第 25 卷 第 1 期 应用数学学报 Vol. 25 No. 1
2002 年 1 月 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA Jan., 2002

无向 de-Bruijn 图的超级边连通性和限制性边连通度

吕长虹
(湖南师范大学数学系，长沙 410081)
张克民
(南京大学数学系，南京 210093)

摘　要　super-λ 和限制性边连通度是两个比边连通度更能刻画网络可行性的参数. 本文证明了无向 de-Bruijn 图 $UB(d,n)$ 是 super-λ ($d\geq 2$, $n\geq 2$). 对 $n\geq 4$, 我们证明了 $UB(2,n)$ 的限制性边连通度为 4; $UB(2,3)$ 的限制性边连通度是 3. 对 $d\geq 3$, 我们指出 $UB(d,n)$ ($n\geq 3$) 的限制性边连通度 λ', 满足 $2d-2<\lambda'\leq 4d-4$.

关键词　de-Bruijn 图，超级边连通，限制性边连通度，可靠性

1　背景

多处理机系统的互连网络拓扑通常以 (有向或无向) 图为数学模型，网络拓扑的性能可以通过图的性质和参数来度量. 在设计和选择大规模多处理机通讯系统的网络拓扑时，我们要考虑的一个问题是系统的牢靠性能. 连通度和边连通度是考究系统牢靠性能最重要的两个参数. 然而这两个参数有两个缺陷：其一，这两个参数不能区别按不同方式移去 χ 个点 (或 λ 条边) 后所产生的不同的连通分支的情况. 这说明连通度或边连通度不能反映由于处理机或信关的损坏需造成的系统损坏程度. 其二，这两个参数都假定了系统的任何部分都可能损坏. 这两个参数在处理某些部分不会同时损坏的网络时不准确. 在此背影下，图的超级 (边) 连通性和限制性 (边) 连通度的概念被提出 [1,2]. 有关这方面的近期文献很多，可见 [3−6]. de Brujin 网络被认为是超立方网络 (hypercube) 的有力竞争者 [7,8]，它的拓扑性质已被广泛研究. 在 [3] 中，李乔等人证明了 $UB(2,n)$ 的限制性连通度为 3; T. Soneoka 在 [4] 中证明了有向 de Brujin 图是 super-λ. 本文指出无向 de Brujin 图 $UB(d,n)$ 也是 super-λ, 同是，我们还给出了 $UB(2,n)$ 的限制性边连通度.

2　定义和说明

对给定图 $G=(V,E)$, $V=V(G)$ 表示 G 的顶点集，$E=E(G)$ 表示边集. 定义 G 的连通度 $\chi=\min\,\{|S|: S\subset V$ 是分离集或 $|S|=|V|-1\}$; G 的边连通度 $\lambda=\min\,\{|S|: S$ 为 G 的边割集$\}$; $\delta(G)$ 表示 G 的最小度. 这些参数满足 $\chi(G)\leq\lambda(G)\geq\delta(G)$. 一个图

本文 1999 年 1 月 11 日收到. 2001 年 6 月 26 日收到修改稿.

称为最大连通的，如果 $\chi(G)=\delta(G)$; 一个图称为最大边连通的，如果 $\lambda(G)=\delta(G)$. 显然，一个最大连通图一定是最大边连通的. 但两个最大边连通图即使 λ 相同，它们的可靠性也不一定相同，因为它们的最小边割集数目不一定相同. 所以有必要寻找更精确的参数.

我们假定图 G 的顶点是不会损坏的，每条边损坏的概率相等为 ρ, 并且是统计独立的，则全部终端的可靠性定义为 G 连通的概率，记作 $\mathrm{Rel}\,(G;\rho)$. 用 m_i 表示阶数为 i 的边割集数目，则

$$\mathrm{Rel}\,(G;\rho)=1-\sum_{i=\lambda}^{|E|}m_i\rho^i(1-\rho)^{|E|-i}.$$

容易知道，当 ρ 足够小时， $m_{i1}\rho^{\lambda}(1-p)^{|E|-\lambda}$ 决定了 $\mathrm{Rel}\,(G;\rho)$ 的大小，所以我们希望网络设计使得"λ 尽可能大而且 m_λ 尽可能小". 为了刻画"m_λ 尽可能小", 人们提出了超级边连通度的概念 [1].

定义 1 一个最大边连通图 G 是 super-λ, 如果 G 中每个阶数为 λ 的边割集孤立顶点度为 δ 的顶点.

