第 22 卷 第 2 期 应用数学学报 Vol. 22 No. 2
1999 年 4 月 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA Apr., 1999

Δ- 匹配与边面全色数*

王维凡 张克民
(辽宁大学数学系，沈阳 110036) (南京大学数学系，南京 210093)

摘 要 设 G 为 $\Delta(G)\geq 5$ 的外平面图且 $\chi_{ef}(G)$ 为 G 的边面全色数. 本文证明了: $\Delta(G)\leq\chi_{ef}(G)\leq\Delta(G)+1$, 且 $\chi_{ef}(G)=\Delta(G)$ 当且仅当 G 含有一个由内边组成且覆盖 G 的每一个最大度点的匹配.

关键词 平面图, 边面全色数, 匹配

1 引言

本文限于简单连通平面图. 设 $V(G),E(G),F(G),p(G),\delta(G),\Delta(G)$ 分别表示一个平面图 G 的点集、边集、面集、点集、最小度和最大度. $N_G(u)$ 为点 u 在 G 中的邻集, $G[S]$ 为集合 S 在 G 中的导出子图. G 的一个面以它的边界顶点序列来表示. G 中度为 i 的顶点子集记为 $V_i(G)$ $(i=0,1,2,\cdots,\Delta\ (=\Delta(G)))$. $V_2(G)$ 中位于 G 的某个三角面边界的顶点子集合记为 $V_2^1(G)$. 文中其它术语与记号和 [1] 一致.

平面图 G 的边面全色数 $\chi_{ef}(G)$ 是使得集合 $E(G)\cup F(G)$ 中相邻或相关联的元素均染为不同色的最少颜色数. 由定义 $\chi_{ef}(G)\geq\chi'(G)\geq\Delta(G)$ 是显然的. 另一方面, Melnikov 猜想 [2]: 对任何平面图 G, $\chi_{ef}(G)\leq\Delta(G)+3$. 当 $\Delta(G)\leq 3$[3] 及 $\Delta(G)\geq 8$[4] 时猜想已被证实成立. 特别是, Borodin 在 [4] 中证明了: 若 G 为 $\Delta(G)\geq 10$ 的平面图, 则 $\chi_{ef}(G)\leq\Delta(G)+1$. 最近, 我们进一步证明了该猜想对所有 $\Delta=4$ 的平面图成立 [5]. 对于外平面图 G, 我们在 [6] 中证明了: 当 $\Delta(G)\geq 4$ 时, $\Delta(G)\leq\chi_{ef}(G)\leq\Delta(G)+1$, 且当 $\Delta(G)\geq 6$ 和 G 不含割点时, $\chi_{ef}(G)=\Delta(G)$. 不难看出, 当 G 含有割点时, $\chi_{ef}(G)$ 的上、下界均能达到. 如 p 阶扇形图 F_p $(p\geq 5)$ 有 $\chi_{ef}(G)=\Delta(F_p)$, 但对它的星子图 $K_{1,p-1}$ 却有 $\chi_{ef}(K_{1,p-1})=\Delta(K_{1,p-1})+1$. 因此给出一般外平面图边面全色数何时取到上、下界的充要条件是很有意义的. 本文借助 Δ- 匹配的概念, 较为彻底地解决了这个问题.

2 预备引理

设 G 是一个外平面图, $f_{\rm out}(G)$ 表示它的外面, $E_{\rm in}(G)$ 和 $E_{\rm out}(G)$ 分别表示它的内边集和外边集.

引理 2.1[6] 若 G 为无割点的外平面图, 则 $|V_2(G)|\geq 2$.

引理 2.2 设 G 为外平面图. 则 (1) $\delta(G)\leq 2$. (2) 若 G 2- 连通且 $p(G)\geq 5$, 则 (i) 对任意 $u\in V(G)$, $|N_G(u)\cap V_2(G)|\leq 2$; (ii) 对任意 $u,v\in V_2(G)$, $N_G(u)\neq N_G(v)$.

本文 1996 年 12 月 27 日收到. 1998 年 4 月 6 日收到修改稿.
* 国家和辽宁省教委自然科学基金资助项目.

