第10卷A辑第2期　　高校应用数学学报　　Vol. 10 Ser. A No. 2
1995年6月　Applied Mathematics—A Journal of Chinese Universities　June 1995

二部竞赛图中的 AD 路与 AD 回路*

王建中　　张克民　　李桂荣
（华北工学院）（南京大学）（华北工学院）

摘　要

本文证明了：若对二部竞赛图 T 的每一顶点 v，总有 $\min\{d_T^+(v),d_T^-(v)\}\geqslant k\geqslant 3$，则 T 中存在长度至少为 $4k$ 的 AD 路或 AD 回路，除非 T 同构于一类例外图之一. 作为推论，我们得到：正则二部竞赛图 T 含有 ADH 回路，除非 T 属于一类例外图.

关键词　二部竞赛图，AD 路，AD 回路.
分类号　(1991MR)05C20.

§1　引言

$T=T(X,Y,E)$ 表示一个二部竞赛图，其中 (X,Y) 是 T 的顶点集 V 的二部划分. 设 v 是 V 中任一顶点，A 和 B 是 V 中两个不相交的点集. 我们定义：

$$A\Rightarrow B=\{ab\in E\,|\,\forall\, a\in A,\forall\, b\in B\};$$
$$N_B^-(v)=\{u\in B\,|\,uv\in E\},\quad d_B^-(v)=|N_B^-(v)|;$$
$$N_B^+(v)=\{u\in B\,|\,vu\in E\},\quad d_B^+(v)=|N_B^+(v)|.$$

若 $B=\{v_0,v_1,\cdots,v_k\}$ 是 V 的一个标号子集，则记：

$$N_B^{-1}(v)=\{v_i\in B\,|\,v_{i-1}\in N_B^+(v)\};$$
$$N_B^{+1}(v)=\{v_i\in B\,|\,v_{i+1}\in N_B^+(v)\}.$$

对整数 $k_i\geqslant 1,i=1,2,3,4$，定义一类二部竞赛图 $R(k_1,k_2,k_3,k_4)$ 如下：其点集可划分为四个独立集 $K_i(i=1,2,3,4)$ 使得 $|K_i|=k_i$，并且 $K_1\Rightarrow K_2\Rightarrow K_3\Rightarrow K_4\Rightarrow K_1$. 如果 T 中存在

* 本文 1990 年 10 月 7 日收到. 1995 年 1 月 4 日收到修改稿.
国家和山西省自然科学基金资助项目.

$V' \subseteq V, E' \subseteq E$ 使得 $V' = \{v_0, v_1, \cdots, v_k\}, E' = \{v_i v_{i+1} | i$ 为偶数$\} \cup \{v_{i+1} v_i | i$ 为奇数$\}$,则称子图 $T' = (V', E')$ 是 T 中的一条长度为 k 的 AD 路,记为 P_k. 若 k 为奇数,则称子图 $P_k \cup \{v_0 v_k\}$ 是 T 中的一条长度为 $k+1$ 的 AD 回路,记为 C_{k+1},特别 $P_{|V|-1}$ 和 $C_{|V|}$ 分别称为 T 中的 ADH 路和 ADH 回路,文中其它未定义的概念与记号均同[1]中相一致.

Grunbaum[2] 首先引进了有向图中 AD 路与 AD 回路的概念,并证明了除三张例外图外,每一个竞赛图含有 ADH 路. Rosenfeld[3] 和 Petrovic Vojislav[4] 证明了每一个 $2n \geqslant 16$ 阶竞赛图含有 ADH 回路. 迄今为止,对二部竞赛图中的 AD 路与 AD 回路问题的研究,已知结果甚少. 一般来说,一个非正则二部竞赛图不一定存在 ADH 路. 因此研究其最长 AD 路和最长 AD 回路是一个极为自然的问题. 本文证明了如下结果.

