数 学 年 刊
23A:5(2002),585-596.

几乎正则多部竞赛图的点泛圈性***

潘林强* 张克民**

提 要

令 T 是多部竞赛图. $i(T)=\max\limits_{x,y\in V(T)}|d^+(x)-d^-(y)|$ (这里允许 $x=y$). 如果 $i(T)=0$, 则 T 被称为是正则的; 如果 $i(T)\le 1$, 则 T 被称为是几乎正则的. Volkmann 猜测几乎正则 c- 部竞赛图 ($c\ge 4$) 是泛圈的. 本文证明当 $c\ge 5$ 时, 除了有限多个几乎正则多部竞赛图外, 所有几乎正则 c- 部竞赛图都是点泛圈的. 同时我们给出一个反例说明当 $c=4$ 时, 上述猜想不成立.

关键词 多部竞赛图, 几乎正则, 点泛圈性
MR (2000) 主题分类 05C20, 05C38
中图法分类 O157.5 **文献标识码** A
文章编号 1000-8314(2002)05-0585-12

§1. 引 言

本文中, 有关图论的基本概念和术语, 可见文 [1].

有向图 $D=(V(D),A(D))$ 由顶点集 $V(D)$ 和弧集 $A(D)$ 组成. 用弧代替完全 c- 部图中的每一条边所得到的有向图被称为 c- 部或多部竞赛图 (简称为, c-PT 或 MPT). 竞赛图是刚好含有 c 个顶点的 c-PT. 如果 xy 是有向图 D 的一条弧, 则称 x 控制 y, 并且记为 $xy\in A(D)$ 或者 $x\to y$. 更一般地, 令 A 和 B 是 D 的两个不相交子有向图或者是 $V(D)$ 的两个不相交子集, 使得 A 中的每一个点控制 B 中的每一个点, 则称 A 控制 B, 记为 $A\to B$. 用 $A\Rightarrow B$ 表示从 B 到 A 没有弧.

令 S 是 D 的子图或 $V(D)$ 的任意子集, $x\in V(D)$ 是任意一个顶点. x 关于 S 的入邻域是属于 S 的所有 x 的入邻点组成的集合, 记为 $N_S^-(x)$. 类似地, 用 $N_S^+(x)$ 表示 x 关于 S 的出邻域. $d_S^-(x)=|N_S^-(x)|$ 被称为是 x 关于 S 的入度, $d_S^+(x)=|N_S^+(x)|$ 被称为是 x 关于 S 的出度. 更一般地, $N_S^-(S')=\bigcup\limits_{x\in V(S')}N_S^-(x)$ 和 $N_S^+(S')=\bigcup\limits_{x\in V(S')}N_S^+(x)$ 分别表示 S' 关于 S 的入邻域和出邻域, 其中 $S'\subseteq V(D)$. 如果 $S=D$ 或者 $S=V(D)$, 则分别记上述符号为 $d^-(x)$, $d^+(x)$, $N^-(x)$, $N^+(x)$,$N^-(S')$ 和 $N^+(S')$.

有向图 D 的非正则度 $i(D)=\max\limits_{x,y\in V(D)}|d^+(x)-d^-(y)|$ (这里允许 $x=y$), 局部非正则度 $i_l(D)=\max\limits_{x\in V(D)}|d^+(x)-d^-(x)|$, 全局非正则度 $i_g(D)=\max\limits_{x\in V(D)}\{d^+(x),d^-(x)\}-\min\limits_{y\in V(D)}\{d^+(y),d^-(y)\}$. 显然 $i_l(D)\le i(D)\le i_g(D)$. 如果 $i_g(D)=0$, 则 D 被称为是正则的; 如果 $i(D)\le 1$, 则称 D 是几乎正则的.

本文 2001 年 5 月 31 日收到, 2001 年 7 月 5 日收到修改稿.

*华中科技大学控制科学与工程系, 武汉 430074. **E-mail:** lqpan@mail.hust.edu.cn

南京大学数学系, 南京 210093. **E-mail: zkmfl@nju.edu.cn

***国家自然科学基金 (No. 19871040; No.60103021) 和中国博士后科学基金资助的项目.

文中圈 (或路) 指的是有向圈 (或有向路). 长为 k 的圈被称为 k- 圈. 如果对所有满足 $3 \le k \le |V(D)|$ 的 k, 有向图 D 都含有一个 k- 圈, 则称 D 是泛图的. 如果对所有满足 $3 \le k \le |V(D)|$ 的 k, 有向图 D 的每个点都包含在一个 k- 圈中, 则称 D 是点泛圈的.

如果对 D 中的任意两个顶点 u 和 v, 存在从 u 到 v 的路和从 v 到 u 的路, 则称 D 是强的或者强连通的. 有向图 D 的强连通分支 D' 是 D 中极大的强连通子图. 如果对任意一个至多含有 $k-1$ 个顶点的集合 A, 子图 $D-A$ 是强的, 则称 D 是 k- 连通的. 如果 D 是 k- 连通的, 但不是 $(k+1)$- 连通的, 则称 k 为 D 的连通度, 记为 $\kappa(D)=k$. 如果 D 是强的, S 是 $V(D)$ 的一个子集, 使得 $D-S$ 是不强连通的, 则称 S 为 D 的分离集. 如果对 S 的任意真子集 S', 子图 $D-S'$ 都是强的, 则 D 的分离集 S 被称为是极小的. 满足 $|S|=\kappa(D)$ 的分离集 S 被称为 D 的最小分离集. 如果用 yx 代替 D 中的每一条弧 xy, 则所得到的图称为 D 的逆图, 记为 D^{-1}.

本文总是假设 T 是 c-PT, 其中部集 $V_1, V_2, \cdots, V_c$ 满足 $|V_1| \le |V_2| \le \cdots \le |V_{c-1}| \le |V_c|$. 因此 $|V_c| = \alpha(T)$ 是 T 的独立数, 令 $\beta(T) = |V_{c-1}|$. 定义 $f(T) = |V(T)| - 3|V_c| + 1$, $g(T) = \frac{|V(T)|-|V_{c-1}|-2|V_c|+2}{2}$.

Volkmann[2] 猜测每个 $c \ge 4$ 的正则 c-PT 是泛圈的. Yeo[3] 证明 $c \ge 5$ 的所有正则 c-PT 都是点泛圈的. Yeo[4] 用概率方法证明顶点数超过 N_0 (N_0 为常数) 的 4-PTs 是点泛圈的. Tewes, Volkmann 和 Yeo[5] 证明几乎所有满足 $c \ge 5$ 和 $i_g \le 1$ 的 c-PTs 是点泛圈的.

对几乎正则 MT, Volkmann[2] 同样猜测每个 $c \ge 4$ 的几乎正则 c-PT 是泛圈的. Zhou 和 Zhang 证明了下面两个结果: 如果 T 是 $c \ge 7$ 的几乎正则 c-PT, 则 T 是哈密尔顿的 [12]; 如果 T 是 $c \ge 13$ 的几乎正则 c-PT, 部集 $V_1, V_2, \cdots, V_c$ 满足 $|V_1| \le |V_2| \le \cdots \le |V_c| \le |V_1|+1$, 则 T 是点泛圈的 [13]. 容易验证图 1 中的图不是哈密尔顿的. 这个例子表明上述 Volkmann 猜想当 $c=4$ 时不成立. 本文将研究几乎正则 MTs 的点泛圈性, 并解决由 Zhou 和 Zhang[6] 提出的一个开问题.