证　利用引理 2.1 易证 (1). 再由 G 不含割点及 $p(G)\ge 5$ 易推出 (2).

引理 2.3　若 G 为 $\delta(G)=2$ 的外平面图，则至少有下列之一成立：

(1) 存在两个相邻的 2 度点 u 和 v.

(2) 存在一个三角面 uv_1v_2 使 $u\in V_2^1(G)$, $v_1\in V_3(G)$, 且 $v_1v_2\in E_{\text{in}}(G)$.

(3) 存在两个三角面 u_1v_1x, xu_2v_2 使 $u_1,u_2\in V_2^1(G)$, $x,v_1\in V_4(G)$ 且 $v_1v_2\in E_{\text{in}}(G)$ (见图 1).

(4) 存在三个三角面 $y_1u_1x_1,x_1u_2x_2,x_2u_3y_2$ 使 $u_1,u_2,u_3\in V_2^1(G)$, $x_1,x_2\in V_4(G)$ 且 $y_1x_1,x_1x_2,x_2y_2\in E_{\text{in}}(G)$ (见图 2).

(5) 存在四个三角面 $y_1u_1x_1,x_1u_2x_2,x_2u_3y_2,x_1x_2y_2$ 使 $u_1,u_2,u_3\in V_2^1(G)$, $x_2\in V_4(G)$, 且 $y_1x_1,x_1y_2\in E_{\text{in}}(G)$ (见图 3).

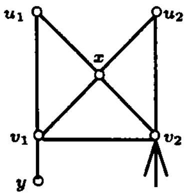

图 1

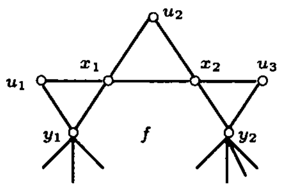

图 2

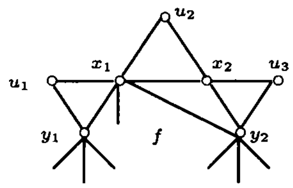

图 3

证　设 G 为任一个 $\delta(G)=2$ 的外平面图．若 $\Delta(G)=2$, (1) 成立．故设 $\Delta(G)\ge 3$. 选取 G 的一个块 G_0, 它至多含有 G 的一个割点，设为 s. 易见 $p(G_0)\ge 3$ 且 $\delta(G_0)=2$. 若 $p(G_0)\le 4$ 或 $\Delta(G_0)=2$, (1) 或 (2) 成立．因此设 $p(G_0)\ge 5$ 且 $\Delta(G_0)\ge 3$. 显然只需证明下面论断 I:

论断 I 引理中的结论 (1)–(5) 至少之一对 G_0 成立，且所有度数确定的点均不同于 s, 即 $s\notin\{u,v,x,v_1,u_1,u_2,u_3,x_1,x_2\}$.

反证法．假设论断 I 不成立．令

$$\widetilde{V}=\{v\in V_2(G_0)\backslash\{s\}\mid xy\notin E(G_0),\ N_{G_0}(v)=\{x,y\}\},$$
$$\widetilde{E}=\{xy\mid v\in\widetilde{V}\},\qquad H=G_0-\widetilde{V}+\widetilde{E},$$

则 H 仍为 2 连通外平面图，且论断 I 对 H 也不成立．由引理 2.1, $V_2(H)\backslash\{s\}\ne\emptyset$. 任取 $v\in V_2(H)\backslash\{s\}$, 设 $N_H(v)=\{x,y\}$, 有 $xy\in E(H)$, $d_H(x)\ge 4$, $d_H(y)\ge 4$ (当 $s\in\{x,y\}$ 时，$d_H(s)\ge 3$). 记 $Q(t)=N_H(t)\cap V_2^1(H)\backslash\{v,s\}$. 由 x 与 y 的对称性，必有下列情况之一出现：

(A)　$s\notin\{x,y\}$.

(A_1)　$d_H(x)\ge 5$ 且 $d_H(y)\ge 5$, 或 $Q(x)=Q(y)=\emptyset$, 或 $Q(x)=\emptyset$ 且 $d_H(y)\ge 5$.