定理 设 T 是一个二部竞赛图. 若对 T 中任一顶点 v,总有 $\min\{d_T^+(v), d_T^-(v)\} \geqslant k \geqslant 3$,则 T 中存在长度至少为 $4k$ 的 AD 路或 AD 回路,除非 T 同构于 $R(k_1, k_2, k_3, k_4)$,其中 $k \leqslant k_1, k_3 \leqslant 2k-1; k \leqslant k_2, k_4$.

推论 1 设 T 是一个二部竞赛图,若对 T 中任一点 v,总有 $\min\{d_T^+(v), d_T^-(v)\} \geqslant k \geqslant 3$,则 T 中存在长度至少为 $4k$ 的 AD 路. 除非 T 是 k 正则的或 $T \cong R(k_1, 2k, k_3, 2k), k \leqslant k_1, k_3 \leqslant 2k$.

推论 2[5] 每一个 k 正则二部竞赛图 T 含有 ADH 回路,除非 $T \cong R(k,k,k,k), k > 1$.

§2 定理的证明

设 $T = (X, Y; E)$ 是满足定理条件的一个二部竞赛图. 则 $|X| \geqslant 2k, |Y| \geqslant 2k$. 设 $P_n = v_0 \to v_1 \leftarrow v_2 \to \cdots v_n$ 是 T 中的一条最长 AD 路. 显然 $n \geqslant 2k-1$. 不失一般性设 $v_0 \in X$, $B_1 = X \setminus \{v_0, v_2, \cdots\}, B_2 = Y \setminus \{v_1, v_3, \cdots\}$.

引理 1 若 n 为奇数,则 $N_T^+(v_0) \cup N_T^-(v_n) \subset V(P_n)$;若 n 为偶数,则 $N_T^+(v_0) \cup N_T^+(v_n) \subset V(P_n)$.

引理 2 若 V 中子集 $A_i, i = 1,2,3,4$ 满足下列条件:

i) $|A_i| \geqslant r, i = 1,2,3,4$;

ii) $A_i \cap A_j = \varnothing \Leftrightarrow i \neq j$;

iii) $A_1 \Rightarrow A_2$, $A_3 \Rightarrow A_4$;

iv) 存在 $a_i \in A_i, i = 1,2,3,4$ 使得 $a_3 a_2$ 或 $a_1 a_4 \in E$,则 T 中存在长度至少为 $4r-1$ 的 AD 路.

引理 3 若 $T \ncong R(k_1, k_2, k_3, k_4)$,则 $n \geqslant 4k-1$.

证明 假设 $n < 4k-1$,分两种情形讨论.

情形 1　n 为奇数，此时 $n \leqslant 4k-3$，由引理 1 得 $d^+_{P_n}(v_0)+d^-_{P_n}(v_n) \geqslant 2k$，且 $N^{+1}_{P_n}(v_0) \cap N^-_{P_n}(v_n) \neq \varnothing$. 令 $v_{i-1} \in N^{+1}_{P_n}(v_0) \cap N^-_{P_n}(v_n)$，则 T 含有 $C_{n+1}=v_0 \to v_i \leftarrow v_{i+1} \to \cdots \to v_n \leftarrow v_{i-1} \to v_{i-2} \leftarrow \cdots \leftarrow v_0$，由于 $n \leqslant 4n-3$，故 $k \leqslant |\{v_0,v_2,\cdots,v_{n-1}\}| = |\{v_1,v_3,\cdots,v_n\}| \leqslant 2k-1$. 从而 $B_1 \neq \varnothing, B_2 \neq \varnothing$. 此外注意到 C_{n+1} 和 P_n 的最长性，于是有

$\{v_1,v_3,\cdots,v_n\} \Rightarrow B_1, B_2 \Rightarrow \{v_0,v_2,\cdots,v_{n-1}\}$. 设 $b_i \in B_i, i=1,2$，考虑 $N^+_T(b_1)$ 和 $N^-_T(b_2)$，我们有 $k \leqslant |B_i| (i=1,2)$，再由 P_n 的最长性及引理 2 便得：

$$B_1 \Rightarrow B_2,\ \{v_0,v_2,\cdots,v_{n-1}\} \Rightarrow \{v_1,v_3,\cdots,v_n\}.$$

显然，$\min\{|B_1|,|B_2|\} \leqslant 2k-1$. 否则 T 中存在比 P_n 更长的 AD 路，故 $T \cong R(k_1,k_2,k_3,k_4)$，其中 $k \leqslant k_1,k_3 \leqslant 2k-1, k_2,k_4 \geqslant k$. 矛盾.