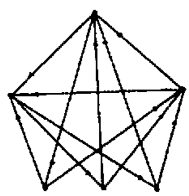


图 1

§2. 基 本 结 果

引理 2.1 令 T 是 c-PT, 部集为 $V_1, V_2, \cdots, V_c$, 则

(a) $\Delta^+(T) - \delta^+(T) \le 2i(T)$;

(b) $||V_i| - |V_j|| \le 2i(T)$ 对 $1 \le i, j \le c$;

(c) $d^-(u) = \delta^+(T) + i(T)$ 对每个 $u \in V(T)$, 如果 $\Delta^+(T) - \delta^+(T) = 2i(T)$;

(d) $d^+(u) = \Delta^+(T), d^+(v) = \delta^+(T)$ 和 $|V^c(v)| = |V^c(u)| + 2i(T)$, 如果 $d^+(u) - d^+(v) = 2i(T)$.

证 (a) 令 $d^+(u) = \Delta^+(T)$, $d^+(v) = \delta^+(T)$. 由于 $d^+(u) - d^-(u) \le i(T)$ 和 $d^-(u) - d^+(v) \le i(T)$, 有 $d^+(u) - d^+(v) \le 2i(T)$, 即 $\Delta^+(T) - \delta^+(T) \le 2i(T)$.

(b) 注意到 $d^+(u) + d^-(u) = |V(T)| - |V^c(u)|$ 对每个 $u \in V(T)$. 令 $u \in V_i, v \in V_j$,

则 $||V_i| - |V_j|| = |(|V(T)| - |V_i|) - (|V(T)| - |V_j|)| = |d^+(u) + d^-(u) - (d^+(v) + d^-(v))| \leq |d^+(u) - d^-(v)| + |d^-(u) - d^+(v)| \leq 2i(T)$.

(c) 令 $d^+(x) = \Delta^+(T)$, $d^-(y) = \delta^+(T)$ 和 $u \in V(T)$. 如果 $d^-(u) \geq \delta^-(T) + i(T) + 1$, 则 $d^-(u) - d^+(y) \geq i(T) + 1$, 矛盾. 如果 $d^-(u) \leq \delta^+(T) + i(T) - 1$, 则 $d^+(x) - d^-(u) = \delta^+(T) + 2i(T) - d^-(u) \geq \delta^+(T) + 2i(T) - (\delta^+(T) + i(T) - 1) = i(T) + 1$, 矛盾. 因此 $d^-(u) = \delta^+(T) + i(T)$.

(d) 由 (a), 容易得到 $d^+(u) = \Delta^+(T)$, $d^+(v) = \delta^+(T)$. 由 (c), $d^-(u) = d^-(v)$. 因此 $|V^c(v)| - |V^c(u)| = (|V(T)| - d^+(v) - d^-(v)) - (|V(T)| - d^+(u) - d^-(u)) = d^+(u) - d^+(v) = 2i(T)$, 即 $|V^c(v)| = |V^c(u)| + 2i(T)$.

引理 2.2[3] 令 T 是 c-PT, 部集为 $V_1, V_2, \cdots, V_c$, 并且令 $S \subseteq V(T)$, 使得 $T' = T - S$ 是不强连通的. 如果 $\{Q_1, Q_2\}$ 是 $V(T')$ 的一个剖分, 使得 $Q_1 \Rightarrow Q_2$, 则下述不等式成立, 其中 $v' = \max\{|V_i \cap V(T')| | i = 1, 2, \cdots, c\}$.

$$i_l(T) \geq \frac{|V(T')| - v'}{2} - |S|.$$

推论 2.1 如果 T 是一个 MT, 则 $\kappa(T) \geq \frac{|V(T)| - 2i_l(T) - \alpha(T)}{3}$.

定理 2.1[8] 每个强连通竞赛图都是点泛圈的.

定理 2.2[9] 令 T 是一个强连通 c-PT, 其中有一个部集只含一个顶点 v, 则对每个 $k \in \{3, 4, \cdots, c\}$, T 中存在 k- 圈包含 v.

定理 2.3[10] 如果 T 是一个 MT, 并且 $\kappa(T) \geq \alpha(T)$, 则 T 是哈密尔顿的.

定理 2.4[3] 所有 $c \geq 5$ 的正则 c-PTs 是点泛圈的.

定理 2.5[11] 令 T 是一个 MT, 其中部集 $V_1, V_2, \cdots, V_c$ 满足 $|V_1| \leq |V_2| \leq \cdots \leq |V_c|$. 如果 $i_l(T) \leq \min\{f(T), g(T)\}$ 或者 $i_g(T) \leq g(T)$, 则 T 是哈密尔顿的.

§3. 几乎正则 MTs 的连通性

定理 3.1 令 T 是 $c \geq 6$ 的几乎正则 c-PT, 则 $\kappa(T) \geq \alpha(T)$.

证 令 $V_1, V_2, \cdots, V_c$ 是 T 的部集, 并且满足 $|V_1| \leq |V_2| \leq \cdots \leq |V_c|$. 如果 S 是 T 的分离集, 则总是用 $T_1, T_2, \cdots, T_t$ 表示 $T - S$ 的强连通分支. 不失一般性, 假设 $T_i \Rightarrow T_j$ 对所有 $1 \leq j < i \leq t$. 如果 $|V_1| = r$, 则由于 $i(T) \leq 1$, 从引理 2.1 可以得到 $|V_c| = r + k$, 其中 $k \in \{0, 1, 2\}$. 当 $c \geq 7$ 时, Tewes 等指出 [5, Remark 3.4] 定理 3.1 是正确的. 现在考虑情况 $c = 6$.

情况 1 $c = 6$, $k = 1$ 和 $r = 1$.

如果 $|V(T)| \geq 8$, 则由推论 2.1 马上就可以得到所要的结论.

如果 $|V(T)| = 7$, 则 $1 = |V_1| = \cdots = |V_5| < |V_6| = 2$, $\delta^+(T), \delta^-(T) \geq 2$ 和 $d^+(u) = d^-(u) = 3$ 对 $u \in V_1 \cup \cdots \cup V_5$. 由推论 2.1 得到 $\kappa(T) \geq 1$. 假设存在 T 的分离集 S 满足 $|S| = 1$. 由于 $\delta^+(T), \delta^-(T) \geq 2$, 得到 $|V(T_1)| = 3$, $|V(T_2)| = 3$, T_1 和 T_2 是 3- 圈, 并且 $d^+(u) = 2$ 对 $u \in V(T_1)$. 因此 $V(T_1) \subseteq V_6$. 这与 T_1 是 3- 圈矛盾. 故 $\kappa(T) \geq 2 = \alpha(T)$.

情况 2 $c = 6$, $k = 2$ 和 $r = 2$.

如果 $|V(T)| \geq 16$, 则由推论 2.1 直接可以推得 $\kappa(T) \geq 4 = \alpha(T)$.

如果 $|V(T)| = 15$, 则 $2 = |V_1| = \cdots = |V_4| < |V_5| = 3 < |V_6| = 4$, $\delta^+(T), \delta^-(T) \geq 5$, 和 $d^+(u), d^-(u) \geq 6$ 对 $u \in V_1 \cup \cdots \cup V_5$. 由推论 2.1 可以得到 $\kappa(T) \geq 3$. 假设存在 T 的分离集 S 满足 $|S| = 3$. 由于 $\delta^+(T), \delta^-(T) \geq 5$, 有 $|V(T_1)|, |V(T_2)| \geq 5$. 如果 $|V(T_1)| = 5$, 则 $d^+(u) = 5$ 对 $u \in V(T_1)$, 并且 T_1 是竞赛图. 因此 $V(T_1) \subseteq V_6$, 这与 T_1 是竞赛图矛盾. 因此 $|V(T_1)| \geq 6$, 类似地, $|V(T_t)| \geq 6$. 由于 $|V(T)| = 15$, 有 $|V(T_1)| = 6$, $|V(T_2)| = 6$ 和 $t = 2$. 因为 $|A(T_1)| \leq 15$, 所以 T_1 中至少存在三个顶点 v_1, v_2, v_3, 使得 $d^+(v_i) = 5$, 其中

$i=1,2,3$. 因此 $\{v_1,v_2,v_3\}\subseteq V_6$. 类似地, T_2 中存在 v_4,v_5,v_6, 使得 $\{v_4,v_5,v_6\}\subseteq V_6$. 这与 $|V_6|=4$ 矛盾, 故 $\kappa(T)\geq 4=\alpha(T)$. 如果 $|V(T)|=14$, 注意到 $i_l(T)=0$, 从推论 2.1 直接得到 $\kappa(T)\geq 4=\alpha(T)$.

