第13卷A辑第1期　　高校应用数学学报　　Vol. 13 Ser. A No. 1
1998 年 3 月　　Appl. Math. —JCU　　March 1998

点泛圈性的邻域并条件*

叶淼林　　张克民
(安庆师范学院数学系)　　(南京大学数学系)

摘　要

该文利用邻域并条件讨论图的点泛圈性, 证明了当 $\min\{|N(u)\cup N(v)|\,|u,v\in V(G),uv\notin E(G)\}\geq\frac{2n}{3}+1$ 时, 2-连通 $n(\geq 14)$ 阶图 G 是 $[6,n]$-点泛圈的. 并讨论了无 $C_l(3\leq l\leq 5)$ 的几种情况, 从而得到此条件下的点泛圈性的较完整的结果.

关键词　邻域并, 泛圈, 点泛圈
分类号　(中图)O157.5; (1991MR) 05C38, 05C45.

§1　基本术语和引理

本文研究对象是无向图, 使用[1]中的术语和记号. $N[x]=N(x)\cup\{x\}$, $NC(G)=\min\{|N(u)\cup N(v)|\,|u,v\in V(G),uv\notin E(G)\}$, $d_{G_1}(x)=|N(x)\cap V(G_1)|$, $[m,n]=\{m,m+1,\cdots,n\}$. 若 C 为 G 中一圈, $xy\in E(G[V(C)])$, $xy\notin E(C)$, 则称 xy 为 C 的弦, 在 C 上由 x 到 y 的最短路的长度称为弦 xy 的长度, C 上过 x 点的长度最短的弦称为 C 上过 x 点的最短弦. 若 $\forall\, l\in[3,n]$, G 中总有圈 C_l 则称 G 为泛圈的; 若 $\forall\, l\in[3,n]$, G 中总有圈 C_l 过点 x, 则称 x 为泛圈点, 若 $\forall\, l\in[3,n]-\{i\}$, 过 x 有 C_l 而无 C_i, 称 x 为 $\bar{i}$-泛圈点; 若 $\forall\, l\in[m,n]$, 过 x 有 C_l, 称 x 为 $[m,n]$-泛圈点. G 中所有点均为泛圈点时称 G 为点泛圈的; G 中除 $\bar{i}$-泛圈点外都是泛圈点时称 G 为 $\bar{i}$-点泛圈的; G 中所有点为 $[m,n]$-泛圈点时称 G 为 $[m,n]$-点泛圈的. Faudree 等人[2]用邻域并给出了泛圈图的条件, 蔡小涛[3]、张克民[4]等人已对 Ore 型条件下图的点泛圈性做了细致的研究. 本文研究邻域并条件下图的点泛圈性.

* 本文1996年3月27日收到. 1996年10月31日收到修改稿.
本文为国家自然科学基金和江苏省自然科学基金资助项目.

在本文中, 若 G 为 $n(\geq 14)$ 阶2-连通图, 满足 $NC(G)\geq \frac{2n}{3}+1$, 则称 G 满足 NU 条件.

为了证明主要结果, 需要下面几条引理.

引理1[5,6] 2-连通图 G 阶为 n, 满足 $NC(G)\geq \frac{2n-1}{3}$, 则 G 是 Hamilton 图.

引理2[7] 若 G 为 n 阶图, 满足 $\delta(G)\geq \frac{n}{2}+1$, 则 G 为泛连通图(即 $\forall x,y\in V(G)$, $\forall l\in[d(x,y),n-1]$, G 中有长为 l 的 xy-路).

引理3 若 G 满足 NU 条件, $x\in V(G)$, $d(x)>\frac{n}{3}+1$, 则有过 x 的 C_3,C_4,C_5.

证明 设 $N(x)=\{x_1,x_2,\cdots,x_t\}$, 由 $n\geq 14$ 知 $t\geq 6$. 首先: G 有过 x 的 C_3, 因为若 $x_i,x_j\in N(x)$, $x_ix_j\notin E(G)$, 由 NU 条件有 $|N(x_i)\cup N(x_j)|\geq \frac{2n}{3}+1$, 而 $|N(x)|>\frac{n}{3}+1$. 故 $N(x)\cap(N(x_i)\cup N(x_j))\neq\varnothing$, 即得过 x 的 C_3, 设为 xx_1x_2x. 下面分两种情况证明有过 x 的 C_4, C_5.