情形 2　n 为偶数，此时 $n \leqslant 4k-2$，由引理 1，$d^+_{P_n}(v_0)+d^+_{P_n}(v_n) \geqslant 2k$，又类似于情形 1 的证明，存在 $v_{s-1} \in N^{+1}_{P_n}(v_0) \cap N^+_{P_n}(v_n)$，于是 T 含有 $C_n = v_0 \to v_s \leftarrow v_{s+1} \to \cdots \leftarrow v_n \to v_{s-2} \leftarrow v_{s-3} \to \cdots \leftarrow v_0$ 且 $v_{s-1} \notin C_n$. 由 $n \leqslant 4k-2$ 和 $|Y| \geqslant 2k$ 得，$B_2 \neq \varnothing$. 取 $b_2 \in B_2$，由于对任意的 $v_i \in N^{+1}_{P_n}(v_0)$，

$$v_i \to v_{i-1} \leftarrow \cdots \leftarrow v_0 \to v_{i+1} \leftarrow v_{i+2} \to \cdots \leftarrow v_n$$

是 T 中的一条最长 AD 路，从而由引理 1 便得，$b_2 \Rightarrow N^{+1}_{P_n}(v_0) \cup \{v_n\}$. 于是

$$\begin{aligned} d^-_{P_n}(b_2) &\leqslant \left(\frac{n}{2}+1\right) - |N^{+1}_{P_n}(v_0) \cup \{v_n\}| \\ &\leqslant \left(\frac{n}{2}+1\right) - (k+1) \leqslant k-1. \end{aligned}$$

因此，由度条件知，存在 $b_1 \in B_1$ 使 $b_1b_2 \in E$. 另一方面，由于 $v_{s-1} \in N^{+1}_{P_n}(v_0)$，故 $b_2v_{s-1} \in E$. 如果存在 $v_j \in \{v_0,v_2,\cdots,v_n\} \backslash \{v_{s-1}\}$ 使得 $v_jb_2 \in E$，则 $(C_n \backslash \{v_jv_{j+1}\}) \cup \{b_1,b_2,v_jb_2\}$ 是 T 中长为 $n+1$ 的 AD 路，矛盾. 故 $B_2 \Rightarrow \{v_0,v_2,\cdots,v_n\}$. 令 $A=\bigcup_{i=1}^{\frac{n}{2}} N^-_{B_1}(v_{2i-1})$，$B=B_1 \backslash A$，则 $\{v_1,v_3,\cdots,v_{n-1}\} \Rightarrow B$. 若 $A \neq \varnothing$，则 $B_2 \Rightarrow A$. 不然设 $a \in A, b'_2 \in B_2$ 且 $ab'_2 \in E$，由 A 的定义知，存在 $v_j \in \{v_1,v_3,\cdots,v_{n-1}\}$ 使得 $av_j \in E$，于是 $C_n \cup \{av_j,ab'_2\}$ 中含有一条长为 $n+1$ 的 AD 路，矛盾. 考察顶点 $b_2 \in B_2$，注意到 $N^-_T(b_2) \subseteq B$ 和 $d^-_T(b_2) \geqslant k$ 知 $|B| \geqslant k$. 类似可证 $|B_2| \geqslant k$. 此外易见，

$$k \leqslant |\{v_0,v_2,\cdots,v_n\} \cup A| \leqslant |\{v_1,v_3,\cdots,v_{n-1}\}| \leqslant \frac{n}{2} \leqslant 2k-1.$$

于是，由 P_n 的最长性及引理 2 得

$$B \Rightarrow B_2,\quad A \cup \{v_0,v_2,\cdots,v_n\} \Rightarrow \{v_1,v_3,\cdots,v_{n-1}\}.$$

最后 $|B_2| \leqslant \frac{n}{2} \leqslant 2k-1$，否则可在 B_2 和 $A \cup \{v_0,v_2,\cdots,v_n\}$ 之间找到一条比 P_n 更长的 AD 路而矛盾.

