第12卷第2期　　徐州师范学院学报(自然科学版)　　Vol 12, No 2
1994年6月　　JOURNAL OF XUZHOU TEACHERS COLLEGE　　Jun, 1994

迹为零的本原(0,1)-矩阵的指数集

苗正科　　张克民
(数学系)　　(南京大学)

摘要　设 E_n 是 n 阶本原(0,1)-矩阵的本原指数集，ZTE_n 表示迹为零的 n 阶本原(0,1)-矩阵的指数集。当 $n\geqslant 4$ 时，$ZTE_n=E_n\backslash\{1\}$；$ZTE_1=ZTE_2=\varnothing$；$ZTE_3=\{2,4,5\}$。

关键词　本原矩阵，本原指数，伴随有向图

设 A 是一个定义在布尔代数上的 n 阶(0,1)-矩阵，如果存在某个自然数 k，使得 $A^k=J$，则称 A 为本原矩阵。使 $A^k=J$ 成立的最小自然数 k，记为 $\gamma(A)$，称为 A 的本原指数或简称指数。

一个(0,1)-矩阵 A 的伴随有向图是以 $V=\{1,2,\cdots,n\}$ 为顶点集，$E=\{(i,j)\mid a_{ij}=1\}$ 为弧集的有向图，记为 $D(A)$. 由 A 的本原性定义以及 $(A^k_{ij})=1$ 当且仅当 $D(A)$ 中有一条从顶点 i 到顶点 j 的长度为 k 的有向通道这一事实，我们可以定义一个有向图 D 是本原的当且仅当存在某自然数 k，使得对任意 $i,j\in V(D)$，D 中有一条从 i 到 j 的长度为 k 的有向通道，这样的最小自然数 k，记为 $\gamma(D)$，称为有向图 D 的本原指数或简称指数。由此可见，矩阵 A 本原当且仅当 $D(A)$ 本原，而且 $\gamma(A)=\gamma(D(A))$，从而对(0,1)-矩阵的本原性及其指数的研究可归结为对其伴随有向图的本原性及其指数的研究。

关于 n 阶本原(0,1)-矩阵的指数集 E_n，已经彻底解决[1~3]，以下我们把 E_n 作为已知集合来用。本文完全刻划了迹为零的 n 阶本原(0,1)-矩阵的指数集。

定义1　设 D 为本原有向图，其顶点集记为 $V(D)$。对 $i,j\in V(D)$，若存在整数 k，使得对任意整数 $m\geqslant k$，D 中有 i 到 j 的长为 m 的有向通道，则这种数 k 的最小者称为点 i 到点 j 的局部本原指数，记作 $\gamma(i,j)$.

显然有：$\gamma(D)=\max\limits_{i,j\in V(D)}\gamma(i,j)$.

定义2　设 $R=\{r_{i_1},r_{i_2},\cdots,r_{i_t}\}\subseteq L(D)=\{r_1,r_2,\cdots,r_s\}$，且 g.c.d$(r_{i_1},r_{i_2},\cdots,r_{i_t})=1$，$L(D)$ 为有向图 D 的圈长集。D 中点 i 到点 j 的相对于 R 的广义相对距离 $d_R(i,j)$ 是 D 中从 i 到 j 的接触 R 中所有圈长 $r_{i_1},r_{i_2},\cdots,r_{i_t}$(只要和一个长为 r 的圈有公共点就称接触了 r)的最短通道的长。

定义3　设 $a_1,a_2,\cdots,a_s$ 是一组两两不同的自然数，且 g.c.d$(a_1,a_2,\cdots,a_s)=1$，定义这组数的 Frobenius 数 $F(a_1,a_2,\cdots,a_s)$ 为整数 m，它使得所有整数 $k\geqslant m$ 均可表为 $a_1,a_2,\cdots,a_s$ 的非负整系数的线性组合 $k=\sum\limits_{i=1}^{s}x_ia_i$，$x_i\geqslant 0$，而 $m-1$ 却不能表成这种形式。

由[4]知这种 m 一定存在，且若 a_1,a_2 为互素的自然数，则 $F(a_1,a_2)=(a_1-1)(a_2-1)$.

定理A[5]　设 A 为 n 阶本原(0,1)-矩阵，s 为 $D(A)$ 的一个回路的长，则 $\gamma(A)\leqslant n+s(n-2)$.