为了定量化地刻画图的 super-λ, Esfahanian, Hakimi 在 [2] 中提出了限制性边连通度的概念.

定义 2 设 $G=(V,E)$ 是一个图， S 是边集 E 的一个子集，如果 $G-S$ 不连通，并且 $G-S$ 不含孤立点，则 S 称为 G 的一个限制性边割集，图 G 的限制性边连通度定义为 G 的所有限制性边割集的最小阶数，记作 $\lambda'(G)$.

显然，如果 $\lambda'(G)>\delta(G)$, 则图 G 一定是 super-λ 的. 图的限制性连通度可类似定义.

有向 de Brujin 图 $B(d,n)$ 的定义如下：其顶点用长度为 n 的字符串 (称为地址) 表示， $V=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\}:x_1\in\{0,1,\cdots,d-1\},\ i=1,2,\cdots,n\}$, 从顶点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 到顶点 y 有边当且仅当 $y=(x_2,x_3,\cdots,x_n,t)$, 其中 $t\in\{0,1,\cdots,d-1\}$, $B(d,n)$ 去掉自环和边的定向及由此产生的重边所得到的简单图，称为无向 de Brujin 图 $UB(d,n)$.

下面是我们所要证明的两个主要结果:

定理 A 无向 de Brujin 图 $UB(d,n)$ $(n\geq 2)$ 是 super-λ.

定理 B 无向 de BrujinAM <$UB(2,n)$ 当 $n\geq 4$ 时的限制性边连通度是 4; 而 $UB(2,3)$ 的限制性边连通度是 3. 当 $d\geq 3$ 时， $UB(d,n)$ 的限制性边连通度 λ' 满足 $2d-2<\lambda'\leq 4d-4$.

3 一些概率和事实

事实 1[6] 对图 $G,\lambda'(G)\leq\min\limits_{uv\in E(G)}\{d(u)+d(v)-2\}$.

事实 2[9] $UB(d,n)$ $(n\geq 2)$ 是最大连通的，即 $\chi=\lambda=\delta=2d-2$.

事实 2[4] $B(d,n)$ $(n\geq 2)$ 是 super-λ, 这里 $\lambda=d-1$.

事实 4[3] $UB(2,n)$ $(n\geq 2)$ 的限制性连通度是 3.

下面我们定义一些新概念.

在 $UB(d,n)$ 中，对 $i=i_1,i_2,\cdots,i_n$, 顶点 j 称为 i 的右邻点，如果 $j=(x,i_1,i_2,\cdots,i_{n-1})$; 类似的， j 称为 i 的左邻点，如果 $j=(i_2,i_3,\cdots,i_n,x)$, 其中 $0\leq x\leq d-1$. $R(i)$ 和 $L(i)$ 分别表示顶点 i 的右邻点和左邻的集合 (注：当 $(i_1=i_2=\cdots=i_n$ 时，由定义，i 本身是 i 的右邻点也是 i 的左邻点，即 $i\in R(i)$ 而且 $i\in L(i)$). 令 $i=(i_1,i_2,\cdots,i_n)$ 和 $j=(j_1,j_2,\cdots,j_n)$ 是 $UB(d,n)$ 中任意两个点，则 $L(i)=\{(i_2,i_3,\cdots,i_n,x)\mid 0\leq x\leq d-1\}$ 和 $L(j)=\{(j_2,j_3,\cdots,j_n,x)\mid 0\leq x\leq d-1\}$. 如果 $i_k=j_k$ 对所有 $k\in\{2,3,\cdots,n\}$ 成

立，显然 $L(i)=L(j)=\{(i_2,i_3,\cdots,i_n,x)\mid 0\le x\le d-1\}$，即 $|L(i)\cap L(j)|=d$；否则，$|L(i)\cap L(j)|=0$. 对 $|R(i)\cap R(j)|$ 也类似成立. 我们定义 $T(i)=\{j|\,|L(i)\cap L(j)|=d\}$ 和 $T'(i)=\{j\mid |R(i)\cap R(j)|=d\}$. 令 $i=(i_1,i_2,\cdots,i_n)$，由 $L(i)$ 和 $T(i)$ 的定义，我们不难知道 $|L(i)|=d$ 和 $\{(y,i_2,\cdots,j_n)\mid 0\le y\le d-1\}\subset T(i)$，故不难有下面事实成立：

事实 5 $|R(i)|=|L(i)|=d$ 和 $|T(i)|=|T'(i)|=d$ 对所有的顶点 i 成立.