(1) $G[N(x)-\{x_1,x_2\}]$ 中有边, 不妨设 x_3x_4 为 $G[N(x)-\{x_1,x_2\}]$ 中一边. 若 $A=\{x_1x_3,x_1x_4,x_2x_3,x_2x_4\}\cap E(G)\neq\varnothing$, 显然有过 x 的 C_4,C_5. 下面设 $A=\varnothing$, 分两种情况讨论: (i) 当 $x_5x_6\notin E(G)$ 时, 由 NU 条件有 $|N(x_5)\cup N(x_6)|\geq\frac{2n}{3}+1$, $|N(x_1)\cup N(x_3)|\geq\frac{2n}{3}+1$, $|(N(x_5)\cup N(x_6))\cap(N(x_1)\cup N(x_3)-\{x\})|\geq\frac{n}{3}+1>5$, $N(x_5)\cup N(x_6)$ 与 $N(x_1)\cup N(x_3)$ 在 $V(G)-\{x,x_1,x_2,x_3,x_4\}$ 中有公共点 y, 过 x 和 y 可构作 C_4,C_5. (ii) 当 $x_5x_6\in E(G)$ 时, 若存在 $i\in\{1,2,3,4\}$, $B_i=\{x_5x_i,x_6x_i\}\cap E(G)\neq\varnothing$, 显然可过 x 做 C_4,C_5. 反之 $B_i=\varnothing$, $i=1,2,3,4$. 由 NU 条件有 $|(N(x_1)\cup N(x_3))\cap(N(x_4)\cup N(x_6))|\geq\frac{2n}{3}+1+\frac{2n}{3}+1-n>\frac{n}{3}+1$. $\forall z\in N(x_1)\cap N(x_4)$. 由 $A=\varnothing$, $B_i=\varnothing$, $i=1,2,3,4,$, 知 $z\neq x_j$, $j=1,2,3,4,5,6$. 若 $N(x_1)\cap N(x_4)\nsubseteq\{x\}$, 则可取 $z\in N(x_1)\cap N(x_4)-\{x\}$, 过 x,z 可构作 C_4,C_5, 于是只须考虑 $N(x_1)\cap N(x_4)=\{x\}$ 的情形, 同理可设 $N(x_1)\cap N(x_6)=\{x\}$, $N(x_3)\cap N(x_6)=\{x\}$, 而 $\{x\}\subset N(x_3)\cap N(x_4)$, 这样就有 $|N(x_3)\cap N(x_4)|>\frac{n}{3}+1$, $|N(x_3)|>\frac{n}{3}+1$, $|(N(x_1)\cup N(x_5))\cap N(x_3)-\{x\}|\geq 2$, 于是可过 x 及 x_3 作 C_4,C_5.

(2) $G[N(x)-\{x_1,x_2\}]$ 为空图. 此时 $X=\{x_3,x_4,\cdots,x_t\}$ 为独立集, $\forall x_i,x_j\in X$, $|N(x_i)\cup N(x_j)|\geq\frac{2n}{3}+1$, $|N(x)|>\frac{n}{3}+1$, 于是 $|N(x)\cap(N(x_i)\cup N(x_j))|>2$, 这与 $N(x)\cap(N(x_i)\cup N(x_j))\subset\{x_1,x_2\}$ 矛盾, 即(2)不可能发生.

至此已证得过 x 有 C_3,C_4,C_5.

引理4 若 G 满足 NU 条件, C_l 为 G 中长为 l 的圈, $l>\frac{n}{3}+3$, 则 C_l 上不存在不相邻的两点在 $G[V(C_l)]$ 中度为2.

证明 若有 $x,y\in V(C_l)$, $d_{G[V(C_l)]}(x)=d_{G[V(C_l)]}(y)=2$, $xy\notin E(C_l)$, 则 $xy\notin E(G)$, $|N(x)\cup N(y)|\leq n-l+4$, 由 NU 条件有 $\frac{2n}{3}+1\leq|N(x)\cup N(y)|\leq n-l+4<n-\frac{n}{3}-3+4=\frac{2n}{3}+1$, 矛盾.

§2　主要结果

定理1　若 G 满足 NU 条件, 则 G 为 $[6, n]$-点泛圈的.

我们将定理分为下列几个性质来证明:

性质1　若 G 满足 NU 条件, 则对于 $\frac{2n}{3}+1<l\leq n$, $\forall x\in V(G)$, 有过 x 点的 C_l.