本文于1993年5月29日收到。修改稿于1993年7月9日收到。

定理 B[6]　若 i, j 为本原有向图 D 中的任何两点，$R=\{r_{i_1}, r_{i_2}, \cdots, r_{i_t}\}\subseteq L(D)$，且 $\mathrm{g.c.d}(r_{i_1}, r_{i_2}, \cdots, r_{i_t})=1$，记 $F_R=F(r_{i_1}, r_{i_2}, \cdots, r_{i_t})$，则 $\gamma(i,j)\leqslant d_R(i,j)+F_R$.

由定理 B 立即可以推出

推论　$\gamma(D)\leqslant\max\limits_{i,j\in V(D)} d_R(i,j)+F_R$.

定理 C[7]　迹为零的 n 阶对称本原(0,1)-矩阵的指数集为 $\{2,3,\cdots,2n-4\}\backslash y$，其中 y 为 $[n-2,2n-5]$ 中的奇数所成的集合。

如果用 ZTE_n 表示迹为零的 n 阶(0,1)-矩阵的本原指数集，则有如下结论：

定理　$ZTE_1=ZTE_2=\varnothing$; $ZTE_3=\{2,4,5\}$; $ZTE_n=E_n\backslash\{1\}$ $(n\geqslant4)$.

为了证明上述定理，我们先证明两个引理。

引理 1　当 $n\geqslant6$ 时，$\{9,11,\cdots,2n-3\}\subseteq ZTE_n$.

证　考察图 1，$L(D)=\{2,3,k\}$ $(k\geqslant3)$. 取 $R=\{2,3\}$，对任意 $i,j\in V(D)$，考虑 i 到 j 的经过点 $k+2$ 的有向通道，知 $d_R(i,j)\leqslant2k+1$，从而由定义 3 及推论得 $\gamma(D)\leqslant2k+3$.

另外，若 $\gamma(D)=2k+2$，则在 D 中点 1 到点 $k-1$ 必有长为 $2k+2$ 的有向通道，从而存在非负整数 k_1,k_2,k_3，使 $2k+2=k-2+k+3k_1+2k_2+kk_3$，即 $3k_1+2k_2+kk_3=4$. 当 $k\neq4$ 时这是不可能的，因为 $k_2\neq0$ 蕴含 $k_1\neq0$. 故 $\gamma(D)=2k+3$，从而 $\{9,13,15,\cdots,2n-3\}\subseteq ZTE_n$.

再考察图 2 知，当 $n\geqslant5$ 时，其指数为 11，从而 $11\in ZTE_n$. 引理得证。

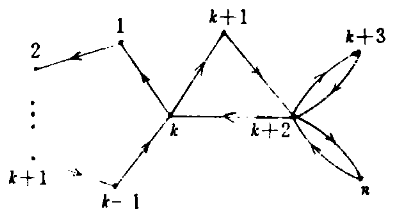

图 1　D

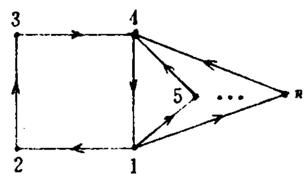

图 2

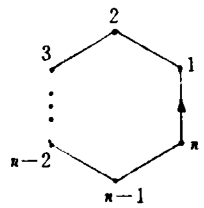

图 3　D_1

引理 2　存在指数为 $2n-2$ 的迹为零的 n 阶本原矩阵，其中 $n\geqslant5$.

证　当 n 为奇数时，考虑图 3，其中未标方向的弧均为双向弧。取 $R=L(D_1)=\{2,n\}$，则 $d_R(i,j)\leqslant d_R(1,n)=n-1$，由定义 2 与推论知 $\gamma(D_1)\leqslant n-1+F(2,n)=2n-2$. 又 D_1 中没有从 1 到 n 的长为 $2n-3$ 的通道，否则必存在非负整数 k_1,k_2，使得 $2n-3=n-1+2k_1+nk_2$. 当 $k_2=0$ 时，$2k_1=n-2$，从而 $2|n$，与 n 为奇数矛盾；当 $k_2\geqslant1$ 时，等式不可能成立，所以 $\gamma(D_1)=2n-2$.