情况 3 $c=6$, $k=2$ 和 $r=1$.

如果 $|V(T)|\geq 12$, 则根据推论 2.1, $\kappa(T)\geq 3=\alpha(T)$.

如果 $|V(T)|=11$, 则根据推论 2.1, 有 $\kappa(T)\geq 2$. 假设存在 T 的分离集 S 满足 $|S|=2$. 由于 $\delta^+(T),\delta^-(T)\geq 4$, 得到 $|V(T_1)|,|V(T_t)|\geq 5$. 这与 $|V(T)|=11$ 矛盾.

如果 $|V(T)|=10$, 则推论 2.1 意味着 $\kappa(T)\geq 2$. 假设存在 T 的分离集 S 满足 $|S|=2$. 考虑下面两种子情况.

(1) $1=|V_1|=|V_2|=|V_3|<|V_4|=|V_5|=2<|V_6|=3$.

在这种子情况中, $d^+(u),d^-(u)\geq 4$ 对 $u\in V_1\cup\cdots\cup V_5$, 并且 $\delta^+(T),\delta^-(T)\geq 3$. 因此 $|V(T_1)|\geq 3$, $|V(T_t)|\geq 3$. 如果 $|V(T_1)|=3$, 则 T_1 是 3- 圈, 并且 $d^+(u)=3$ 对所有 $u\in V(T_1)$, 这意味着 $V(T_1)\subseteq V_6$, 矛盾. 故 $|V(T_1)|\geq 4$, 类似地, $|V(T_t)|\geq 4$. 因为 $|V(T)|=10$, 所以 $|V(T_1)|=4$, $|V(T_2)|=4$ 和 $t=2$. 因此 $V(T_1)$ 中存在二个点 v_1、v_2, 满足 $d^+(v_i)=3$ $(i=1,2)$. 由 $d^+(v_i)=3$ $(i=1,2)$, 可知 $v_1,v_2\in V_6$. 类似地, $V(T_2)$ 中存在二个点 v_3,v_4, 使得 $v_3,v_4\in V_6$. 这与 $|V_6|=3$ 矛盾.

(2) $1=|V_1|=\cdots=|V_4|<|V_5|=|V_6|=3$.

在这种子情况中, $\delta^+(T),\delta^-(T)\geq 3$ 和 $d^+(u),d^-(u)\geq 4$ 对所有 $u\in V_1\cup\cdots\cup V_4$. 如上所述, 容易得到 $|V(T_1)|=4$, $|V(T_2)|=4$ 和 $t=2$. 因为 $|A(T_1)|\leq 6$, 所以 $\sum\limits_{x\in V(T_1)}d^+(x)=|A(T_1)|+|N_S^+(V(T_1))|\leq 6+8=14$. 如果 $d^+(u)\geq 4$ 对所有 $u\in V(T_1)$, 则 $\sum\limits_{x\in V(T_1)}d^+(x)\geq 16$, 矛盾. 因此存在 $u\in V(T_1)$, 使得 $d^+(u)=3$, 这意味着 $d^-(v)=4$ 对所有 $v\in V(T)$, 故 $\sum\limits_{x\in V(T_2)}d^-(x)=16$, 但是 $\sum\limits_{x\in V(T_2)}d^-(x)=|A(T_2)|+|N_S^-(V(T_2))|\leq 6+8=14$, 矛盾.

如果 $|V(T)|=9$, 则 $1=|V_1|=\cdots=|V_4|<|V_5|=2<|V_6|=3$, $\delta^+(T),\delta^-(T)\geq 3$ 和 $d^+(u),d^-(u)=4$ 对 $u\in V_1\cup\cdots\cup V_4$. 推论 2.1 意味着 $\kappa(T)\geq 2$. 假设存在 T 的分离集 S 满足 $|S|=2$, 则 $|V(T_1)|,|V(T_t)|\geq 3$. 如果 $|V(T_1)|=3$, 则 T_1 是 3- 圈, 并且 $d^+(v)=3$ 对所有 $v\in V(T_1)$, 这意味着 $V(T_1)\subseteq V_5\cup V_6$, 矛盾. 因此 $|V(T_1)|\geq 4$. 类似地, $|V(T_t)|\geq 4$, 这与 $|V(T)|=9$ 矛盾. 故 $\kappa(T)\geq 3=\alpha(T)$.

如果 $|V(T)|=8$, 则 $1=|V_1|=\cdots=|V_5|<|V_6|=3$, $\delta^+(T)$, $\delta^-(T)\geq 2$ 和 $d^+(v),d^-(v)\geq 3$ 对 $v\in V_1\cup\cdots\cup V_5$. 不失一般性, 假设 $d^+(x)=2$ 对某个 $x\in V_6$, 则 $d^+(v)=4$, $d^-(v)=3$ 对所有 $v\in V_1\cup\cdots\cup V_5$, 并且 $d^+(u)=2$, $d^-(u)=3$ 对所有 $u\in V_6$. 由推论 2.1 可以得到 $\kappa(T)\geq 2$, 因此 $\kappa(T)=2$. 假设存在 T 的分离集 S 满足 $|S|=2$, 则 $|V(T_t)|\geq 3$. 考虑下述四种子情况.

(1) $|V(T_1)|=1$ 和 $|V(T_t)|=3$.

记 $V(T_1)=\{v_6\}$. 在这种子情况中, $t=4$, $|V(T_2)|=|V(T_3)|=1$, $v_6\to S$ 和 $d^+(v_6)=2$. 因此 $v_6\in V_6$ 和 $S\subseteq V_1\cup\cdots\cup V_5$. 因为 $d^+(v)=4$ 对 $v\in V_1\cup\cdots\cup V_5$, $V(T_2)\subset V_6$, 所以 $V(T_2)\subset V_6$. 不失一般性, 假设 $S=\{v_1,v_2\}\subseteq V_1\cup V_2$ 和 $v_1\to v_2$. 如果 $V(T_3)\subset V_6$, 则 $V(T_2)\to S$, $V(T_3)\to S$, 因此 $d^-(v_2)=4$, 矛盾. 如果 $V(T_3)\not\subset V_6$, 则 $V(T_2)\to S$, $V(T_3)\to\{S,V(T_1),V(T_2)\}$, 因此 $d^-(v_2)=4$, 矛盾.

(2) $|V(T_1)|=1$ 和 $|V(T_t)|=4$.

记 $V(T_1)=\{v_6\}$. 在这种子情况中, $t=3$, $|V(T_2)|=1$, $v_6\to S$ 和 $d^+(v_6)=2$. 因此 $v_6\in V_6$ 和 $S\subseteq V_1\cup\cdots\cup V_5$. 不失一般性, 假设 $S=\{v_1,v_2\}\subseteq V_1\cup V_2$ 和 $v_1\to v_2$. 如上所述, 有 $V(T_2)\subset V_6$, 因此 $V(T_2)\to S$. 因为 $d^-(v_1)+d^-(v_2)=6$, $V(T_1)\cup V(T_2)\to$

S 和 $v_1 \to v_2$, 所以 $|N_S^+(V(T_3))| = 1$. 因此 $\sum\limits_{x\in V(T_3)} d^+(x) = |A(T_3)| + |N_S^+(V(T_3))| + |N^+_{V(T_1)\cup V(T_2)}(V(T_3))| \le 6+1+6 = 13$. 另一方面, T_3 有 V_6 的一个点和 $V_3\cup V_4\cup V_5$ 的三个点, 因此 $\sum\limits_{x\in V(T_3)} d^+(x) = 2+3\times 4 = 14$, 矛盾.