证明　由引理1知 G 为 Hamilton 图, 过任意点 x 有 C_n. 若性质不成立, 设 l 为最大整数使得 $\forall y\in V(G)$, 有过 y 点的 C_l, 但存在 $y_0\in V(G)$, 无过 y_0 的 C_{l-1}, $l>\frac{2n}{3}+2>11$. 由引理4知 $G[V(C_l)]$ 中至多有(相邻的)两个2度顶点, 设为 u 和 v, 在 C_l 上选定一点 x_1, 使得 x_1 在 C_l 中距 u, v 尽可能地远(若 $G[V(C_l)]$ 中只一个2度顶点 u, 则要求 x_1 在 C_l 中距 u 尽可能地远, 若 $G[V(C_l)]$ 中无2度顶点则只考虑后面的要求), 且 x_1 沿 C_l 到 y_0 的距离不为1, 3. 再给 C_l 标号为 $x_0x_1\cdots x_{l-1}$, 使 x_1 在 C_l 上的最短弦为 x_1x_i 且满足 $i\leq\frac{l}{2}$, x_1, x_{l-1}, x_{l-3} 在 $G[V(C_l)]$ 中度大于或等于3. 由标号知 $y_0\notin\{x_0, x_{l-2}\}$, $N(x_1)\cap\{x_3, x_4, \cdots, x_{i-1}\}=\varnothing$, x_{l-1} 除 x_0 和 x_{l-2} 外在 C_l 上至少还有一邻点.

情况1　$N(x_{l-1})\cap\{x_{l-3}, x_{l-4}, \cdots, x_{i+1}\}\neq\varnothing$.

设 x_{l-1} 在 $\{x_{l-3}, x_{l-4}, \cdots, x_{i+1}\}$ 中下标最大的邻点为 x_j, 考虑路 $P_{l-1}=C_l-x_0$. 由 x_1x_i, $x_{l-1}x_j\in E(G)$, 若 $N(x_{j+1})\cap\{x_{j+3}, x_{j+4}, \cdots, x_{l-2}\}\neq\varnothing$, 则重排 P_{l-1} 为 $x_1x_2\cdots x_jx_{l-1}x_{l-2}\cdots x_{j+1}$, 并重新标号为 $x_1x_2\cdots x_jx_{j+1}\cdots x_{l-1}$, 如此下去得到路 P 满足 x_j 为 x_{l-1} 在 $\{x_{l-3}, \cdots, x_{i+1}\}$ 中的下标最大的邻点且 x_{j+1} 在 $\{x_{j+3}, x_{j+4}, \cdots, x_{l-1}\}$ 中无邻点. 再对 $x_1x_2\cdots x_i$ 作类似处理, 使得 x_1 在 $\{x_3, \cdots, x_{j-1}\}$ 中最小下标邻点为 x_i, x_{i-1} 在 $\{x_2, x_3, \cdots, x_{i-3}\}$ 中无邻点, 记最后得到的路为 P, 令

$$N=N_P(x_1)\cup N_P(x_{i-1}),$$

$$N^-=\{x_k\in V(P)\mid x_{k+1}\in N\}, \text{则 } |N|=|N^-|,$$

$$N^-\cap(N_P(x_{l-1})\cup N_P(x_{j+1}))\subset\{x_{j+2}, x_{i-3}\},$$

否则可由 P 产生过 y_0 的 C_{l-1}.

令 $N_1=N_P(x_{l-1})\cup N_p(x_{j+1})$, 我们有

$$|N_1|\geq\frac{2n}{3}+1-(n-l+1)=l-\frac{n}{3},\qquad |N|\geq\frac{2n}{3}+1-(n-l+1)=l-\frac{n}{3},$$

$$2(l-\frac{n}{3})\leq|N|+|N_1|=|N^-|+|N_1|=|N^-\cup N_1|+|N^-\cap N_1|\leq l-1-1+2=l.$$

上述不等式中最后一个减1是因 $x_{l-1}\notin N^-\cup N_1$. 于是得到 $l\leq\frac{2n}{3}$, 矛盾.

情况2　$N(x_{l-1})\cap\{x_{l-3}, x_{l-4}, \cdots, x_{i+1}\}=\varnothing$.

设 x_j 为 x_{l-1} 在 $\{x_1, x_2, \cdots, x_i\}$ 中下标最小的邻点, 则 $x_j\in\{x_2, x_3, \cdots, x_{i-2}\}\cup\{x_i\}$. 假设 $N(x_{l-3})\cap\{x_{l-5}, \cdots, x_{j+1}\}=\varnothing$, 因若 x_{l-3} 在 $\{x_2, \cdots, x_j\}$ 中有邻点, 可找其具最小下标的一个记为 x_k, $2\leq k\leq j$, 那么 x_{l-3}, x_{l-1} 都不与 x_{k-1} 相邻, 故有

$$\frac{2n}{3}+1\leq|N(x_{l-1})\cup N(x_{l-3})|\leq n-l+(i-1)+3\leq n+2-\frac{l}{2}.$$

得 $l\leq\frac{2n}{3}+2$, 矛盾.