当 n 为偶数时，考虑图 4，取 $R=\{2,3\}$. 对任意 $i,j\in V(D_2)$，$d_R(i,j)\leqslant d_R(1,n-3)=2n-4$. 由定义 2 及推论知，$\gamma(D_2)\leqslant2n-4+F(2,3)=2n-2$. 若 $\gamma(D_2)\neq2n-2$，则必有点 1 到点 $n-3$ 的长为 $2n-3$ 的通道，从而存在非负整数 k_1,k_2,k_3，使得 $2n-3=n-4+2k_1+3k_2+nk_3$，即 $2k_1+3k_2+nk_3=n+1$. 当 $k_3=0$ 时，必有 $k_2=0$，这时 $2k_1=n+1$，这与 n 为偶数矛盾；当 $k_3=1$ 时，$2k_1+3k_2=1$，这不可能；当 $k_3\geqslant2$ 时，则由 $n\geqslant5$ 知等式亦不可能成立。故 $\gamma(D_2)=2n-2$.

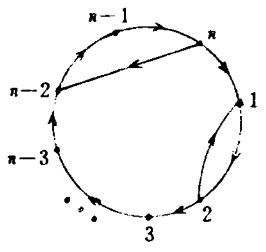

图 4　D_2

至此，证明了引理 2。

定理的证明 显然 $ZTE_1=ZTE_2=\varnothing$. 当 $n=3$ 时,没有环的本原图只有三张[8](图5),其指数分别为5,4,2. 所以 $ZTE_3=\{2,4,5\}$.

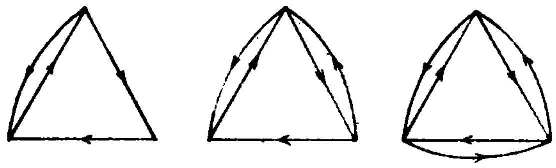

图5 三个顶点的无环本原图

由定理A知,若 B 为迹不为零的本原矩阵,则 $\gamma(B)\leqslant 2n-2$,从而当 $k\in E_n$,且 $k\geqslant 2n-1$ 时,有 $k\in ZTE_n$,显然 $1\notin ZTE_n$. 故只须考虑集合 $\{2,3,\cdots,2n-2\}$ 中的数是否属于 ZTE_n 即可。

由引理1,当 $n\geqslant 6$ 时,$\{9,11,\cdots,2n-3\}\subseteq ZTE_n$.

由引理2,当 $n\geqslant 5$ 时,$2n-2\in ZTE_n$.

由定理C,当 $n\geqslant 4$ 时,$\{2,3,\cdots,2n-4\}\backslash y\subseteq ZTE_n$,其中 y 为 $[n-2,2n-5]$ 中的奇数所成的集合。

于是,当 $n\geqslant 6$ 时,

$$\{9,11,\cdots,2n-3\}\cup\{2n-2\}\cup\{2,3,\cdots,2n-4\}\backslash y\subseteq ZTE_n.$$

其中 y 为 $[n-2,2n-5]$ 中的奇数所成的集合。而

$$\{2\times 5-2\}\cup\{2,3,\cdots,2\times 5-4\}\backslash y\subseteq ZTE_5.$$

其中 y 为 $[5-2,2\times 5-5]$ 中的奇数所成的集合。

$$\{2,3,\cdots,2\times 4-4\}\backslash y\subseteq ZTE_4.$$

其中 y 为 $[4-2,2\times 4-5]$ 中的奇数所成的集合。

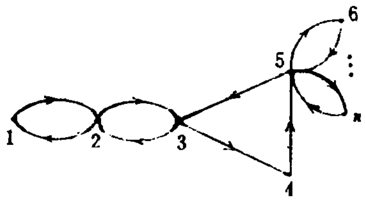

图6

从而,当 $n\geqslant 6$ 时,

$$\{2,3,\cdots,2n-2\}\backslash y_1\subseteq ZTE_n.$$

其中 y_1 为 $[n-2,7]$ 中的奇数所成的集合。而

$$\{2,4,6,8\}\subseteq ZTE_5,\quad \{2,4\}\subseteq ZTE_4.$$

由于当 $n\geqslant 10$ 时,$[n-2,7]=\varnothing$,所以

$$\{2,3,\cdots,2n-2\}\subseteq ZTE_n;$$

当 $n=6,7,8,9$ 时,具体计算出 y_1 得

$$\{2,3,4,5,6,8,9,\cdots,16\}\subseteq ZTE_9;$$
$$\{2,3,4,5,6,8,9,\cdots,14\}\subseteq ZTE_8;$$
$$\{2,3,4,6,8,9,10,11,12\}\subseteq ZTE_7;$$
$$\{2,3,4,6,8,9,10\}\subseteq ZTE_6;$$