(A_2)　$d_H(x)=d_H(y)=4$, $Q(x)\ne\emptyset$ 且 $Q(y)=\emptyset$. 设 $x_1\in Q(x)$, $y_1\in N_H(x_1)\backslash\{x\}$, 则 $yy_1\notin E(H)$.

(A_3)　$d_H(x)=4$, $d_H(y)\ge 5$ 且 $Q(x)\ne\emptyset$. 设 $x_1\in Q(x)$, $y_1\in N_H(x_1)\backslash\{x\}$.

(A_{31})　$yy_1\notin E(H)$.

(A_{32})　$yy_1\in E(H)$. 此时 $Q(y)=Q(y_1)\backslash\{x_1\}=\emptyset$.

(B)　$y=s$.

(B_1) $d_H(x)\ge 5$ 或 $d_H(x)=4$ 且 $Q(x)=\emptyset$.

(B_2) $d_H(x)=4$ 且 $Q(x)\ne\emptyset$. 设 $x_1\in Q(x)$, $y_1\in N_H(x_1)\backslash\{x\}$, 则 $d_H(y_1)\ge 4$.

(B_{21}) $d_H(y_1)=4$ 或 $d_H(y_1)\ge 5$ 且 $yy_1\notin E(H)$.

(B_{22}) $d_H(y_1)\ge 5$ 且 $yy_1\in E(H)$.

设 H_1 是由 H 通过对 $V_2(H)\backslash\{s\}$ 中每一点 v 做如下处理后得到的图：若 A_1 或 B_1 成立，去掉点 v; 若 A_2, A_{31}, B_{21} 之一成立，去掉点 v,x,x_1 后加边 yy_1; 若 A_{32} 或 B_{22} 成立，去掉点 v,x,x_1. 由 H_1 的构造，易知 $d_{H_1}(s)\ge 2$ 且对 $u\in V(H_1)\backslash\{s\}$ 有 $d_{H_1}(u)\ge 3$. 于是 $V_2(H_1)\backslash\{s\}=\emptyset$. 但这矛盾于引理 2.1, 因 H_1 也是一个 2 连通外平面图. 证毕.

定义 2.4 称在圈 $C_{2n}=u_1w_1u_2w_2\cdots u_nw_nu_1$ 中再联边 $u_1u_2,u_2u_3,\cdots,u_{n-1}u_n,u_nu_1$ 后得到的图为闭齿形图，记为 $\overline{Z}_n$. 称去掉 $\overline{Z}_n$ 中点 w_n 及其关联边后再加入两个新点 v_1,v_2 和两条新边 u_1v_1,u_nv_2 而得到的图为开齿形图，记为 Z_n.

由引理 2.3 容易推出

推论 2.5 若 G 为 $\Delta(G)\le 4$ 的连通非空外平面图，则至少有下列之一成立：

(1) $\delta(G)=1$.

(2) 存在两个相邻的 2 度点.

(3) 存在一个三角面 uxy 使 $u\in V_2^1(G)$, $x\in V_3(G)$ 且 $xy\in E_{\rm in}(G)$.

(4) 含有子图 Z_n 或 $\overline{Z}_n$ $(n\ge 3)$.

3 外平面图的边面全色数

为简洁起见，G 的一个 k- 正常边面全染色法 σ 记为 k-EF 法. 在 σ 下，元素 x 所染的颜色记为 $\sigma(x)$. 顶点 u 所关联的边染的颜色子集合记为 $C_\sigma(u)$. 记号 $S\to\alpha$ 表示集合 S 中每一个元素均染颜色 α. $B[m]$ 表示当指定 B 中所有元素为同一色时至多有 m 种颜色是禁用的. 特别当 $B=\{b\}$ 时，记为 $b[m]$.

定义 3.1 若外平面图 G 的一个匹配 M 满足 $M\subseteq E_{\rm in}(G)$ 且覆盖了 G 中的所有最大度点，则称 M 为 G 的 Δ- 匹配.