(3) $|V(T_1)| = 1$ 和 $|V(T_t)| = 5$.

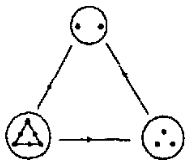
记 $V(T_1) = \{v_6\}$. 在这种子情况中, $t=2$, $v_6 \to S$ 和 $d^+(v_6) = 2$. 因此 $v_6 \in V_6$ 和 $S \subseteq V_1\cup\cdots\cup V_5$. 不失一般性, 假设 $S = \{v_1, v_2\} \subseteq V_1 \cup V_2$ 和 $v_1 \to v_2$. 因为 $d^-(v_1) + d^-(v_2) = 6$, $v_6 \to S$ 和 $v_1 \to v_2$, 所以 $|N_S^+(V(T_2))| = 3$. 因此 $\sum\limits_{x\in V(T_2)} d^+(x) = |N_S^+(V(T_2))| + |N^+_{V(T_1)}(V(T_2))| + |A(T_2)| = 3+3+9 = 15$. 另一方面, T_2 有二个 V_6 中的点和三个 $V_3\cup V_4\cup V_5$ 中的点, 因此 $\sum\limits_{x\in V(T_2)} d^+(x) = 2\times 2+3\times 4 = 16$, 矛盾.

(4) $|V(T_1)| = 3$, $|V(T_2)| = 3$ 和 $t = 2$.

在这种子情况中, T_1 和 T_2 是 3- 圈. 因为 $d^-(x) = 3$ 对所有 $x \in V(T)$, 所以 $S \to V(T_2)$. 如果 S 没有 V_6 中的点, 则 T_1 或者 T_2 有二个 V_6 中的点, 这与 T_1 和 T_2 是 3- 圈, 矛盾. 如果 S 有 V_6 中的一个点, 则因为 $S \to V(T_2)$, T_2 没有 V_6 中的点. 因此 T_1 有二个 V_6 中的点, 这与 T_1 是 3- 圈矛盾. 如果 S 有二个 V_6 中的点, 则 T_1 有一个 V_6 中的点, 记为 v_6, 有 $d^+(v_6) = 1$, 矛盾.

因此不存在满足 $c=6$, $k=2$, $r=1$ 和 $|V(T)| = 8$ 的几乎正则 MT.

定理 3.2 令 T 是几乎正则 5-PT, 则 $\kappa(T) \ge \alpha(T) - 1$. 当 $\kappa(T) = \alpha(T) - 1$ 时, T 是点泛圈的, 除非 T 同构于 T_8^* 或 $(T_8^*)^{-1}$ (见图 2).



T_8^*

图 2

证 令 $V_1, V_2, \cdots, V_5$ 是 T 的部集, 并且满足 $|V_1| \le |V_2| \le \cdots \le |V_5|$. 如果 S 是 T 的分离集, 则总是用 $T_1, T_2, \cdots, T_t$ 表示 $T - S$ 的强连通分支. 不失一般性, 假设 $T_i \Rightarrow T_j$ 对所有 $1 \le j < i \le t$. 如果 $|V_1| = r$, 则由于 $i(T) \le 1$, 根据引理 2.1, 有 $|V_5| = r + k$, $k \in \{0,1,2\}$. 当 $k=0$, 或者 $k=1$, 或者 $k=2$ 和 $r \ge 2$, 如定理 3.1 的证明, 可以证明 $\kappa(T) \ge \alpha(T)$. 现在考虑情况 $k=2$ 和 $r=1$.

如果 $|V(T)| \ge 12$, 则根据推论 2.1,

$$\kappa(T) \ge 3 = \alpha(T).$$

如果 $|V(T)| = 11$, 则根据推论 2.1, $\kappa(T) \ge 2$. 假设存在 T 的分离集 S 满足 $|S| = 2$. 由于 $\delta^+(T), \delta^-(T) \ge 4$, 有 $|V(T_1)|, |V(T_t)| \ge 5$, 这与 $|V(T)| = 11$ 矛盾.

如果 $|V(T)| = 10$, 则

$$1 = |V_1| = |V_2| < |V_3| = 2 < |V_4| = |V_5| = 3$$

或者 $1=|V_1|<|V_2|=|V_3|=|V_4|=2<|V_5|=3$. 根据推论 2.1, 有 $\kappa(T)\ge 2$. 假设存在 T 的分离集 S 满足 $|S|=2$. 考虑下面二种子情况.

(1) $1=|V_1|=|V_2|<|V_3|=2<|V_4|=|V_5|=3$.

因为 $\delta^+(T),\delta^-(T)\ge 3$, 所以 $|V(T_1)|,|V(T_t)|\ge 3$. 如果 $|V(T_1)|=3$, 则 T_1 是 3- 圈, 并且 $d^+(x)=3$ 对 $x\in V(T_1)$. 由于 $d^+(x)\ge 4$ 对 $x\in V_1\cup V_2\cup V_3$, 可得到 $V(T_1)\subseteq V_4\cup V_5$, 这与 T_1 是 3- 圈矛盾. 因此 $|V(T_1)|\ge 4$. 类似地, $|V(T_t)|\ge 4$. 因为 $|V(T)|=10$, 所以 $|V(T_1)|=|V(T_2)|=4$, 并且 $t=2$. 如果 $d^+(x)\ge 4$ 对所有 $x\in V(T_1)$. 则 $|V(T_1)|\ge 5$, 矛盾. 因此 T_1 中存在点 u, 使得 $d^+(u)=3$, 再根据引理 2.1 和 $i(T)\le 1$, 有 $d^-(v)=4$ 对所有 $v\in V(T)$. 因此 $|V(T_2)|\ge 5$, 矛盾. 故 $\kappa(T)\ge 3=\alpha(T)$.

(2) $1=|V_1|<|V_2|=|V_3|=|V_4|=2<|V_5|=3$.

如上可以证明 $|V(T_1)|=|V(T_2)|=4$. 因为 $|A(T_1)|\le 6$, 所以 T_1 中至少存在二个出度为 3 的点. 令 $R=\{x|x\in V(T_1),d^+(x)=3\}$. 如果 $|R|=2$, 则 T_1 是竞赛图, 这与 $R\subseteq V_5$ 矛盾. 如果 $|R|\ge 3$, 则由于 $R\subset V_5$, T_1 不是强连通的, 矛盾. 故 $\kappa(T)\ge 3=\alpha(T)$.

考虑到文章的篇幅, 下面只给出证明的概要, 以说明如何得到图 2,3,4 和 5 中的图.

如果 $|V(T)|=9$, 则

$$1=|V_1|=|V_2|=|V_3|<|V_4|=|V_5|=3$$

或者 $1=|V_1|=|V_2|<|V_3|=|V_4|=2<|V_5|=3$. 推论 2.1 意味着 $\kappa(T)\ge 2$. 令 S 是 T 的分离集满足 $|S|=2$. 因为 $\delta^+(T),\delta^-(T)\ge 3$, 所以 $|V(T_1)|,|V(T_t)|\ge 3$. 考虑下面二种子情况.

(1) $1=|V_1|=|V_2|=|V_3|<|V_4|=|V_5|=3$.

如果 $|V(T_1)|=3$, 则 T_1 是 3- 圈, 并且 $d^+(x)=3$ 对所有 $x\in V(T_1)$. 因此 $V(T_1)\subseteq V_4\cup V_5$, 矛盾. 故 $|V(T_1)|\ge 4$, 类似地可以证明 $|V(T_t)|\ge 4$, 这与 $|V(T)|=9$ 矛盾.

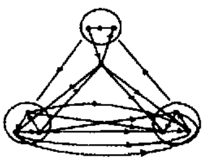
(2) $1=|V_1|=|V_2|<|V_3|=|V_4|=2<|V_5|=3$.