由上面的讨论知 $T \cong R(k_1,k_2,k_3,k_4)$，其中 $k \leqslant k_1,k_3 \leqslant 2k-1; k \leqslant k_2,k_4$. 这个矛盾即证明了引理 3.

下面假定 $T \ncong R(k_1,k_2,k_3,k_4)$，$k \leqslant k_1,k_3 \leqslant 2k-1$ 且 $k \leqslant k_2,k_4$. 假设定理结论不成立，则由引理 3，$P_n = P_{4k-1} = v_0 \to v_1 \leftarrow \cdots \to v_{4k-1}$，首先易证 P_n 具有下列性质.

性质 1 $N_{P_n}^{+1}(v_0) \cap N_{P_n}^{-}(v_{4k-1}) = \varnothing$.

性质 2 $v_i v_0 \in E$ 当且仅当 $v_{i-1}v_{4k-1} \in E$.

性质 3 若 $v_i \in N_{P_n}^{+}(v_0)$, $v_j \in N_{P_n}^{-}(v_{4k-1})$，则当 $i > j$ 时，$v_{j+1}v_{i+1} \in E$；当 $i < j$ 时，$v_{j+1}v_{i-1} \in E$.

性质 4 若存在 i, $1 \leqslant i < 4k-1$，使得 $\{v_0\} \Rightarrow \{v_i, v_{i+2}\}$，则 $\{v_0\} \Rightarrow \{v_1, v_3, \cdots, v_{i+2}\}$.

性质 5 若存在 j, $0 < j < 4k-1$，使得 $\{v_j, v_{j+2}\} \Rightarrow \{v_{4k-1}\}$，则 $\{v_j, v_{j+2}, \cdots, v_{4k-2}\} \Rightarrow \{v_{4k-1}\}$.

性质 6 $d_{P_n}^{-}(v_0) = d_{P_n}^{+}(v_0) = d_{P_n}^{-}(v_{4k-1}) = d_{P_n}^{+}(v_{4k-1}) = k$.

由性质 1—6，我们只需考虑下列三种情形：

a) $N_{P_n}^{+}(v_0) = \{v_1, v_3, \cdots, v_{2k-1}\}$,

$N_{P_n}^{+}(v_{4k-1}) = \{v_0, v_2, \cdots, v_{2k-2}\}$,

b) $N_{P_n}^{+}(v_0) = \{v_1, v_5, \cdots, v_{4k-3}\}$,

$N_{P_n}^{+}(v_{4k-1}) = \{v_0, v_4, \cdots, v_{4k-4}\}$,

c) $N_{P_n}^{+}(v_0) = \{v_1, v_3, \cdots, v_s, v_{s+4}, \cdots, v_{4k-s-2}\}$,

$N_{P_n}^{+}(v_{4k-1}) = \{v_0, v_2, \cdots, v_{s-1}, v_{s-3}, \cdots, v_{4k-s-3}\}$,

这里 $3 \leqslant s \leqslant 2k-3$.

若 a) 成立，考虑 T 中如下最长 AD 路，

$$P_{4k-1}(i,j) = v_{2i} \to v_{2i-1} \leftarrow \cdots \leftarrow v_0 \to v_{2i+1} \leftarrow v_{2i+2} \to \cdots \leftarrow v_{2j} \to v_{4k-2} \to \cdots \to v_{2j+1}.$$

这里 $i = 0, 1, \cdots, k-1$; $j = k, k+1, \cdots, 2k-1$.