当$N(x_{l-3})\cap\{x_{l-5},\cdots,x_{j+1}\}\neq\varnothing$时, 令$x_{l-1}=x_1, x_{l-3}=x_{l-1}$, 重新标号$C_l$, 即转化为情况1的情形, 矛盾.

综上所述性质1获证.

性质2　若G满足NU条件, $\delta(G)\leq\frac{n}{3}+1$, 则$G$是$[6,[\frac{2n}{3}+1]]$-点泛圈的

证明　任取$y_0\in V(G)$, 下面证明$\forall l\in[6,[\frac{2n}{3}+1]]$有过$y_0$的$C_l$.

(1) 若$d(y_0)\leq\frac{n}{3}+1$, 令$G_1=G-N[y_0]$, 则$\forall v\in V(G_1), y_0v\notin E(G)$, $|N(v)\cup N(y_0)|\geq\frac{2n}{3}+1$, 于是

$$d_{G_1}(v)=|N(v)\cup N(y_0)|-d(y_0)\geq\frac{2n}{3}+1-|N[y_0]|+1\geq\frac{|V(G_1)|}{2}+1,$$

由引理2知G_1是泛连通图, 因G是2-连通的, $N(y_0)$中必有两点x,y分别与$V(G_1)$中两点a, b相邻, 由$\forall t\in[2,|V(G_1)|-1]$, G中有长为t的(a,b)-路, 得$\forall l\in[6,[\frac{2n}{3}+1]]$, 存在过$y_0$的$C_l$.

(2) $d(y_0)>\frac{n}{3}+1$, 但存在$y\in N(y_0)$, $d(y)\leq\frac{n}{3}+1$. 由$d(y_0)>\frac{n}{3}+1$知y_0必与$V(G)-N[y]$中点相邻, 由2-连通性知和(1)一样可构作过y_0的C_l, $6\leq l\leq\frac{2n}{3}+1$.

(3) $d(y_0)>\frac{n}{3}+1$, 且$\forall v\in N[y_0]$, $d(v)>\frac{n}{3}+1$, 存在$y\in V(G)-N[y_0]$, $d(y)\leq\frac{n}{3}+1$. 令$G_1=G-N[y]$, $|V(G_1)|=s$, 由G_1的泛连通性类似于(1)知过y_0点有$[3,s]$-圈及C_{s+3}, 由$d(y)\leq\frac{n}{3}+1$知$s+3\geq\frac{2n}{3}+1$. 若$s\geq[\frac{2n}{3}+1]$, 则性质已得证. 若$s<[\frac{2n}{3}+1]$, 至多缺过y_0的C_{s+2}和C_{s+1}, 下面证明$s<[\frac{2n}{3}+1]$时有过y_0点的C_{s+2}和C_{s+1}. 设$N(y)$的两点v_1, v_2分别与$V(G_1)$中两点y_i, y_{i+1}相邻, 这时有一C_{s+3}由y, v_1, v_2和$V(G_1)$中点构成, 此圈标记为$y_0y_1\cdots y_iv_1yv_2y_{i+1}\cdots y_{s-1}$, 当$y_0\in N(N(y))$时由$G_1$的泛连通性知有过$y_0$的$C_{s+1}, C_{s+2}$, 于是可设$y_0\notin N(N(y))$, 特别$y_0$不为$y_i, y_{i+1}$, 考察$y_0$和$y_1$(或$y_0$和$y_{s-1}$), $d(y_0)>\frac{n}{3}+1$, $d(y_1)>\frac{n}{3}+1$, 若无过y_0的C_{s+2}, 则

$$|\{y_0y_j, y_1y_{j+2}\}\cap E(G)|\leq 1,\quad j=0,1,\cdots,i-2,i+1,\cdots,s-1.$$

于是有

$d_{G_1}(y_0)+d_{G_1}(y_1)\leq s-2+4=s+2$, 而$d_{G_1}(y_0)\geq\frac{s}{2}+1$, $d_{G_1}(y_1)\geq\frac{s}{2}+1$, 于是$d_{G_1}(y_0)=\frac{s}{2}+1$, 又因$d_{G_1}(y_0)=d(y_0)>\frac{n}{3}+1$, 这样有$s>\frac{2n}{3}$, 这与$s<[\frac{2n}{3}+1]$, 矛盾.