迹 $v_0v_1\cdots v_k$ 称为从 v_0 到 v_k 的 R 型 (L 型)，如果对每个 p，$1\le p\le k$，v_p 是 v_{p-1} 的右邻点 (左邻点). R 型 (L 型) 路类似定义.

4 定理的证明

定理 A 无向 de Bruijn 图 $UB(d,n)$ $(n\ge 2)$ 是 super-λ 的.

证 设 F 是 $UB(d,n)$ 中阶为 $\lambda=2d-2$ 的边割集，G_1 和 G_2 分别是 $G-F$ 的两个连通分支. $G_1/F(G_2/F)$ 表示 $G_1(G_2)$ 中与 F 关联的顶点集合. 不失一般性，我们假定 $|G_1/F|\le|G_2/F|\le|F|=2d-2$.

我们首先将证明如果 $|G_1/F|\ne 1$，则 $|G_1/F|\ge 2d-2$.

(1) 如果 $V(G_1)-G_1/F\ne\emptyset$，显然 $|G_1/F|\ge 2d-2$. 否则，G_1/F 就是一个阶小于 $2d-2$ 的分离集，与事实 2 矛盾.

(2) 如果 $V(G_1)-G_1/F=\emptyset$，令 $|V(G_1)|=x$，我们有

$$\frac{x(x-1)}{2}\ge|E(G_1)|\ge\frac{\delta x-(2d-2)}{2},$$

即

$$x(x-1)\ge(2d-2)(x-1).$$

因为 $|G_1/F|=x\ne 1$，所以 $x\ge 2d-2$.

从 (1) 和 (2) 知，

$$|G_2/F|\ge|G_1/F|\ge 2d-2,$$

因而

$$|G_2/F|=|G_1/F|=2d-2.$$

由 $|F|=2d-2$ 易知，F 是 G_1/F 与 G_2/F 的一个完全匹配.

令 uv 是 F 中一条边，并且 $u\in G_1/F$，$v\in G_2/F$. 不失一般性，我们假定 $v\in L(u)$，因为 F 是 G_1/F 与 G_2/F 的一个匹配，所以 $L(u)-\{v\}\subset V(G_1)$. 现在，我们来看看 $T(u)$ 中的点. 令 $u'\in T(u)-\{u\}$，如果 $u'\in V(G_1)$，则 $u'v$ 是 F 中一条边，也就是 v 与 F 中至少两条边关联，这与 F 是匹配矛盾. 故对任意 $u'\in T(u)-\{u\}$ 有 $u'\in V(G_1)$. 分两种情形考虑：

情形 1 $d\ge 3$.

由事实 5，u 至少有两个左邻点在 G_1 中，那么由 $T(u)$ 和 $L(u)$ 的定义，u' 与 F 中至少两条边关联，这与 F 是匹配矛盾.

情形 2 $d=2$.

不失一般性，我们假定 $u=(1,u_2,\cdots,u_n)$，$v=(u_2,u_3,\cdots,u_n,x)$，这里 $x=0$ 或者 1. 令 $v'=(u_2,u_3,\cdots,u_n,\bar{x})$ 是 u 的另一个左邻点，v' 一定在 $V(G_1)$ 中. $T(u)$ 中另一个点 $u'=(0,u_2,\cdots,u_n)$ 一定在 $V(G_2)$ 中，这时 $|F|=2$(见图 1).

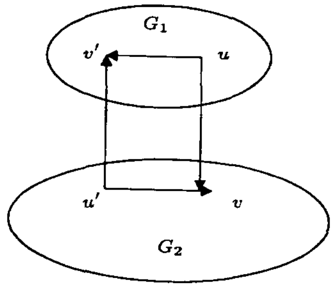

图 1

首先我们说明 $(1,1,\cdots,1)\in V(G_1)$ 和 $(0,0,\cdots,0)\in V(G_2)$, 考虑下列两条迹:

$$W_1:(1,1,\cdots,1)\longrightarrow(1,1,\cdots,1,u_2)\longrightarrow\cdots\longrightarrow(1,u_2,\cdots,u_n)=u,$$
$$W_2:(0,0,\cdots,0)\longrightarrow(0,0,\cdots,0,u_2)\longrightarrow\cdots\longrightarrow(0,u_2,\cdots,u_n)=u'.$$