引理 3.2 对 $n\ge 3$, $\chi_{ef}(\overline{Z}_n)=5$. 且 $\overline{Z}_n$ 存在一个满足下面性质 P_1 的 5-EF 染色法：P_1: 某一种颜色仅用来染外面 $f_{\rm out}$.

证 据 n 的奇偶性易用穷染法证之.

定理 3.3 设 G 为一个外平面图. 则 G 存在一个满足 P_1 的 k-EF 法，其中 $k=\max\{\Delta(G)+1,5\}$.

证 先设 $\Delta\le 4$. 对 $p(G)$ 归纳证明. 当 $p(G)\le 5$ 时易知结论成立. 设 G 为任一个 $\Delta\le 4$ 且 $p(G)\le 6$ 的外平面图. 由推论 2.5 有四种情况. 而情况 1 和情况 2 的讨论是简单的. 设情况 3 成立. 令 $H=G-u$. 设 G 中被边 xy 分离且异于 uxy 的面为 f. 由归纳假设，H 有满足 P_1 的 5-EF 法 λ. 在 λ 基础上，对 G 构造 σ 如下：

若 $\lambda(f)\notin C_\lambda(y)$, 令 $uy\to\lambda(f)$, $ux[4]$, $xuy[4]$.

若 $\lambda(f)\in C_\lambda(y)$, 令 $ux\to\lambda(f)$, $uy[4]$, $xuy[4]$.

若情况 4 成立，沿用定义 2.4 的记号. 若 G 含 $\overline{Z}_n$, 令

$$H=G-\{u_1,u_2,\cdots,u_n,w_1,w_2,\cdots,w_{n-1}\}.$$

由归纳假设及引理 3.2 易构造出 G 的满足 P_1 的 5-EF 法. 若 G 含有 Z_n 时，令

$$H=G-\{u_1,u_2,\cdots,u_{n-1},w_1,\cdots,w_{n-1}\}+u_nv_1.$$

由归纳假设， H 有满足 P_1 的 5-EF 法 λ. 易见 $\lambda(u_nv_1)\neq\lambda(u_nv_2)$. 在 G 的染色法 σ 中先令： $u_1v_1\to\lambda(u_nv_1)$, $u_nu_1[4]$, $u_1u_2\cdots u_n[3]$. 而 G 的其它未染的边面染色法与染 $\overline{Z}_n$ 时相同. 易见 σ 满足 P_1.

再设 $\Delta\geq 5$. 仍用归纳法. 由引理 2.3 分三种情况： $\delta(G)=1$; 存在两个相邻的 2 度点; 存在一个三角面 uvw 使 $u\in V_2^1(G)$, $v\in V_i(G)$ $(i\leq 4)$. 前两种情况讨论是简单的. 对于第三种情况, 在 $G-u$ 的满足 P_1 的 $(\Delta+1)$-EF 法 λ 基础上, 再令 $uw[\Delta]$, $uv[5]$, $uvw[5]$.

定理 3.4　若 G 为 $\Delta(G)\geq 5$ 的外平面图, 则 $\chi_{ef}(G)=\Delta(G)$ 当且仅当 G 有 Δ- 匹配.

证　*必要性*　若 $\chi_{ef}(G)=\Delta(G)$, 那么对于 G 的任一个 Δ-EF 法 σ, 染 G 的每一个最大度点所关联的边用尽了 Δ 种不同颜色. 于是对任意 $u\in V_\Delta(G)$, 存在一条边 $e_u\in E_{\text{in}}(G)$ 使 u 与 e_u 关联且 e_u 与外面 f_{out} 染同一色. 显然, 对不同的 $u,v\in V_\Delta(G)$ 及相应的 e_u, $e_v\in E_{\text{in}}(G)$, 或 $e_u=e_v=uv\in E_{\text{in}}(G)$, 或 $e_u\neq e_v$, 此时 e_u 与 e_v 不相邻. 令

$$M_\Delta=\{e\in E_{\text{in}}(G)\mid\sigma(e)=\sigma(f_{\text{out}})\},$$

则 M_Δ 覆盖了 G 的所有最大度点, 即 G 有 Δ- 匹配.