容易证明 $P_{4k-1}(i,j)$ 也满足性质 1—6. 因此有，

$$\{v_{2k+1}, v_{2k+3}, \cdots, v_{4k-1}\} \Rightarrow \{v_0, v_2, \cdots, v_{2k-2}\} \cup B_1,$$
$$B_2 \Rightarrow \{v_0, v_2, \cdots, v_{2k-2}\} \Rightarrow \{v_1, v_3, \cdots, v_{2k-1}\},$$
$$\{v_{2k}, v_{2k+2}, \cdots, v_{4k-2}\} \Rightarrow \{v_{2k+1}, v_{2k+3}, \cdots, v_{4k-1}\}.$$

注意到 $v_{2k}v_{2k-1} \in E$，故有 $d_{P_n}^{-}(v_{2k}) \leqslant k-1$, $d_{P_n}^{+}(v_{2k-1}) \leqslant k-1$，从而由定理假设 $B_1 \neq \varnothing$, $B_2 \neq \varnothing$，令

$$B_1' = \bigcup_{i=1}^{k-1} N_{B_1}^{-}(v_{2i-1}), \qquad B_1'' = B_1 \backslash B_1';$$
$$B_2' = \bigcup_{j=k}^{2k-2} N_{B_2}^{+}(v_{2j+2}), \qquad B_2'' = B_2 \backslash B_2'.$$

任取 $b_1' \in B_1'$，由定义知存在某个 i, $1 \leqslant i \leqslant k-1$，使得 $b_1' v_{2i-1} \in E$，考虑 T 中如下最长 AD 路，

$$b_1' \to v_{2i-1} \leftarrow v_{2i-2} \to \cdots \leftarrow v_0 \to v_{2i+2} \to \cdots \leftarrow v_{2j} \to v_{4k-1} \leftarrow v_{4k-2} \to \cdots \to v_{2j+1}.$$

这里 $j = k, k+1, \cdots, 2k-1$. 由性质 1—6 及定理假设得.

$$B_2 \cup \{v_{2k+1}, v_{2k+3}, \cdots, v_{4k-1}\} \Rightarrow \{b_1'\} \Rightarrow \{v_1, v_3, \cdots, v_{2k-1}\},$$

由 b_1' 的任意性便得.

$$B_2 \cup \{v_{2k+1}, v_{2k+3}, \cdots, v_{4k-1}\} \Rightarrow B_1' \Rightarrow \{v_1, v_3, \cdots, v_{2k-1}\}.$$

类似可证

$$\{v_{2k}, v_{2k+2}, \cdots, v_{4k-2}\} \Rightarrow B_2' \Rightarrow \{v_0, v_2, \cdots, v_{2k-2}\} \cup B_1.$$

此外由 B_1', B_2' 的定义可得,

$$\{v_1, v_3, \cdots, v_{4k-1}\} \backslash \{v_{2k-1}\} \Rightarrow B_1'',$$

$$B_2'' \Rightarrow \{v_0, v_2, \cdots, v_{4k-2}\} \backslash \{v_{2k}\}.$$

再注意到 $d^-_{P_n}(v_{2k}) \leqslant k-1, d^+_{P_n}(v_{2k-1}) \leqslant k-1$ 和 $B_1' \Rightarrow \{v_{2k-1}\}, \{v_{2k}\} \Rightarrow B_2'$,故由定理的假设知,$B_1'' \neq \varnothing, B_2'' \neq \varnothing$ 且存在 $b_1'' \in B_1''$ 和 $b_2'' \in B_2''$,使得 $v_{2k-1}b_1'', b_2''v_{2k} \in E$. 显然有 $N^+_T(b_1'') \subseteq B_2''$ 和 $N^-_T(b_2'') \subseteq B_1''$. 从而有 $|B_i''| \geqslant k, i=1,2$.