如果 W_1 中有顶点在 $V(G_2)$ 中, W_1 一定经过边 $u'v'$ 或 vu, 因为 W_1 是一条 L 型迹. 又因为 W_1 中任何点的地址的第一个分量是 1, 而 u' 的地址的第一个分量是 0, 所以 W_1 不通过 $u'v'$, 因而 W_1 通过 uv, 因此 $u\in L(v)$, 所以 $(1,u_2,\cdots,u_n)=(u_3,u_4,\cdots,u_n,x,y)$. 注意到 W_1 通过 v, 所以 u_2-1, 由此推出 $u_2=u_3=\cdots=u_n=x=1$, 即 $u=v_0$, 矛盾! 所以 W_1 中每一个点都在 $V(G_1)$ 中, 当然有 $(1,1,\cdots,1)\in V(G_1)$, 考察 W_2 可类似证明 $(0,0,\cdots,0)\in V(G_2)$.

现在, 我们来考察 $(1,1,\cdots,1)$ 和 $(0,0,\cdots,0)$ 之间的两条路 P_1 和 P_2:

$$P_1:(1,1,\cdots,1)\longrightarrow(1,1,\cdots,1,0)\longrightarrow\cdots\longrightarrow(1,0,\cdots,0)\longrightarrow(0,\cdots,0),$$
$$P_2:(0,0,\cdots,0)\longrightarrow(0,0,\cdots,0,1)\longrightarrow\cdots\longrightarrow(0,1,1,\cdots,1)\longrightarrow(1,1,\cdots,1).$$

我们知道 P_1 是一条从 $(1,1,\cdots,1)$ 到 $(0,0,\cdots,0)$ 的 L 型路, P_2 是从 $(0,0,\cdots,0)$ 到 $(1,1,\cdots,1)$ 的 L 型路. 由前面的证明可知, $uv\in P_1$ 和 $u'v'\in P_2$. 因而,

$$(u_2,\cdots,u_n;x)=(\underbrace{1,\cdots,1}_{y},\underbrace{0,\cdots,0}_{n-y}),\tag{1}$$

$$(u_2,\cdots,u_n;\overline{x})=(\underbrace{0,\cdots,0}_{i},\underbrace{1,\cdots,1}_{n-t}).\tag{2}$$

从 (1) 式和 (2) 式知, $u_2=\cdots=u_n=1$ 或者 0.

不妨设 $u_2=\cdots=u_n=1$, 因而 $x=0$ 而且 $u=u'=(1,1,\cdots,1)$, 这是一个矛盾. 由上所述, 我们有 $|G_1/F|=1$. 不妨设 $G_1/F=x$, 如果 $V(G_1)\neq x$, 则 x 是一个分离集, 与连通度 $k=2$ 矛盾. 所以 $V(G_1)=x$ 而且 $d(x)=2$. 定理 A 证毕.

定理 B 当 $n\geq 4$ 时, $UB(2,n)$ 的限制性边连通度为 4; 而 $UB(2,3)$ 的限制性连通度为 3. 当 $d\geq 3$ 时, $UB(d,n)$ $(n\geq 3)$ 的限制性边连通度 λ' 满足 $2d-2<\lambda'\leq 4d-4$.

证 我们考虑 $n\geq 4$ 的情形. 设 F 是 $UB(2,n)$ 的限制性边割集, 并且 $|F|=3$. G_1 和 G_2 是 $G-F$ 的两个连通分支, 并且 $|V(G_2)|\geq|V(G_1)|\geq 2$. 假设 $uv\in F$, $u\in V(G_1)$ 和 $v\in V(G_2)$ 并且 $v\in L(u)$. 设 $v'\in L(u)-\{v\}$.

情形 1 $v'\in V(G_2)$.

这时 uv 和 uv' 都在 F 中, 设 F 中另一条边为 xy, $x\in V(G_2)$, $y\in V(G_1)$.

如果 $|V(G_1)-\{u,y)\}|\geq 2$, 这时 $\{x,y\}$ 是 $UB(2,n)$ 的一个限制性分离集，与事实 4 矛盾．所以 $|V(G_1)-\{u,y\}|\leq 1$.

(i) $V(G_1)=\{u,y\}$.