于是过y_0有C_{s+2}, 类似可证过y_0有C_{s+1}.

由(1)、(2)和(3)即证得性质2.

性质3　若G满足NU条件且$\delta(G)>\frac{n}{3}+1$, 则G是点泛圈的.

若过 x_0 点有长为 k 的圈 $C_k: x_0x_1\cdots x_{k-1}x_0$, 存在 $0\le i\le k-2$, 使得 $x_ix_{i+2}\in E(G)$ (这里 $x_k=x_0$), 则称过 x_0 点有 $C_k\nabla C_{k-1}$, 显然若过 x_0 点有 $C_k\nabla C_{k-1}$, 则过 x_0 点既有 C_k 又有 C_{k-1}, 在性质3的条件下, 我们有下列结论:

结论1　$\forall x\in V(G)$, 有过 x 点的 C_3, C_4, 且有过 x 的 $C_5\nabla C_4$ 或 $C_6\nabla C_5$.

事实上, 由引理3知过 x 点有 C_3, C_4 和 C_5, 不妨设过 x 点的 C_5 为 $xx_1x_2x_3x_4x$, 若过 x 无 $C_5\nabla C_4$, 则 $x_2x_4\notin E(G)$, 由 $|N(x_2)\cup N(x_4)|\ge\frac{2n}{3}+1, d(x_3)>\frac{n}{3}+1$ 知存在 $y\notin\{x, x_1\}, y\in N(x_3)\cap(N(x_2)\cup N(x_4))$, 于是有过 x 的 $C_6\nabla C_5$.

结论2　当 $\kappa(G)>4$ 时, $\forall x_0\in V(G)$, 若过 x_0 有 $C_k\nabla C_{k-1}(k\ge 5), V(G)-V(C_k)\ne\varnothing$, 则过 x_0 点有 $C_{k+1}\nabla C_k$ 或 $C_{k+2}\nabla C_{k+1}$.

事实上, 若不然, 设过 x_0 点的 $C_k\nabla C_{k-1}$ 中的 C_{k-1} 为 $x_0x_1\cdots x_jx_{j+1}\cdots x_{k-2}x_0$, C_k 为 $x_0x_1\cdots x_jux_{j+1}\cdots x_{k-2}x_0$, 并规定此序为圈的正向.

情况1　存在 $x\in V(G)-V(C_k)$ 使得 $|N(x)\cap\{x_{j+1}, x_{j+2}, \cdots, x_{k-2}, x_0, \cdots, x_{j-1}\}|\ge 2$ 或 $|N(x)\cap\{x_{j+2}, \cdots, x_0, \cdots, x_j\}|\ge 2$

不妨设前者发生, 取 $x_i, x_s\in N(x)\cap\{x_{j+1}, x_{j+2}, \cdots, x_0, \cdots, x_{j-1}\}$, 从 x_i 到 x_s 沿圈的正向无 x 的邻点, 显然 $s\ne i+1$, $\{x_{i+1}, x_{s+1}, x\}$ 为独立集, 否则有过 x_0 的 $C_{k+1}\nabla C_k$, 而对任意的 $y\in(V(G)-V(C_k))\cap(N(x_{i+1})\cup N(x_{s+1}))$, 则 $y\notin N(x)$; 若 $x_t\in V(C_{k-1})\cap(N(x_{i+1})\cup N(x_{s+1}))-\{x_{j+1}\}$, 则 $x_{t-1}\notin N(x)$. 故有 $|N(x_{s+1})\cup N(x_{i+1})|\le|V(G)-N(x)|+2<(n-(\frac{n}{3}+1))+2=\frac{2n}{3}+1$, 矛盾.

情况2　情况1以外的情况　由 $\kappa(G)>4$ 知存在 $x_i, x_s\in\{x_{j+2}, x_{j+3}, \cdots, x_0, x_1, \cdots, x_{j-1}\}$, 使得 $N(x_i)\cap(V(G)-V(C_k))\ne\varnothing, N(x_s)\cap(V(G)-V(C_k))\ne\varnothing$, 不妨设在路 $P: x_{j+2}x_{j+3}\cdots x_0x_1\cdots x_{j-1}$ 中 x_i 在 x_s 之前　取 $u_i\in N(x_i)\cap(V(G)-V(C_k)), u_s\in N(x_s)\cap(V(G)-V(C_k))$, 因不合情况1, $u_i\ne u_s$.