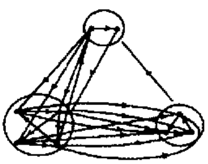
如果 $T-S$ 由三个连通分支 T_1,T_2 和 T_3 组成, 则 $|V(T_1)|=|V(T_3)|=3$, $|V(T_2)|=1$, T_1 和 T_3 是 3- 圈, 并且 $T_1\to S\to T_3$. 不难证明

$$S\subseteq V_1\cup V_2,\quad V(T_2)\subseteq V_5,$$

T_1 (同样地 T_3) 含有 V_3 中的一个点, V_4 中的一个点和 V_5 中的一个点. 在这种情况下, 刚好只有一个 5-PT 是几乎正则的, 记为 T_9^1 (见图 3). 容易验证 T_9^1 是点泛圈的.

如果 $T-S$ 由二个连通分支 T_1 和 T_2 组成, 使得 $|V(T_1)|=3$ 和 $|V(T_2)|=4$, 则 T_1 是 3- 圈, 并且 $T_1\to S$. 进一步, 可以证明 $S\subseteq V_1\cup V_2$, T_1 含有 V_3 中的一个点, V_4 中的一个点和 V_5 中的一个点; T_2 含有 V_3 中的一个点, V_4 中的一个点和 V_5 中的二个点. 如果 T_2 是哈密尔顿的, 则刚好只有 T_9^2 (见图 3) 是几乎正则的, 并且 T_9^2 是点泛圈的. 如果 T_2 不是哈密尔顿的, 则刚好只有 T_9^3 (见图 3) 是几乎正则的, 并且 T_9^3 是点泛圈的.


T_9^1


T_9^2

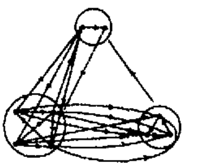

T_9^3

图 3

如果 $T-S$ 由二个连通分支 T_1 和 T_2 组成，使得 $|V(T_1)|=4$ 和 $|V(T_2)|=3$，则如上可以证明刚好只有二个几乎正则 5-PTs $(T_9^2)^{-1}$ 和 $(T_9^3)^{-1}$，并且这两个图都是点泛圈的.

如果 $|V(T)|=8$，则

$$1=|V_1|=|V_2|=|V_3|<2=|V_4|<|V_5|=3.$$

推论 2.1 意味着 $\kappa(T)\geq 1$. 假设 $\kappa(T)=1$ 和 $\{v\}$ 是 T 的分离集. 因为 $\delta^+(T),\delta^-(T)\geq 2$，所以 $|V(T_1)|,|V(T_l)|\geq 3$. 如果 $|V(T_1)|=3$，则 T_1 是 3- 圈，并且 $d^+(x)=2$ 对所有 $x\in V(T_1)$，由此可知 $V(T_1)\subseteq V_5$，矛盾. 因此 $|V(T_1)|\geq 4$. 类似地，$|V(T_l)|\geq 4$，这与 $|V(T)|=8$ 矛盾. 因此 $\kappa(T)\geq 2$. 因为 $\delta^+(T)$ 或者 $\delta^-(T)=2$，所以 $\kappa(T)=2$. 假设 S 是 T 的分离集满足 $|S|=2$. 首先，假设 $d^+(u)=2$ 对某一个 $u\in V_5$，则 $d^-(v)=3$ 对所有 $v\in V(T)$，$d^+(x)=4$ 对 $x\in V_1\cup V_2\cup V_3$，$d^+(y)=3$ 对 $y\in V_4$，$d^+(z)=2$ 对 $z\in V_5$.

如果 $T-S$ 由二个连通分支 T_1 和 T_2 组成，使得 $|T_1|=|T_2|=3$，则 T_1 和 T_2 是 3-圈，并且 $S\rightarrow V(T_2)$. 如果 $S\cap V_5=\emptyset$，则 $|V(T_1)\cap V_5|\geq 2$ 或者 $|V(T_2)\cap V_5|\geq 2$，这与 T_1 和 T_2 是圈矛盾. 如果 $|S\cap V_5|=1$，则 $V(T_2)\cap V_5=\emptyset$ 和 $|V(T_1)\cap V_5|=2$，矛盾. 如果 $|S\cap V_5|=2$，则 $V(T_2)\cap V_5=\emptyset$ 和 $|V(T_1)\cap V_5|=1$. 令 $\{v\}=V(T_1)\cap V_5$，则 $d^+(v)=1$，矛盾.

如果 $T-S$ 由二个连通分支 T_1 和 T_2 组成，使得 $|T_1|=1$ 和 $|T_2|=5$，在这种情况下，用微机验证了所有满足条件的几乎正则 5-PTs 都是点泛圈的 (程序参见 [12]).

如果 $T-S$ 由二个连通分支 T_1 和 T_2 组成，使得 $|T_1|=5$ 和 $|T_2|=1$，则 T_2 中的点的入度为 1. 矛盾.

如果 $T-S$ 由三个连通分支 T_1,T_2 和 T_3 组成，则

$$|V(T_1)|=|V(T_2)|=1,\quad |V(T_3)|=4,\quad V(T_1)\rightarrow S,$$
$$V(T_1)\subseteq V_5,\quad V(T_2)\cap(V_1\cup V_2\cup V_3)=\emptyset,$$

否则 T_2 中的点的入度为 4，矛盾. 首先，假设 $S\cap V_4=\emptyset$. 如果 $V(T_2)\subseteq V_5$，则

$$V(T_2)\rightarrow S,\quad |N_S^+(V(T_3))|=1,$$

此时刚好有两个几乎正则 5-PTs T_8^1 和 T_8^2 (见图 4). 可以直接验证 T_8^1 和 T_8^2 是点泛圈的. 如果 $V(T_2)\subseteq V_4$，则

$$V(T_2)\rightarrow S,\quad V(T_2)\rightarrow V(T_1),\quad |N_S^+(V(T_3))|=1,$$

此时刚好有两个几乎正则 5-PTs T_8^3 和 T_8^4 (见图 4)，并且它们都是点泛圈的. 如果 $|S\cap V_4|=1$，则

$$V(T_2)\subseteq V_5,\quad V(T_2)\rightarrow S,\quad |N_S^+(V(T_3))|=1,$$

此时刚好有四个几乎正则 5-PTs T_8^5, T_8^6, T_8^7 和 T_8^8 (见图 4)，并且它们都是点泛圈的. 如果 $|S\cap V_4|=2$，则 $V(T_2)\subseteq V_5$, $V(T_2)\rightarrow S$, $|N_S^+(V(T_1))|=2$，此时刚好有二个几乎正则 5-PTs T_8^9 和 T_8^{10}(见图 4)，可以直接验证它们都是点泛圈的.

如果 $T-S$ 有四个连通分支 T_1,T_2,T_3 和 T_4，则

$$|V(T_1)|=|V(T_2)|=|V(T_3)|=1,\quad |V(T_4)|=3,\quad V(T_1)\subseteq V_5,$$
$$V(T_1)\rightarrow S,\quad S\cap V_5=\emptyset,$$

T_4 是 3- 圈，并且 $S\rightarrow V(T_4)$. 如果 $S\cap V_4=\emptyset$，则刚好只有一个几乎正则 5-PT T_8^{11} (见图 4). 可以直接验证 T_8^{11} 是点泛圈的. 如果 $|S\cap V_4|=1$，则刚好存在一个几乎正则 5-PT T_8^{12} (见图 4)，并且它是点泛圈的. 如果 $|S\cap V_4|=2$，则刚好存在二个几乎正则 5-PTs T_8^{13} 和 T_8^* (见图 1 和 4). 可以验证 T_8^{13} 是点泛圈的，但是 T_8^* 没有哈密尔顿圈.