充分性　设 G 为 $\Delta(G)\geq 5$ 的外平面图, 且含有 Δ- 匹配 M_Δ, 我们来证明 G 有满足下面性质 P_2 的 Δ-EF 法 σ:

P_2: 外面与 M_Δ 中每一边染同一色 $\sigma(f_{\text{out}})$.

先考虑 $\Delta=5$ 的情形. 对 G 的点数归纳证明. 当 $p(G)=6$ 时， G 为扇形图 F_6 或为其子图 F_6'(满足 $\Delta(F_6')=\Delta(F_6)$). 易验证对 G 的任一个 Δ- 匹配 M_Δ(仅由一条内边组成), 总有 G 的满足 P_2 的 5-EF 法. 假设点数小于 p 时结论成立, 设 G 为任一个有 Δ- 匹配且 $\Delta(G)=5$ 的 p 阶外平面图. 不失一般性, 设 M_Δ 为 G 的最大 Δ- 匹配 (含边最多). 若 G 有 1 度点, 设为 u, 且 $uv\in E(G)$. 令 $H=G-u$. 存在两种情况:

情况 A　若 $\Delta(H)=\Delta(G)$, 则 M_Δ 亦为 H 的 Δ- 匹配. 由归纳假设， H 有满足 P_2 的 5-EF 法 λ. 在 λ 基础上易给边 uv 染色. 因为当 $d_G(v)<\Delta(G)$ 时， uv 至多有四种颜色禁用. 当 $d_G(v)=\Delta(G)$ 时， M_Δ 中有边 e 在 G 中覆盖 v, 进而亦在 H 中覆盖 v. 于是在 λ 下， e 与外面染色相同, 此时 uv 禁用的颜色数也不超过 4. 总能形成 G 的满足 P_2 的 5-EF 法.

情况 B　若 $\Delta(H)=\Delta(G)-1$, 由定理 3.3, H 有满足 P_1 的 5-EF 法 λ. 先将 H 中属于 M_Δ 的边改染成 $\lambda(f_{\text{out}})$, 然后归结为情况 A 来讨论 (情况 B 的处理方法适用于以下诸情况).

若 $\delta(G)=2$, 由引理 2.3 有五种情况. 直接引用引理 2.3 的记号并对各种情况做如下处理:

情况 1　设 x,y 分别为 u,v 的另一个邻点. 若 $x\neq y$, 令 $H=G-u+xv$; 若 $x=y$, 令 $H=G-u$. 则 M_Δ 也为 H 的 Δ- 匹配. 由归纳假设， H 有满足 P_2 的 5-EF 法 λ. 基于 λ 对 G 染色:

前一种情况： $xu\to\lambda(xv)$, $uv[4]$.

后一种情况： $xu[4]$, $uv[3]$, $xuv[4]$.

情况 2　设 $H=G-u$, 则 M_Δ 为 H 的 Δ- 匹配 (指 M_Δ 的某个子集为 H 的 Δ- 匹配, 以下义同). 设 f 为 G 中被边 v_1v_2 分离且异于 uv_1v_2 的内面. 由归纳假设， H 有 5-EF 法 λ 且满足 P_2. 由 M_Δ 的最大性分以下情况构造 G 的满足 P_2 的 5-EF 法 σ.

情况 2.1　若 $v_1v_2\in M_\Delta$, 则 $\lambda(f_{\text{out}})\notin C_\lambda(v_2)$. 令 $uv_2\to\lambda(v_1v_2)$, $v_1v_2\to\lambda(f_{\text{out}})$, $uv_1[3]$, $uv_1v_2[4]$.

情况 2.2 若 $v_1v_2 \notin M_\Delta$, 则 $\lambda(f_{\rm out}) \in C_\lambda(v_2)$. 当 $\lambda(f) \in C_\lambda(v_2)$ 时令: $uv_1 \to \lambda(f)$, $uv_2[4]$, $uv_1v_2[4]$. 当 $\lambda(f) \notin C_\lambda(v_2)$ 时令: $uv_2 \to \lambda(f)$, $uv_1[4]$, $uv_1v_2[4]$.