子情况1　当 $u_iu_s\in E(G)$ 时, 因无 $C_{k+2}\nabla C_{k+1}$ 过 x_0, $s\ne i+1$.　(A) 当 $s\ne i+2(\mathrm{mod}(k-1))$ 时, 考察 x_{s+1}, x_{i+2} (这时 $x_{i+1}\ne x_0$. 若 $x_{i+1}=x_0$, 则考察 x_{i-1}, x_{s-2}) 和 u_s, $\{u_s, x_{s+1}, x_{i+2}\}$ 为独立集, u_s 在 C_{k-1} 上除 x_s 外无邻点, 对 $\forall v\in V(G)-V(C_k)$, 若 $v\in N(x_{s+1})\cup N(x_{i+2})$, 则 $u_sv\notin E(G)$, 否则有过 x_0 的 $C_{k+2}\nabla C_{k+1}$, 这样又有

$$|N(x_{s+1})\cup N(x_{i+2})|\le n-d(u_s)+1\le\frac{2n}{3}$$

与 NU 条件矛盾. (B) 当 $s=i+2$ 时: 若 $x_{i+1}\ne x_0$, 则显然有过 x_0 的 $C_{k+1}\nabla C_k$; 若 $x_{i+1}=x_0$, 当 $s+1\ne j$ 时, 考察 x_{s+2}, x_{i+1}, u_i 同(A)一样得出矛盾 ($j+2\ne i$ 时类似考虑 x_{i-2}, x_{s-1}, u_s). 剩下的只有 $x_{i+1}=x_0$, $x_{s+1}=x_j$, $x_{j+2}=x_i$, $x_s=x_{i+2}$, 即 $k=6$, $C_{k-1}: x_0x_1x_2x_3x_4x_0$, $C_k: x_0x_1x_2ux_3x_4x_0$, 因 $d(x_2)>\frac{n}{3}+1\ge 6$, 知存在 $u_2\in N(x_2)\cap(V(G)-V(C_6))\ne\varnothing$, 若 $u_2u_1\in E(G)$ 显然有过 x_0 的 $C_8\nabla C_7$; 当 $u_1u_2\notin E(G)$ 时, 因 $|N(u_2)\cup N(u_1)|\ge\frac{2n}{3}+1, d(x_0)>\frac{n}{3}+1$, 知存在 $v\in(V(G)-V(C_6))\cap N(x_0)\cap(N(u_2)\cup N(u_1))$, 得过 x_0 的 $C_8\nabla C_7$ 或 $C_7\nabla C_6$ 而矛盾.

子情况2　$u_iu_s\notin E(G)$, 当 $k>5$ 时, 取 $x_t\in\{x_{j+2}, x_{j+3}, \cdots, x_{k-2}, x_0, x_1, \cdots, x_{j-1}\}-\{x_i,$

$x_s\}$, 由 u_i, u_s 在 C_{k-1}上除 x_i, x_s 外无邻点知 $N(x_t)\cap(N(u_i)\cup N(u_s))\cap(V(G)-V(C_k))\neq\varnothing$, 即转化为子情况1. 当 $k=5$时, 设 $C_5\nabla C_4$中的 C_5为 $y_1y_2y_3y_4uy_1$, $y_1y_4\in E(G)$, 则 $x_0\neq y_2$或 $x_0\neq y_3$, 不妨设 $x_0\neq y_2$, 由 $\kappa(G)>4$知 $N(y_i)\cap(V(G)-V(C_5))\neq\varnothing$, 设 $v_i\in N(y_i)\cap(V(G)-V(C_5))$, 若 $v_1v_3\in E(G)$则有过 x_0的 $C_6\nabla C_5$, 若 $v_1v_3\notin E(G)$, 由 $|N(v_1)\cup N(v_3)|\geq\frac{2n}{3}+1$, $d(y_2)>\frac{n}{3}+1$知 $|N(y_2)\cap(N(v_1)\cup N(v_3))|>2$, 于是亦可构作过 x_0的 $C_7\nabla C_6$, 至此结论2得到证明.

结论3 当 $\kappa(G)=2,3,4$时, 对 $\forall l\in[6,[\frac{2n}{3}]+1]$, 过任意点 x_0有 C_l.

事实上, 当 $\kappa(G)=2$时, 设 u, v 为两割点, 因 $\delta(G)>\frac{n}{3}+1$, $G-\{u,v\}$至多有两个连通分支 B_1、B_2, 且有 $|V(B_i)|<\frac{2n}{3}$, 又由 NU 条件知 $B_i(i=1,2)$为完全图, 于是过任意点可构作 C_l, $6\leq l\leq\frac{2n}{3}+1$, 当 $\kappa(G)=3,4$时可同理构作.