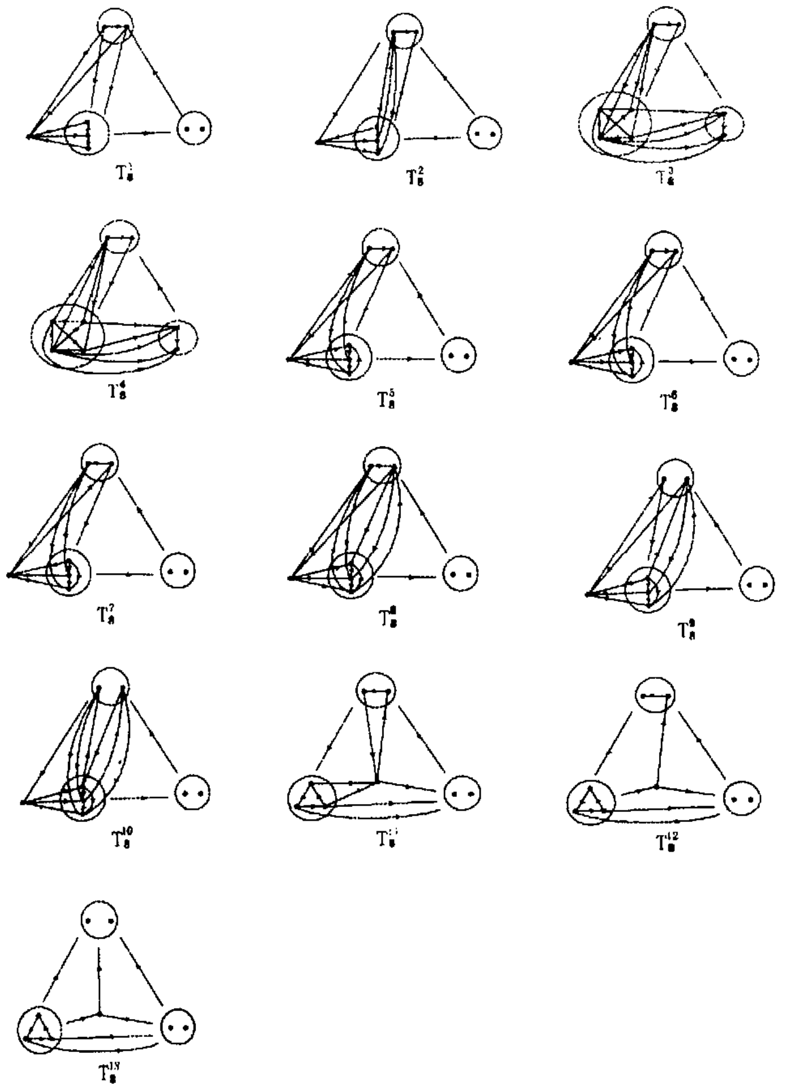
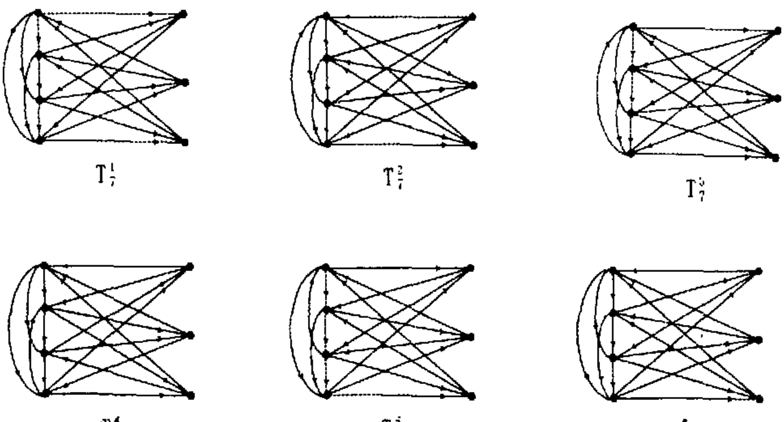


图 4

最后，假设 $d^+(u) \geq 3$ 对所有 $u \in V_5$，则如上得到十四个几乎正则 5-PTs $(T_8^1)^{-1}, \cdots,$ $(T_8^{13})^{-1}$ 和 $(T_8^*)^{-1}$. 显然 $(T_8^1)^{-1}, \cdots, (T_8^{13})^{-1}$ 是点泛圈的，但是 $(T_8^*)^{-1}$ 没有哈密尔顿圈.

如果 $|V(T)| = 7$，则 $1 = |V_1| = |V_2| = |V_3| = |V_4| < |V_5| = 3$, $d^+(x) = d^-(x) = 3$ 对 $x \in V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$, $d^+(y) = d^-(y) = 2$ 对 $y \in V_5$. 因此 $i_l(T) = 0$，推论 2.1 意味着 $\kappa(T) \geq 2$，故 $\kappa(T) = 2$. 如果 $T[V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4]$ 是强连通的，则刚好存在三个几乎正则

5-PTs T_7^1, T_7^2 和 T_7^3 (见图 5), 并且它们都是点泛圈的. 如果 $T[V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4]$ 不是强连通的, 但含有 3- 圈, 则刚好存在二个几乎正则 5-PTs T_7^4 和 T_7^5 (见图 5), 容易验证它们都是点泛圈的. 如果 $T[V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4]$ 是传递的, 则刚好存在一个几乎正则 5-PT T_7^6 (见图 5), 并且它是点泛圈的.



T_7^1　T_7^2　T_7^3

T_7^4　T_7^5　T_7^6

图 5

定理 3.3 如果 T 是 $c \geq 5$ 的几乎正则 c-PT, 则对每一个 $k \in \{3, 4, \cdots, c\}$, T 的每一个点都包含在一个 k 圈中, 并且 T 是哈密尔顿的, 除非 T 同构于 T_8^* 或 $(T_8^*)^{-1}$.

证 令 $V_1, V_2, \cdots, V_c$ 是 T 的部集, $v \in V_j$, 其中 $j \in \{1, 2, \cdots, c\}$. 根据定理 3.1 和 3.2, T 是点泛圈的或者 $\kappa(T) \geq \alpha(T)$, 除非 T 同构于 T_8^* 或者 $(T_8^*)^{-1}$. 如果 $\kappa(T) \geq \alpha(T)$, 由定理 2.3 可知 T 是哈密尔顿的. 因此 T 是哈密尔顿的, 除非 T 同构于 T_8^* 或 $(T_8^*)^{-1}$. 下面证明 v 包含在 k- 圈中, 对每个 $k \in \{3, 4, \cdots, c\}$. 根据定理 3.1 和定理 3.2, $\kappa(T) \geq \alpha(T) - 1$. 如果 $\kappa(T) = \alpha(T) - 1$, 则根据定理 3.2, T 是点泛圈的, 除非 T 同构于 T_8^* 或 $(T_8^*)^{-1}$. 如果 $\kappa(T) \geq \alpha(T)$, 则 $T - \{V_j - \{v\}\}$ 是强连通的, 并且其中一个部就是 $\{v\}$. 根据定理 2.2, 点 v 包含在 k- 圈中, 对每一个 $k \in \{3, 4, \cdots, c\}$. 容易验证 T_8^* 和 $(T_8^*)^{-1}$ 的每个点包含在 k- 圈中, 对 $k \in \{3, 4, 5\}$. 这样得到了证明的结果.

由于 $i_g(T_8^*) = i_g((T_8^*)^{-1}) = 2$, 有下面推论.

推论 3.1[5] 令 T 是 $c \geq 5$ 的 c-PT, 并且 $i_g(T) \leq 1$, 则 T 是哈密尔顿的, 并且 T 的每个点都包含在 k- 圈中, 对 $k \in \{3, 4, \cdots, c\}$.

下面这个例子表明定理 3.3 对几乎正则 4-PTs 不成立.