情况 3 设 $H = G - x - u_1 - u_2$, 则 M_Δ 为 H 的 Δ- 匹配. 设 $y \in N_H(v_1)\backslash\{v_2\}$. 在 H 的满足 P_2 的 5-EF 法 λ 基础上形成 σ.

情况 3.1 若 $xv_2 \in M_\Delta$, 则 $\lambda(f_{\rm out}) \notin C_\lambda(v_2)$, 令 $xv_2 \to \lambda(f_{\rm out})$, $u_2v_2[4]$, $xv_1[3]$, $\{xu_1, xv_1v_2\} \to \lambda(yv_1)$, $u_1v_1[4]$, $xu_2[4]$, $xu_1v_1[4]$, $xu_2v_2[4]$.

情况 3.2 若 $xv_1 \in M_\Delta$, 则 $\lambda(f_{\rm out}) \in C_\lambda(v_2)$ 或 $d_G(v_2) \le 4$. 令 $xv_1 \to \lambda(f_{\rm out})$, $xv_2[3]$, $u_2v_2[4]$, $xv_1v_2[4]$. 若 $\sigma(xv_1v_2) \ne \sigma(u_2v_2)$, 令 $xu_2 \to \sigma(xv_1v_2)$, 否则令 $xu_2[3]$. 再令 $xu_1[3]$, $u_1v_1[4]$, $xu_1v_1[4], xu_2v_2[4]$.

情况 3.3 若 $v_1v_2 \in M_\Delta$, 则 $\lambda(f_{\rm out}) \notin C_\lambda(v_2)$. 令 $\{xu_1, u_2v_2, xv_1v_2\} \to \lambda(v_1v_2)$, $v_1v_2 \to \lambda(f_{\rm out})$, $xv_2[4]$, $xv_1[4]$, $xu_2[4]$, $u_1v_1[4]$, $xu_1v_1[4]$, $xu_2v_2[4]$.

情况 4 设 f 为 G 中被边 x_1x_2 分离且不同于 $u_2x_1x_2$ 的内面. 令 $H = G - u_2$. 则 M_Δ 为 H 的 Δ- 匹配, 且 M 有满足 P_2 的 5-EF 法 λ. 构造 G 的染色法 σ 如下:

情况 4.1 若 $x_1y_1 \in M_\Delta$(对 $x_2y_2 \in M_\Delta$ 讨论类似), 则有 $\lambda(x_1y_1) = \lambda(f_{\rm out})$. 当 $\lambda(u_3x_2) \ne \lambda(f)$ 时, 令 $u_2x_2 \to \lambda(f)$, $u_2x_1[4]$, $u_2x_1x_2[4]$. 当 $\lambda(u_3x_2) = \lambda(f)$ 时, 令 $u_2x_1 \to \lambda(f)$, $u_1y_1[4]$, $u_1x_1[4]$, $u_2x_2[4]$, $u_1x_1y_1[4]$, $u_2x_1x_2[4]$.

情况 4.2 若 $x_1y_1, x_2y_2 \notin M_\Delta$, 则有 $\lambda(f_{\rm out}) \notin C_\lambda(x_1) \cup C_\lambda(x_2)$. 令 $x_1x_2 \to \lambda(f_{\rm out})$, $u_2x_1 \to \lambda(x_1x_2)$, $u_2x_2[4]$, $u_2x_1x_2[4]$.

情况 5 设 f 表示 G 中被边 x_1y_2 分离且异于 $x_1x_2y_2$ 的内面. 注意到当 $\Delta(G) = 5$ 时有 $x_1, y_2 \in V_5(G)$, 于是 x_1y_1 也是 f 的边界边. 令 $H = G - u_2 - u_3 - x_2$. 类似地由 H 的满足 P_2 的 5-EF 法 λ 构造 G 的 σ.