由结论1, 2, 3及性质1知性质3成立.

综合性质1、性质2和性质3, 可得定理1的证明.

下面进一步讨论 G 中过指定点的小圈情况, $\mathbf{F}$ 表示一类图族, 其中的图为 $K_1\vee K_2^c\# G_{n-3}$, 或为 $K_1\vee K_2 * G'_{n-3}$, 其中 $\delta(G_{n-3})\geq\frac{2n}{3}-1$, "#"表示 K_2^c的两点在 G_{n-3}中均有邻点且邻点总数 $\geq\frac{2n}{3}$, $\delta(G'_{n-3})\geq\frac{2n}{3}-1$, "*"表示 K_2中两点在 G'_{n-3}中均有邻点但不共邻点且在 G'_{n-3}中邻点总数 $\geq\frac{2n}{3}-2$.

定理2 若 G 满足 NU 条件, 则 G 具有下列特征之一:

1) G 为点泛圈的;

2) $\delta(G)=2=d(x)$, $G\in\mathbf{F}$, 此时 $\forall v\in N[x]$, v 为 $[6,n]$-泛圈点, $\forall v\in V(G)-N[x]$, v 为泛圈点;

3) $3\leq\delta(G)\leq\frac{n}{3}+1$, G 为 i^--点泛圈的, $i=3,4,5$, 此时 i^--泛圈点的点数 $<i$.

证明 由性质3知, 若 G 满足 NU 条件不具特征1), 则 $\delta(G)\leq\frac{n}{3}+1$. 由定理知仅可能过 G 中某点无 G_l, $l\in[3,5]$. 由引理3知道 $d(x)>\frac{n}{3}+1$时有过 x 的 C_3, C_4, C_5. 由性质2的证明(3)知, 若有不相邻的两点 x、y, $d(x)\leq\frac{n}{3}+1$, $d(y)\leq\frac{n}{3}+1$, 则过 x, y 均有 C_3, C_4, C_5. 故 G 中的非泛圈点构成一个团. 特别, 当 $i\geq3$时, i^--泛圈点的点数小于 i. 当 G 不为点泛圈图且 $\delta(G)=2$时, 考虑到 NU 条件即得特征(2).

以下设 G 不是点泛圈的, $\delta(G)\geq3$, x 为非泛圈点, 令 $G_1=G-N[x]$.

A) 若过 x 无 C_3, 取 $x_1, x_2, x_3\in N(x)$, $\{x_1,x_2,x_3\}$为独立集, 有 $|N(x_i)\cup N(x_j)|\geq\frac{2n}{3}+1$, $i\neq j\in[1,3]$, 于是 $|N_{G_1}(x_i)\cup N_{G_1}(x_j)|\geq\frac{2n}{3}$. 若无过 x 的 C_4, 则 $|N_{G_1}(x_i)\cup N_{G_1}(x_j)|=$

$d_{G_1}(x_i)+d_{G_1}(x_j)\ (i\neq j)$, 于是有 $d_{G_1}(x_1)+d_{G_1}(x_2)+d_{G_1}(x_3)\geq\frac{3}{2}\cdot\frac{2n}{3}=n$. 由 $V(G_1)\leq n-4$, 得存在 $i,j\in\{1,2,3\}$ 使得 $N_{G_1}(x_i)\cap N_{G_1}(x_j)\neq\varnothing$, 矛盾. 故过 x 有 C_4. 前已说明 $N_{G_1}(x_1)$, $N_{G_1}(x_2)$, $N_{G_1}(x_3)$ 中必有两个交非空, 不妨设 $N_{G_1}(x_1)\cap N_{G_1}(x_2)\neq\varnothing$. 若过 x 无 G_5, 则 $\forall v\in N_{G_1}(x_1)\cap N_{G_1}(x_2)$, $v\notin N(N_{G_1}(x_1)\cup N_{G_1}(x_2))$, 由 $|N_{G_1}(x_1)\cup N_{G_1}(x_2)|\geq\frac{2n}{3}$, 得 $|N(x)\cup N(v)|\leq|V(G)-N_{G_1}(x_1)\cup N_{G_1}(x_2)|\leq n-\frac{2n}{3}=\frac{n}{3}$ 矛盾. 故过 x 有 C_5. 此时 x 为 3^--泛圈点, 且 G 除 x 及某邻点可能为 3^--泛圈点外, 其余点皆为泛圈点.

