参　考　文　献

1　孙琦. 关于 $\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{d_i}\equiv 0 \pmod 1$ 的最小值. 科学通报, 1996, 41(4): 296～299

2　Granville A, Li Shuguang, Sun Qi. On the number of solution of the equation $\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{d_i}\equiv 0 \pmod 1$, and of diagonal equations in finite fields. 四川大学学报(自然科学版), 1995, 32(3): 243～248

3　Lidl R, Niederreiter H, Finite Fields. Encyclopedia of Mathematica and its Applications, Vol. 20. London: Addison-Wesley, 1983

孙　琦[①]　蔺大正[②]

(①四川大学数学系, 成都 610064; ②四川工业学院基础部, 成都 611744)

Melnikov 猜想 $\Delta = 4$ 情形的一个证明

设 G 为一个平面图, $V(G)$, $E(G)$, $F(G)$, $\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$ 分别表示 G 的顶点集合、边集合、面集合、顶点最小度和最大度. $N_G(u)$ 为点 u 在 G 中的邻集, $G[S]$ 为 G 中由 $S\subseteq V(G)$ 导出的子图. G 中的一个 3-圈 C_3 称为 G 的一个分离三角形, 如果 C_3 的内部和外部均含有 $V(G)\setminus V(C_3)$ 中的顶点. G 的边面全色数 $\chi_{ef}(G)$ 是使得集合 $E(G)\cup F(G)$ 中的相邻或相关联的元素均染为不同色的最少颜色数. 由定义, $\chi_{ef}(G)\geq\Delta(G)$ 是显然的. 另一方面, Melnikov 猜想[1]: 对任何简单平面图 G, $\chi_{ef}(G)\leq\Delta(G)+3$. 文献[2,3]给出了下面结果:

定理 1　若 G 为 $\Delta(G)\leq 3$ 的简单平面图, 则 $\chi_{ef}(G)\leq 6$.

1993 年, Borodin 在文献[4]中证明了:

定理 2　设 G 为简单平面图. 则

(ⅰ) 当 $\Delta(G)\geq 10$ 时, $\chi_{ef}(G)\leq\Delta(G)+1$.

(ⅱ) 当 $\Delta(G)\leq 7$ 且 G 不含分离三角形时, $\chi_{ef}(G)\leq 10$.

由定理 1 和定理 2, 能推出 Melnikov 猜想对所有 $\Delta(G)\notin\{4,5,6,7\}$ 的简单平面图成立. 事实上, 若 G 是一个 $8\leq\Delta(G)\leq 9$ 的简单平面图, 在 G 的一个最大度点处加上 $10-\Delta(G)$ 条悬挂边, 则结果图 H 仍是一个简单平面图且 $\Delta(H)=10$. 由(ⅰ)有 $\chi_{ef}(G)\leq\chi_{ef}(H)\leq\Delta(H)+1=11\leq\Delta(G)+3$.

本文证明了 Melnikov 猜想对 $\Delta=4$ 的平面图也成立. 其主要结果如下:

定理 3　设 G 为 2-连通且 $\delta(G)\geq 3$ 的平面图, 则 G 中存在一点 u 使 $d_G(u)\leq 5$ 且导出子图 $G[N_G(u)\cup\{u\}]$ 中不含 G 的过 u 的分离三角形.

定理 4　若 G 为 $\Delta(G)=4$ 的平面重图, 则 $\chi_{ef}(G)\leq 7$.

致谢　本工作为国家自然科学基金(批准号: 19471037)资助项目.

参　考　文　献

1　Melnikov L S. Recent advances in graph theory. Proc Intern Symp Prague, Praha: Problem Section, 1975. 543

2 Lin Cuiqin, Hu Guanzhang, Zhang Zhongfu. A six-color theorem for edge-face coloring of plane graphs. Discrete Math, 1995, 141: 291～297

3 王维凡. 低度平面图的边面全色数. 高校应用数学学报, A 辑, 1993, 3: 300～307

4 Borodin O V. Simultaneous coloring of edges and faces of plane graphs. Discrete Math, 1994, 128: 21～33

王维凡① 张克民②

(①辽宁大学数学系, 沈阳 110036; ②南京大学数学系, 南京 210093)

赋 Orlicz 范数的 Orlicz 空间的凸系数

以 $[X, \|\cdot\|]$ 记 Banach 空间, X 的凸系数定义为:

$$\varepsilon_0(X) = \sup\{\varepsilon \in [0, 2]: \delta_X(\varepsilon) = 0\}.$$

此处

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf\{1 - \|(x + y)/2\|:$$
$$\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x - y\| \geq \varepsilon\}$$

是 X 关于 ε 的凸性模, $\varepsilon \in [0, 2]$. 凸系数表征空间单位球的总体凸性程度, 在逼近论、控制论等众多学科中有重要应用. 如所周知, $\varepsilon_0(X) = 0$ 等价于空间的一致凸; $\varepsilon_0(X) < 2$ 等价于空间的一致非方. 由于 L^p, $l^p(p > 1)$ 是一致凸空间, 其凸系数自然等于零. 而 Orlicz 空间则不然. Hudzik 等人[1]、王保祥等人[2]及崔云安[3]已对赋 Luxemburg 范数的 Orlicz 空间的凸系数做过详尽讨论. 本文将转向考察赋 Orlicz 范数的 Orlicz 函数空间 $L_M^0(G)$ 和序列空间 l_M^0. 因为已经查明 Orlicz 空间的一致非方等价于自反性, 故只需讨论自反 Orlicz 空间的凸系数.

对 $\alpha \in [0, 1]$, $u > 0$, 记

$$f(\alpha, u) = \frac{2M\left(\frac{1+\alpha}{2}u\right)}{M(u) + M(\alpha u)}.$$

我们得到

定理 1 如果 $\mu(G) = \infty$ 且 L_M^0 自反, 则

$$\varepsilon_0(L_M^0) = \frac{2(1 - \bar{g}(M))}{1 + \bar{g}(M)}, \text{此处 } \bar{g}(M) = \inf\left\{\alpha \in [0, 1]: \sup_{u>0} f(\alpha, u) = 1\right\}.$$

定理 2 如果 $\mu(G) < \infty$ 且 L_M^0 自反、严格凸, 则 $\varepsilon_0(L_M^0) = \frac{2(1 - g(M))}{1 + g(M)}$, 此处

$$g(M) = \inf\left\{\alpha \in [0, 1]: \limsup_{u\to\infty} f(\alpha, u) = 1\right\}.$$

定理 3 如果 l_M^0 自反、严格凸, 则

$$\varepsilon_0(l_M^0) = \frac{2(1 - g_0(M))}{1 + g_0(M)}, \text{此处}$$