情况 5.1 若 $x_1x_2, x_2y_2, x_1y_2 \notin M_\Delta$, 则 $\lambda(f_{\rm out}) \in C_\lambda(x_1) \cap C_\lambda(y_2)$. 令 $x_1x_2y_2 \to \lambda(f_{\rm out})$, $\{x_1x_2, u_3y_2\}[4]$, $x_2y_2[4]$, $u_2x_1[4]$, $u_2x_2[4]$, $u_3x_2[4]$, $u_3x_1x_2[4]$, $u_3x_2y_2[4]$.

情况 5.2 若 $x_1x_2 \in M_\Delta$(对 $x_2y_2 \in M_\Delta$, 讨论类似), 则 $\lambda(f_{\rm out}) \in C_\lambda(y_2)$. 令 $x_1x_2 \to \lambda(f_{\rm out})$, $u_2x_1[4]$, $x_2y_2[4]$, $u_3y_2[4]$, $x_1x_2y_2[4]$. 若 $\sigma(x_1x_2y_2) \ne \sigma(u_3y_2)$, 令 $\sigma(u_3x_2) = \sigma(x_1x_2y_2)$. 若 $\sigma(x_1x_2y_2) = \sigma(u_3y_2)$, 令 $u_3x_2[3]$. 然后令 $u_2x_2[4]$, $u_2x_1x_2[4]$, $u_3x_2y_2[4]$.

情况 5.3 若 $x_1y_2 \in M_\Delta$, 则由 M_Δ 的极大性可推出 $\lambda(f_{\rm out}) \notin C_\lambda(y_2)$, $\lambda(f_{\rm out}) \in C_\lambda(y_1)$. 在此情况下要对 H 中边 u_1y_1, u_1x_1 和面 u_1x_1y 进行改色. 先令 $x_1y_2 \to \lambda(f_{\rm out})$.

情况 5.3.1 若 $\lambda(f) \in C_\lambda(y_1) \cap C_\lambda(y_2)$, 取 $\alpha \in C_\lambda(y_2)\backslash\{\lambda(f), \lambda(x_1y_2)\}$, $\beta \in C_\lambda(y_1)\backslash\{\lambda(x_1y_1), \lambda(f), \lambda(u_1y_1), \lambda(f_{\rm out})\}$. 若 $\alpha = \beta$, 我们令 $\{u_1x_1, u_3x_2, u_2x_1x_2\} \to \lambda(f)$, $\{u_1y_1, u_2x_1, x_2y_2\} \to \lambda(x_1y_2)$, $\{u_2x_2, u_3y_2, x_1x_2y_2\} \to \lambda(x_1y_1)$, $\{x_1x_2, u_1x_1y_1, u_3x_2y_2\} \to \alpha$. 若 $\alpha \ne \beta$, 令 $\{u_1x_1, u_2x_2, u_3x_2y_2\} \to \lambda(f)$, $\{x_1x_2, u_3y_2, u_1x_1y_1\} \to \beta$, $\{u_1y_1, u_2x_1, u_3x_2, x_1x_2y_2\} \to \alpha$, $\{x_1y_1, x_2y_2, u_2x_1x_2\}[4]$.

情况 5.3.2 若 $\lambda(f) \notin C_\lambda(y_1) \cup C_\lambda(y_2)$. 令 $\{u_1y_1, u_2x_1, x_2y_2\} \to \lambda(f)$, $\{u_3x_2, u_2x_1x_2\} \to \lambda(x_1y_1)$, $\{u_1x_1, u_2x_2, u_3y_2, x_1x_2y_2\} \to \lambda(x_1y_2)$, $\{x_1x_2, u_1x_1y_1, u_3x_2y_2\}[4]$.

情况 5.3.3 若 $\lambda(f) \in C_\lambda(y_1)\backslash C_\lambda(y_2)$ (对 $\lambda(f) \in C_\lambda(y_2)\backslash C_\lambda(y_2)$ 类似), 令 $\{u_1x_1, x_2y_2, u_2x_1x_2\} \to \lambda(f)$, $\{u_2x_2, u_3x_2y_2\} \to \lambda(x_1y_1)$. 如果 $\lambda(x_1y_2) \to C_\lambda(y_1)$, 令 $\{x_1x_2, u_3y_2, u_1y_1x_1\} \to \lambda(x_1y_2)$, $\{u_1y_1, u_2x_1, u_3x_2, x_1x_2y_2\}[4]$. 否则令 $\{u_1y_1, u_3y_2, x_1x_2\} \to \lambda(x_1y_2)$, $\{u_2x_1, u_3x_2, u_1x_1y_1, x_1x_2y_2\}[4]$.