B) 当过 x 有 C_3 无 C_4 时, 由以上证明知 $\alpha(G[N(x)])\leq 2$, 得 $d(x)\leq 4$, 取 $x_1,x_2,x_3\in N(x)$, $x_1x_2\in E(G)$, $x_1x_3,x_2x_3\notin E(G)$, 因无 C_4 过 x, 故 $N_{G_1}(x_i)\cap N_{G_1}(x_j)=\varnothing\ (i\neq j)$. 由 $d_{G_1}(x_3)+d_{G_1}(x_i)=|N_{G_1}(x_3)\cup N_{G_1}(x_i)|\geq\frac{2n}{3}-2$, $i=1,2$, 知 $d_{G_1}(x_1)+d_{G_1}(x_2)+2d_{G_1}(x_3)\geq\frac{4n}{3}-4$, 而 $d_{G_1}(x_1)+d_{G_1}(x_2)+d_{G_1}(x_3)\leq n-4$, 得 $d_{G_1}(x_3)\geq\frac{n}{3}$, $\forall y\in N_{G_1}(x_1)$ (或 $N_{G_1}(x_2)$), 由于 $|N(y)\cup N(x)|=d(x)+d_{G_1}(y)\geq\frac{2n}{3}+1$, 又得 $d_{G_1}(y)\geq\frac{2n}{3}+1-4=\frac{2n}{3}-3$. $d_{G_1}(x_3)+d_{G_1}(y)\geq\frac{n}{3}+\frac{2n}{3}-3=n-3$, 得到 $N_{G_1}(x_3)\cap N_{G_1}(y)\neq\varnothing$, 有过 x 的 C_5. x 是 4^--泛圈点. 由 $d_{G_1}(x_3)\geq\frac{n}{3}$ 知, x_3 是泛圈的. 若还存在 $x_4\in N(x)$, 同理可证 x_4 也是泛圈的. x_1 和 x_2 可能为 4^--泛圈点. 结论成立.

C) 除掉 A) 和 B) 即得 G 为 5^--点泛圈的, 且 5^--泛圈点的点数 <5.

由定理2立即得到下述推论.

推论[2] 若 G 为2-连通 $n(\geq 19)$ 阶图, 满足 $NC(G)\geq\frac{2n+5}{3}$, 则 G 是泛圈的.

最后我们衷心感谢审稿人精心阅读本文和对原文提出修改意见.

(本文第一作者通讯地址: 安庆市安庆师范学院数学系 邮码246011)

参 考 文 献

[1] Bondy, J. A. and Murty, U. S. R., Graph Theory with Applications, Macmillan, London, 1976.

[2] Faudree, R. J., Gould, R. J. Jacobson, M. S., Lesniak L., Neighborhood unions and highly Hamiltonian graphs, *Ars Combin.*, **31**(1991), 139-148.

[3] Cai Xiaotao, On the panconnectivity of ore graph, *Scientia Sinica* A **27**(1984), 684-694.

[4] Zhang Kemin, Holton D. A. and Sheng Bau, On generalized vertex-pancyclic graphs, *Chin. J. Math.*, **21**: 1(1993), 91-88.

[5] Faudree R. J., Gould, R. J., Jacobson M. S. and Schelp, R. H. Neighborhood unions and Hamiltonian properties in graphs, *J. Combin. Theory*, B **47**(1989), 1_9.

[6] Song Zengmin, Zhang Kemin, A sufficient conditon for a graph to be Hamiltonian, 南京大学学报, 数学半年刊, **2**(1992), 163_167.

[7] Willamson, J., Panconnected graph Ⅱ, *Period. Math. Hungar.*, **8**(1977) 105_116.

A NEIGHBORHOOD UNION CONDITION FOR VERTEX-PANCYCLICITY

Ye Miaolin

(*Dept. of Math., Anqing Normal Institute, Anqing* 246011)

Zhang Kemin

(*Dept. of Math., Nanjing University, Nanjing* 210093)

Abstract

The paper discusses vertex-pancyclicity by neighborhood union condition, and shows that 2-connected graph G of order $n(\geq 14)$ is $[6, n]$-Vertex-pancyclic if $\min\{|N(u)\cup N(v)| \mid u, v \in V(G), uv \notin E(G)\} \geq \frac{2n}{3}+1$. The results in the special cases without $C_l\,(3\leq l\leq 5)$ are obtained. So the complete description of vertex-pancyclicity of this condition follows.

Key Words Neighborhood Unions, Pancyclic, Vertex-pancyclic

Subject Classification (CL) O157.5; (1991MR) 05C38, 05C45