例 3.1[5] 令 $\mathcal{F}_1$ 是一个 4-PTs 簇, 其中部集为 $V_1 = V_1' \cup V_1''$, $V_2 = V_2' \cup V_2''$, $V_3 = V_3' \cup V_3''$ 和 V_4, 使得 $|V_1'| = |V_1''| = |V_2'| = |V_2''| = |V_3'| = |V_3''| = p$ 和 $|V_4| = 2p + 1$. 令 $w \in V_4$, $V_1' \to V_2' \to V_3' \to V_1'$, $V_1'' \to V_2'' \to V_3'' \to V_1''$, $(V_4 - w) \to (V_1'' \cup V_2'' \cup V_3'') \Rightarrow (V_1' \cup V_2' \cup V_3') \to (V_4 - w)$ 和 $(V_1'' \cup V_2'' \cup V_3'') \to w \to (V_1' \cup V_2' \cup V_3')$. $\mathcal{F}_1$ 中每一个 4-PT 都是几乎正则的, 但是 $S = V_4 - \{w\}$ 是分离集, 并且点 w 不包含在 3- 圈中.

对 4-PTs, 有如下结果.

定理 3.4 令 T 是几乎正则 4-PT, 使得所有部集所含顶点数相同, 则 $\kappa(T) \geq \alpha(T)$, T 是哈密尔顿的, 并且每个顶点包含在 3- 圈和 4- 圈中.

证 令 V_1, V_2, V_3, V_4 是 T 的部集, 并且 $r = |V_1| = |V_2| = |V_3| = |V_4|$. 根据推论 2.1,

$\kappa(T) \geq \frac{4r-2-r}{3} = r - \frac{2}{3}$. 因此 $\kappa(T) \geq r = \alpha(T)$. 如定理 3.3 的证明，可以证明 T 是哈密尔顿的，并且 T 的每个顶点包含在 3- 圈和 4- 圈中.

下面这个例子表明定理 3.4 对几乎正则 3-PTs 不成立.

例 3.2[5] 令 $\mathcal{F}_2$ 是一个 3-PTs 族，其中部集为 $V_1 = V_1' \cup V_1''$, $V_2 = V_2' \cup V_2''$ 和 $V_3 = V_3' \cup V_3''$, 使得 $|V_1'| = 3p$, $|V_1''| = p$ 和 $|V_2'| = |V_2''| = |V_3'| = |V_3''| = 2p$. 令 $V_2' \cup V_3'$ 和 $V_2'' \cup V_3''$ 分别生成 p- 正则二部竞赛图 T_1 和 T_2, 使得 $T_2 \Rightarrow T_1$, $T_2 \to V_1'' \to T_1$ 和 $T_1 \to V_1' \to T_2$. $\mathcal{F}_2$ 中每个 3-PT 都是 $4p$- 正则的，但是 $S = V_1'$ 是分离集，并且 V_1'' 中的点不包含在 3- 圈中.

根据定理 3.3 和 3.4, 有如下推论.

推论 3.2[13] 如果 T 是 $c \geq 4$ 的正则 c-PT, 则 T 的每个点包含在 k 圈中，对 $3 \leq k \leq c$.

推论 3.3[6] 如果 T 是 $c \geq 7$ 的几乎正则 c-PT, 则 T 是哈密尔顿的.

注 3.1[6] 提出几乎正则 c-PTs ($c = 5, 6$) 的哈密尔顿性问题，定理 3.3 对这一问题给出了肯定地回答.

§4. 几乎正则c-PTs的点泛圈性

引理 4.1 令 T 是 $c \geq 5$ 的几乎正则 c-PT, $\kappa(T) \geq \alpha(T)$, w 是 T 中任意一个顶点，则 w 包含在 p 圈中，对 $3 \leq p \leq |V(T)| - 2\alpha(T) + 2$. 另外，如果 $|V(T)| - \alpha(T)$ 是偶数，则 w 包含在 p- 圈中，对 $3 \leq p \leq |V(T)| - \alpha(T) - \beta(T) + 2$.

引理 4.2 令 T 是 $c \geq 5$ 的几乎正则 c-PT, $\alpha(T) \geq 5$, 并且 w 是 T 中任意一个顶点，则 w 包含在 p- 圈中，对 $3 \leq p \leq |V(T)| - \alpha(T) - 1$.

引理 4.1 和 4.2 的证明类似于文 [3], 略去其证明.

定理 4.1 令 T 是 $c \geq 5$ 的几乎正则 c-PT, 部集为 $V_1, V_2, \cdots, V_c$. 如果 $|V_i| = r$ 对所有 $i = 1, 2, \cdots c$, 则 T 是点泛圈的.

证 根据定理 3.1, $\kappa(T) \geq \alpha(T)$. 如果 $r = 1$, 则推论 2.1 意味着 T 是强连通竞赛图. 根据定理 2.1, T 是点泛圈的. 如果 r 是偶数，或者 r 是奇数且 c 是奇数，则 T 是正则的，根据定理 2.4, T 是点泛圈的. 特别地，定理 4.1 对 $c = 5$ 成立.

如果 $r = 3$ 且 $c \geq 6$, 则根据引理 4.1, 每个顶点都包含在一个 p- 圈中，对 $3 \leq p \leq |V(T)| - 4$. 因此只要证明每个顶点都包含在 p- 圈中，对 $|V(T)| - 3 \leq p \leq |V(T)|$. 令 w 是 T 中任意一个点. 删除 T 的 $m \in \{0, 1, 2, 3\}$ 个顶点，使得 w 仍然包含在删除 m 个顶点后所得的 c-PT H. 则 $i_l(H) \leq m + 1$ 和 $g(H) = \frac{1}{2}(|V(T)| - m - 9 + 2) \geq \frac{1}{2}(6r - m - 7)$. 因为 $m \leq 3$, 所以 $i_l(H) \leq \min\{f(H), g(H)\}$. 因此根据定理 2.5, H 有哈密顿圈，这个圈对应于 T 中的 $(|V(T)| - m)$- 圈 C, 并且 $w \in V(C)$.

如果 $r \geq 5$ 和 $c \geq 6$, 引理 4.2 意味着 T 的每个顶点包含在一个 p- 圈中，对 $3 \leq p \leq |V(T)| - r - 1$. 因此只要证明 T 的每个顶点包含在一个 p- 圈中，对 $|V(T)| - r \leq p \leq |V(T)|$. 令 w 是 T 的任意一个顶点. 删除 T 的 m $(0 \leq m \leq r)$ 个顶点，使得所得到的 c-PT H 的部集 $V_i' \subseteq V_i$ $(i = 1, 2, \cdots, c)$ 满足条件 $||V_j'| - |V_i'|| \leq 1$ 对 $1 \leq i, j \leq c$ 和 $w \in V(H)$. 则 $i_l(H) \leq m + 1$, $g(H) \geq \frac{1}{2}(|V(T)| - m - 3r + 2) \geq \frac{1}{2}(6r - m - 3r + 2) = \frac{1}{2}(3r - m + 2)$ 和 $f(H) \geq |V(T)| - m - 3r + 1 \geq 3r - m + 1$. 因为 $m \leq r$, 所以 $i_l(H) \leq \min\{f(H), g(H)\}$. 因此根据定理 2.5, H 有哈密尔顿圈，这个圈对应于 T 中的 $(|V(T)| - m)$- 圈，并且 $w \in V(C)$.

定理 4.1 有如下推论，因此也推广了定理 2.4.

推论 4.1[5] 令 T 是 $c \geq 5$ 的 c-PT, $i_g(T) \leq 1$, 部集为 $V_1, V_2, \cdots, V_c$. 如果 $|V_i| = r$ 对所有 $i = 1, 2, \cdots, c$, 则 T 是点泛圈的.

类似地，可以证明如下定理.

定理 4.2 令 T 是 $c \geq 7$ 的几乎正则 c-PT, 部集 $V_1, V_2, \cdots, V_c$ 满足 $r = |V_1| \leq |V_2| \leq \cdots \leq |V_c| \leq r + 1$, 则 T 是点泛圈的.

