$。

证 任取 T 中一条最长回路 C_{2n}，仍按前面约定，记为 $0,1,2,\cdots,2n-1,0$，且假定 $T[V(C_{2n})]\not\simeq F_{4r},n=2r$。由定理 1 知，$C_{2n}$ 上的任一顶点 i，在 T 中存在 $C_{2k}(i)$ $(2\leqslant k\leqslant n)$。剩下仅需考虑 $V/V(C_{2n})$ 中的任意顶点 v_0，设 $V=(V_1,V_2)$ 是 T 的顶点的二部划分，不失一般性假定 $v_0\in V_1$，若 $\forall\, i\in V(C_{2n})\cap V_2$，均有 $(v_0,i)\in A$，则由 T 的强连通性，必然存在某个 $i_0\in C_{2n}$ 为起点，只经 $V/V(C_{2n})$ 中的顶点到达 v_0 的路 P，且 P 的长度 $\geqslant 2$。于是在 T 中存在比 $2n$ 更长的回路：$i_0,P,i_0+1,i_0+2,\cdots,i_0$（当 $i_0\in V_1$）或 $i_0,P,i_0+2,i_0+3,\cdots,i_0$（当 $i_0\in V_2$），这与 C_{2n} 是 T 中最长的回路的选取相矛盾。类似地证明 $\forall i\in V(C_{2n})\cap V_2$，均有 $(i,v_0)\in A$ 的这种情况也不可能。从而对 v_0 总存在 $j',j''\in C_{2n}$，有 (v_0,j')、$(j'',v_0)\in A$。从而存在 $j_0=j_0(v_0)\in C_{2n}$ 有 (j_0,v_0)、$(v_0,j_0+2)\in A$。于是 T 中有 $C_{2n}(v_0)$：

$$0,1,\cdots,j_0,v_0,j_0+2,j_0+3,\cdots,2n-1,0$$

故当 $n=2$ 时，定理已成立。对 $n>2$ 时，若 $T[V(C_{2n}(v_0))]\not\simeq F_{4r}$，则由定理1知，在 T 中存在 $C_{2k}(v_0)(2\leqslant k\leqslant n)$。若 $T[V(C_{2n}(v_0))]\simeq F_{4r}$，此时 $r\geqslant 2$。于是一定存在某个 $j_0'=j_0'(v_0)\in C_{2n}$，且 $j_0'(v_0)-j_0(v_0)\equiv 0(\mathrm{mod}4)$。从而 T 中还存在 $C'_{2n}(v_0)$：

$$0,1,\cdots,j_0',v_0,j_0'+2,j_0'+3,\cdots,2n-1,0$$

显然 $T[V(C'_{2n}(v_0))]\simeq T[V(C_{2n})]\not\simeq F_{4r}$，于是对 $T[V(C'_{2n}(v_0))]$，由定理1知，在 T 中存在 $C_{2k}(v_0)(2\leqslant k\leqslant n)$、综合上述，$T$ 具有拟点泛偶回路性。证毕。

参 考 文 献

〔1〕 L. W. Beineke and C. H. Little, Cycles in bipartite tournaments, J. Combin. Theory B 32 (1982), 140—145.

〔2〕 F. Harary and L. Moser, The theory of round-robin tournamets, Amer. Math. Monthly 73 (1966), 231—246.

〔3〕 B. Jackson, Long paths and cycles in Oriented graphs, J. Graph Theory vol.5 No.2 (1981) 145—148.

〔4〕 J. W. Moon, On Subtournaments of a tournements, Canad. Math. Bull, 9 (1966) 297—301.