考虑 $B_2'', \{v_0, v_2, \cdots, v_{2k-2}\}, \{v_{2k+1}, v_{2k+3}, \cdots, v_{4k-1}\}, B_1''$ 及 $v_{2k-1}v_0 \in E$,由引理2知,在这四个集合间存在形如 $P'_{4k-1} = b_2'' \to v_2 \leftarrow \cdots \to v_{4k} \leftarrow b_1''$ 的AD路. 于是 $P'_{4k-1} \cup \{v_{2k-1}b_1''\}$ 是 T 中长度为 $4k$ 的AD路,矛盾.

若b)成立,考虑 T 中如下最长AD路,

$$P_i^1 = v_{4i} \to v_{4i-1} \leftarrow \cdots \leftarrow v_2 \to v_{4k-1} \leftarrow v_{4k-2} \to \cdots v_{4i+1} \leftarrow v_0 \to v_1 \text{和}$$

$$P_i^2 = v_{4i+2} \to v_{4i+3} \leftarrow \cdots \leftarrow v_{4k-1} \leftarrow v_2 \to v_3 \leftarrow \cdots \to v_{4k+1} \leftarrow v_0 \to v_1,$$

$i=1,2,\cdots,k-1$. 可知 $\{v_1\} \Rightarrow \{v_4, v_6, \cdots, v_{4k-2}\}$. 从而由引理1,$d^-_T(v_1) = d^-_{P_i^1}(v_1) = 2 < 3 \leqslant k$,矛盾.

若c)成立,考虑 T 中最长AD路,

$$P''_{4k-1} = v_0 \to v_1 \leftarrow \cdots \leftarrow v_{s+1} \to v_{4k-1} \leftarrow v_{4k-2} \to \cdots \to v_{s+2},$$

易证 P''_{4k-1} 满足性质1—6. 由 $\{v_0\} \Rightarrow \{v_1, v_3, \cdots, v_s, v_{s+4}\}$ 和性质3及 $v_{s+2}v_{s+5} \in E$ 得

$$d^-_{P''_{4k-1}}(v_{s+2}) \leqslant \frac{1}{2}(2k - |\{v_0, v_2, \cdots, v_{s-1}\}|) = k - \frac{1}{4}(s-1) \leqslant k-1.$$

另一方面,由引理1知,$d^-_T(v_{s+2}) = d^-_{P''_{4k-1}}(v_{s+2}) \leqslant k-1$,这与定理假设矛盾.

至此完成了定理的证明.

(本文第一作者通讯地址:山西省太原市华北工学院理学系 邮码 030051)

参 考 文 献

[1] 田丰,马仲蕃,图与网络流理论,科学出版社,1987.

[2] Grunbaum, B., Antidirected hamiltonian paths in tournaments, *J. Combin. Theory*, B**11**(1971), 249-257.

[3] Rosenfeld, M., Antidirected hamiltonian circuits in tournaments, *J. Combin. Theory*, B**16**(1974), 234-242.

[4] Petrovic Vojislav, Antidirected hamiltonian circuits in tournaments, *Graph Theory*, Novi Sad (1983), 259-269.

[5] 秦玉升,二部竞赛图中的ADH路与ADH回路,南京大学学报数学半年刊,(待发表).

ANTIDIRECTED CYCLES AND PATHS IN BIPARTITE TOURNAMENTS

Wang Jianzhong

(*Dept. of Basic Seience, North China Institute of Technology, Taiyuan* 030051)

Zhang Kemin

(*Dept. of Mathematics, Nanjing University, Najing* 210008)

Li Guirong

(*Dept. of Basic Science, North China Institute of Technology, Taiyuan* 030051)

Abstract

Let T be a bipartite tournament. This paper shows that if $d_T^+(v) \geqslant k$ and $d_T^-(v) \geqslant k$ ($k \geqslant 3$) for each vertex v in T, then T contains either an antidirected cycle or an antidirected path of length at least $4k$, except for a described case. As a corollary of this result, we obtain that every regular bipartite tournament contains an antidirected Hamilton cycle except for a described case.

Key Words Bipartite Tournament, AD-path, AD-cycle.

Subject Classification (1991MR)05C20.