推论 4.2[7] 如果 T 是几乎正则 c-PT ($c \geq 13$), 部集 $V_1, V_2, \cdots, V_c$ 满足 $|V_1| \leq |V_2| \leq \cdots \leq |V_c| \leq |V_1| - 1$, 则 T 是点泛圈的.

通过更详细地分析, 可以证明如下定理.

定理 4.3 如果 T 是 $c \geq 10$ 的几乎正则 c-PT, 则 T 是点泛圈的.

所有几乎正则 9-PTs 都是点泛圈的, 除了可能的例外情况: $1 = |V_1| \leq \cdots \leq |V_9| = 3$ 且 $|V(T)| = 14$.

所有几乎正则 8-PTs 都是点泛圈的, 除了可能的例外情况: $1 = |V_1| \leq \cdots \leq |V_8| = 3$ 且 $|V(T)| = 12$, 14 或 16, $2 = |V_1| \leq \cdots \leq |V_8| = 3$ 且 $|V(T)| = 19$ 或 23.

所有几乎正则 7-PTs 都是点泛圈的, 除了可能的例外情况: $1 = |V_1| \leq \cdots \leq |V_7| = 3$ 且 $|V(T)| = 10, 11, 12, 13, 14$ 或 16, $2 = |V_1| \leq \cdots \leq |V_7| = 3$ 且 $|V(T)| = 17, 18, 19, 20, 21, 22$ 或 23.

引理 4.3[5] 令 T 是 $c \geq 4$ 的 c-PT, p 是整数且满足 $p \geq (2i_g(T) - 1)(c - 1)$, $w \in V(T)$, 则有

(1) 如果 $p \geq |V(T)|\frac{2c-2}{3c-5} + \frac{8ci_g(T) - 6i_g(T) + 3c - 5}{3c-5}$, 则 T 中有包含 w 的 p- 圈;

(2) 给定任意整数 m, 存在常数 $N(m, c, i_g(t))$, 如果 $|V(T)| \geq N(m, c, i_g(T))$, 则对任意 $p \geq |V(T)|\frac{2c-2}{3c-5} - m$, T 有包含 w 的 p- 圈.

定理 4.4 除了有限多个几乎正则 MTs, 所有 $c \geq 5$ 的几乎正则 c-PTs 都是点泛圈的.

证 根据定理 4.3, 只需考虑情况 $c = 5, 6$. 令 $V_1, V_2, \cdots, V_6$ 是几乎正则 6-PT T 的部集, 使得

$$23 \leq r = |V_1| \leq |V_2| \leq \cdots \leq |V_6|.$$

根据引理 4.2, T 的每个顶点属于 p- 圈, 对 $3 \leq p \leq |V(T)| - r - 3$. 令 w 是 T 的任意一个顶点. 删除 T 中 m 个不同于 w 的顶点, 其中 $0 \leq m \leq r + 2$, 记所得到的 c-PT 为 H. 当 $0 \leq m \leq r - 2$, 有 $i_l(H) \leq r - 1 \leq \min\{f(H), g(H)\}$. 当 $r - 1 \leq m \leq r + 2$, 由于 $c = 6$ 和 $r \geq 23$, 有 $\alpha(H) \leq r - 2$. 因此

$$i_l(H) \leq r + 3 \leq \min\{f(H), g(H)\}.$$

因此根据定理 2.5, H 有哈密顿圈, 这对应于 T 中的 $(|V(T)| - m)$- 圈 C, 并且 $w \in V(C)$.

现在考虑情况 $c = 5$. 令 $V_1, V_2, \cdots, V_5$ 是几乎正则 5-PT T 的部集, 使得

$$5 \leq r = |V_1| \leq |V_2| \leq \cdots \leq |V_5|.$$

根据引理 4.2, T 的每个点都包含在 p- 圈中, 对 $3 \leq p \leq |V(T)| - r - 3$. 在引理 4.3 中可以选取 $m = 2$, 如果 $|V(T)|$ 足够大, 则 T 的每个顶点包含在 p- 圈中, 对 $|V(T)| \geq p \geq \frac{4}{5}|V(T)| - 2$. 由于 $|V(T)| \geq 5r$, 有

$$|V(T)| - r - 2 \geq \frac{4}{5}|V(T)| - 2,$$

因此当 $|V(T)|$ 足够大, T 的每个顶点包含在 p- 圈中, 对 $|V(T)| - r - 2 \leq p \leq |V(T)|$. 故几乎所有几乎正则 5-PTs 是点泛圈的.

致谢 衷心感谢周国飞博士和审稿人给予作者的意见和建议.

参 考 文 献

[1] Bondy, J. A. & Murty U. R. S., Graph theory with applications [M], the Macmillan Press, 1976.

[2] Volkmann, L., Cycles in multipartite tournaments: results and problems [R], submitted.

[3] Yeo, A., Diregular c-partite tournaments are vertex-pancyclic when $c \geq 5$ [J], *J. Graph Theory*, **32**(1999), 137–152.
[4] Yeo, A., Large diregular 4-partite tournaments are vertex-pancyclic [R], in preparation.
[5] Tewes, M., Volkmann L. & Yeo A., Almost all almost regular c-partite tournaments with $c \geq 5$ are vertex pancyclic [R], submitted.
[6] Zhou, G. F. & Zhang, K. M., Hamiltonian multipartite tournaments [J], *OR Transactions*, **3**:3(1999), 22–24.
[7] Zhou, G. F. & Zhang, K. M., Vertex pancyclic multipartite tournaments [R], submitted.
[8] Moon, J. W., On subtournaments of a tournament [J], *Canad. Math. Bull.*, **9**(1966), 297–301.
[9] Gutin, G., A note on cycles in multipartite tournaments [J], *J. Combin. Theory*, **B58**(1993), 319–321.
[10] Yeo, A., One-diregular subgraphs in semicomplete multipartite digraphs [J], *J. Graph Theory*, **24**(1997), 175–185.
[11] Yeo, A., How close to regular must a multipartite tournament be to secure Hamiltonicity? [J], to appear in *Graphs and Combinatorics*.
[12] Zhou, G. F., Tournaments of order $n \leq 9$ and their applications [D], Ph. D. thesis, Nanjing University, China (1991).
[13] Zhou, G. F., Yao, T. X. & Zhang, K. M., A note on cycles in regular multipartite tournaments [J], *J. Nanjing University, Math. Biquarterly*, **15**:1(1998), 73–75.

VERTEX PANCYCLICITY IN ALMOST REGULAR MULTIPARTITE TOURNAMENTS

PAN Linqiang* ZHANG Kemin**

*Department of Control Science and Engineering, Huazhong University of Science & Technology, Wuhan 430074, China. **E-mail:** lqpan@mail.hust.edu.cn
Department of Mathematics, Nanjing University, Nanjing 210093, China. **E-mail: zkmfl@nju.edu.cn

Abstract

Let T be a multipartite tournament and $i(T) = \max_{x,y \in V(T)} |d^+(x) - d^-(y)|$ (where $x = y$ is admissible). T is said to be regular if $i(T) = 0$ and to be almost regular if $i(T) \leq 1$. Volkmann conjectured in a survey paper that an almost regular c-partite tournament with $c \geq 4$ is pancyclic. In this paper, it is snown that all almost regular c-pattite tournaments with $c \geq 5$ are vertex pancyclic except for finite number of almost regular multipartite tournaments. The authors give an example to show that this conjecture does not hold when $c = 4$.

Keywords Multipartite tournaments, Almost regularity, Vertex pancyclicity
2000 MR Subject Classification 05C20, 05C38
Chinese Library Classification O157.5
Article ID 1000-8314(2002)05-0585-12

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol.23 No.4 2002
by ALLERTON PRESS, INC. NEW YORK, USA