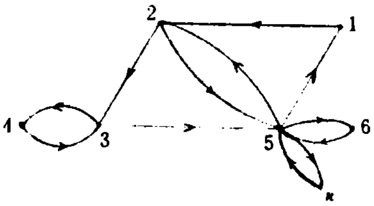

图7

当 $n=6,7,8,9$ 时,考察图6,其指数为7,从而 $7\in ZTE_n(n=6,7,8,9)$.

当 $n=6,7$ 时,考察图7,其本原指数为5,从而 $5\in ZTE_n(n=6,7)$.

当 $n=5$ 时,考虑矩阵 A_1,A_2,A_3,

$$A_1=\begin{bmatrix}0&1&0&0&1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&1&0\\1&1&1&0&1\\1&0&0&1&0\end{bmatrix},A_2=\begin{bmatrix}0&1&0&0&1\\0&0&1&1&0\\1&0&0&0&0\\1&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\end{bmatrix},A_3=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\1&0&0&1&1\\0&1&0&0&1\\1&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

容易计算

$$A_1^2=\begin{bmatrix}1&0&1&1&0\\1&1&1&1&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&0&1\end{bmatrix},A_2^4=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&0&1\end{bmatrix},A_3^6=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&0&0\end{bmatrix}.$$

而 $A_1^3=J,A_2^5=J,A_3^7=J$，其中矩阵乘法按二元布尔代数进行运算，J 为全“1”矩阵。由定义知，$\gamma(A_1)=3,\gamma(A_2)=5,\gamma(A_3)=7$，故有 $3,5,7\in ZTE_5$.

当 $n=4$ 时，考虑矩阵 A_4,A_5,A_6，

$$A_4=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix},A_5=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix},A_6=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}.$$

类似于 A_1，经计算知，$\gamma(A_4)=3,\gamma(A_5)=5,\gamma(A_6)=6$，故 $3,5,6\in ZTE_4$.

综上所述，当 $n\geqslant4$ 时，$\{2,3,\cdots,2n-2\}\subseteq ZTE_n$，故 $ZTE_n=E_n\backslash\{1\}$. 定理得证。

参　考　文　献

1 Lewin M, Vitek Y. A system of gaps in the exponent set of primitive matrices, Illinois J Math, 1981, 25(1): 87～98.

2 Shao Jiayu. On a conjecture about the exponent set of primitive matrices, Linear Algebra and Applications, 1985, 65: 91～123.

3 Zhang Kemin. On Lewin and Vitek's conjecture about exponent set of primitive matrices, Linear Algebra and Applications, 1987, 96: 101～108.

4 Kemeny J G, Snell J L. Finite Markov Chains. Van Nostrand, Princeton, 1960.

5 Dulmage A L, Mendelsohn N S. Graphs and matrices, Graph Theory and Theoretical Physics, Academic Press, 1967: 167～277.

6 Shao Jiayu. The exponent set of symmetric primitive matrices, Sci Sinica(A), 1986, (9): 931～939.

7 Liu Bolian, Mckay B D, Wormald N et al. The exponent set of symmetric primitive (0,1)-matrices with zero trace, Linear Algebra and Applications, 1990, 133: 121～131.

8 Harary F. Graph Theory, Addison-Wesley, Reading Mass, 1969: 200.

THE EXPONENT SET OF PRIMITIVE (0,1)-MATRICES WITH ZERO TRACE

Miao Zhengke, Zhang Kemin

Abstract　Let E_n be the exponent set of n×n primitive (0,1)-matrices. ZTE_n denotes the exponent set of n×n primitive (0,1)-matrices with zero trace. In this paper, It is proved that $ZTE_n=E_n\backslash\{1\}$ for $n\geqslant4$; $ZTE_n=\varnothing$ for $n=1,2$; $ZTE_3=\{5,4,2\}$.

Key words　Primitive matrices, Primitive exponent, Associated digraph