首先 $|E(G_1)|=\frac{d(u)+d(y)-3}{2}$. 注意到 $n\geq 3$ 时，在 $UB(2,n)$ 中度为 2 的点一定与度为 3 的点不相邻．因而任意两相邻点 u 和 y, 有 $d(u)+d(y)\geq 6$. 故 $|E(G_1)|\geq\frac{3}{2}$, 显然矛盾．

(ii) $V(G_1)=\{x,y,z\}$(见图 2)

同样我们有 $|E(G_1)|=\frac{d(u)+d(z)+d(y)-3}{2}$ 当 $n\geq 3$ 时，$V(G_1)$ 中至多有一个 2 度点，故 $|E(G_1)|\geq\frac{2+3+3-3}{2}\frac{5}{2}$, 所以 G_1 一定是完全图，故 $d(z)=2$, 但当 $n\geq 3$ 时，$d(z)+d(y)=6$, 即 $d(y)=4$, 故 y 一定与 G_2 中某两点相连，这与 $|F|=3$ 矛盾．

情形 2　$v'\in V(G)$.

设 $u'=T(u)-\{u\}$, 如果 $u'\in V(G_1)$, 则 vu 和 vu' 都属于 F, 即 $R(v)=\{u,u'\}$ 都在 $V(G_1)$ 中．这时，如同情形 1, 我们考虑 v 的情况即可得到矛盾．故我们不妨设定 $u'\in V(G_2)$, 并设 $F-\{uv,u'v'\}=xy$, $x=\in V(G_2)$, $y\in V(G_1)$, 并且 F 是 $\{u,v',y\}$ 与 $\{v,u',x\}$ 之间的一个完全匹配 (不然的话，可象情形 1 一样类似讨论). 我们进一步假设 $y\in L(x)$(见图 3).

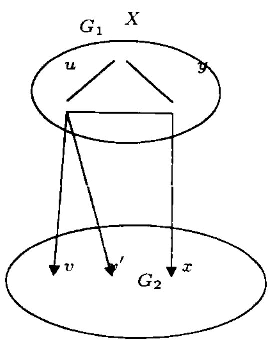

图 2

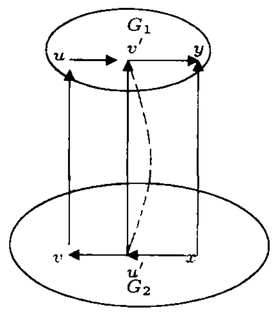

图 3

设 $y'=L(x)-\{y\}$ 和 $x'=T(x)-\{x\}$, 显然 $y'\in V(G_2)$ 和 $x'\in V(G_2)$, 这时 $x'y'\in F$ 而 $|F|=3$, 故我们不难得到 $v'=x'$ 和 $u'=y'$. 此时，$u'\in L(x)$, $\{v',x\}=T(x)$, $v'\in R(u')$.

我们不妨令 $v'=(1,0,1,0,\cdots,0,1)$ 和 $u'=(0,1,0,1,\cdots,1,0)$ (不妨设 n 为奇数). 这时

$$u=(1,1,0,1,1,0,\cdots,1,0),\qquad y=(0,1,0,1,\cdots,0,1,1),$$
$$v=(1,0,1,0,\cdots,1,0,0),\qquad x=(0,0,1,0,1,\cdots,0,1).$$

考虑迹 W_1 和 W_2,

$$W_1: u\longleftarrow(1,1,1,0,1,1,0,\cdots,1)\longleftarrow(1,1,1,1,0,1,\cdots,0)\longleftarrow\cdots\longleftarrow(1,1,\cdots,1),$$
$$W_2: x\longleftarrow(0,0,0,1,0,1,\cdots,0)\longleftarrow(0,0,0,0,1,0,\cdots,1)\longleftarrow\cdots\longleftarrow(0,0,\cdots,0).$$

因为 W_1 中任何点的地址的前两个分量均为 1, 而 v,u' 和 x 的地址的前两个分量不同为 1, 故不难发现 W_1 一定在 G_1 中．同理 W_2 一定在 G_2 中．因而我们有 $(1,1,\cdots,1)\in$

$V(G_1)$, $(0,0,\cdots,0)\in V(G_2)$. 再考虑从 $(1,1,\cdots,1)$ 到 $(0,0,\cdots,0)$ 的 L 型路 P.

$$P:(1,1,\cdots,1)\longrightarrow(1,1,\cdots,1,0)\longrightarrow\cdots\longrightarrow(1,0,\cdots,0)\longrightarrow(0,0,\cdots,0).$$

当 $n\geq 4$ 时, P 一定不经过 uv 和 $v'u'$ 这两条边. 这与 F 是分离集矛盾. 所以当 $n\geq 4$ 时, $UB(2,n)$ 的限制性边性通度 ≥ 4. 由事实 1, 我们不难知道 $UB(2,n)$ $(n\geq 3)$ 的限制性边性通度 ≤ 4, 故 $\lambda'\big(UB(2,n)\big)=4$ 对 $n\geq 4$.

注 当 $n=3$ 时, 上述路 P 是经过 $uv=\big((1,1,0),(1,0,0)\big)$ 的 (见图 4). 并且 $\{xy,u'v',uv\}$ 刚好是一个限制性边割集.

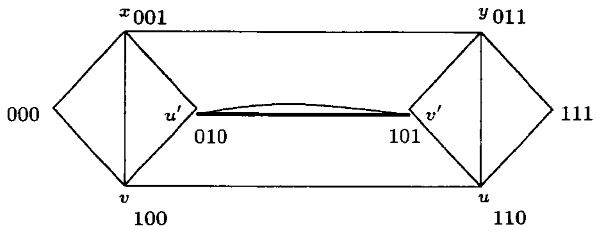

图 4

由定理 A 和事实 1, 当 $d\geq 3$ 时, 立即有 $2d-2<\lambda'\big(UB(d,n)\big)\leq 4d-4$. 证明完毕.

5 结束语

在 [3] 中, 李乔等人还讨论了限制性容错直径, 给出了一个很好的上界. 同样, 限制性边容错直径也是一个值得探讨的问题, 但用我们这里的证明方法是无能为力的. 对 $d\geq 3$ 时, $UB(d,n)$ 虽然是 super-λ, 但其限制性边连通度还不知道, 用我们本文的方法去探讨还有些距离, 可能还需要发掘 $UB(d,n)$ 其它一些性质.

参 考 文 献

1 Bauer D, Boesch, Suffel C, Tindell R. Combinatorial Optimization Problem in the Analysis and Design of Probabilistic Networks. *Networks*, 1985, 15: 257–271

2 Esfahanian A H, Hakimi S L. On Computing a Conditional Edge Connectivity of a Graph. *Inform. Process. Lettwr*, 1988, 27: 195–199

3 Li Q W, Zhang Y. Restricted Connectivity and Restricted Fault Diameter of some Interconnection Networks. In: Networks of Parallel Computation. *DIMACS Ser.*, 1995, 21: 267–274

4 Soneoka T. Super Edge-connectivity of Dense Digraph and Graphs. *Discrete Appl. Math.*, 1992, 37/38: 511–523

5 Li Q L, Li Q. Reliability Analysis of Circulant Graphs. *Networks*, 1988, 31: 61–65

6 李乔良. 网络容错性和可靠性的图论研究. 中国科技大学博士论文, 1997
(Li Q L. Graph Theoretical Studies on Fault-tolerance and Reliability of Networks. Ph. D Thesis, University of Science and Technology of China, 1997)

7 Bermond J C, Peyrat C. De Brujin and Kautz Networks: a Competitor for Hypercnbe? In: Hypercube and Distributed Computers. Proceeding of the First Enropean Workshop on Hypermbers, Rennes: Oct., 1989, 279–293

8 Bond J B, Peyrat C. Diameter Unlneyability of Some Large Interconnection Networks. *Congr Nummer*, 1988, 66: 267–282

9 Esfahanian A H, Hakimi S L. Fault-tolerant Rowting i nDeBruijn Communication Networks. *IEEE Trans. Comput.*, 1985, C-34: 777–788

SUPER CONNECTIVITY AND RESTRCTED CONNECTIVITY OF UNDIRECTED DE BRUIJN GRAPHS

LÜ CHANGHONG

(*Department of Mathematics, Hunan Normal University, Changsha* 410081)

ZHANG KEMIN

(*Department of Mathematics, Nanjing University, Nanjing* 210093)

Abstract super-λ and restrcted connectivity are more refined network reliability indexes than edge-connectivity. In this work, we proved:

(1) $UB(d,n)$ is super-λ ($d \geq 2$, $n \geq 2$);

(2) The restrcted connectivity of $UB(2,n)$ is 4 for $n \geq 4$, and it is 3 for $UB(2,3)$. When $d \geq 3$, $2d-2 < \lambda'(UB(d,n)) \leq 4d-4$.

Key words de Bruijn graph, super edge-connectivity, restrcted edge-conectivity, reliability