综上证得 $\chi_{ef}(G) \ge 5$. 再由定理 3.3 有 $\chi_{ef}(G) \le 5$. 因此 $\chi_{ef}(G) = 5$. 当 $\Delta \ge 6$ 时, 除子情况 5.3 外, 其余证明完全同于 $\Delta = 5$ 的情形. 而对 5.3, 证明类似于 [6] 中定理 2.3 子情况 4.2 的讨论. 证毕.

值得指出的是，当 $\Delta \le 4$ 时定理 3.4 不成立. 例如当 n 为偶数时， $\overline{Z}_n$ 显然有 Δ- 匹配. 但由引理 3.2, $\chi_{ef}(\overline{Z}_n) = 5 = \Delta(\overline{Z}_n) + 1$.

4　关于 Δ- 匹配的存在性

由定理 3.4, 要确定一个 $\Delta \ge 5$ 的外平面图 G 的边面全色数，只需判定 G 是否有 Δ- 匹配. 那么究竟哪些外平面图有 Δ- 匹配呢？这里我们给出一个充分条件.

引理 4.1　若 G 为 $\Delta \ge 3$ 的外平面图，则 G 有一个覆盖每一个最大度点的匹配.

证　对 G 的点数 p 归纳证明. 当 $p(G) = \Delta(G) + 1$ 时， G 至多含两个最大度点，且 $|V_\Delta(G)| = 2$ 当且仅当 $G \cong K_4 - e$. 此时 G 的覆盖 $V_\Delta(G)$ 的匹配显然存在. 假设点数小于 p 时引理成立. 设 G 是任一个 $\Delta \ge 3$ 的 p 阶外平面图. 不失一般性，设 $\delta(G) \ne 0$. 我们来形成 G 的满足引理要求的匹配 $M(G)$ 如下：

当 $|V_\Delta(G)| \le 2$ 时，由 $\Delta(G) \ge 3$, $M(G)$ 容易找到. 故设 $|V_\Delta(G)| \ge 3$. 由引理 2.3, 有下面三种情形：

情况 1　$\delta(G) = 1$. 设 u 是 G 的最小度点， v 是 u 的邻点. 令 $H = G - u$, 则 H 仍是一个外平面图. 由 $|V_\Delta(G)| \ge 3$, 推出 $\Delta(H) = \Delta(G) \ge 3$. 由归纳假设， H 有覆盖 $V_\Delta(H)$ 的匹配 $M(H)$. 于是，当 v 在 H 中未被 $M(H)$ 覆盖时令 $M(G) = M(H) \cup \{uv\}$, 否则令 $M(G) = M(H)$.

情况 2　存在 $u, v \in V_2(G)$ 使 $uv \in E(G)$. 设 $x \in N_G(u) \backslash \{v\}$ 且设 $H = G - u$. 由归纳假设， H 有覆盖 $V_\Delta(H)$ 的匹配 $M(H)$. 当 x 在 H 中未被 $M(H)$ 覆盖时令 $M(G) = M(H) \cup \{ux\}$, 否则令 $M(G) = M(H)$.

情况 3　存在三角面 uxy 使 $u \in V_2(G)$, $xy \in E(G)$. 令 $H = G - u$. 由归纳假设， H 有覆盖 $V_\Delta(H)$ 的匹配 $M(H)$. 于是当 x 和 y 在 H 中均被 $M(H)$ 覆盖时，令 $M(G) = M(H)$; 当 $M(H)$ 覆盖了 x 而未覆盖 y 时，令 $M(G) = M(H) \cup \{uy\}$(相反情形类似处理). 当 x 和 y 均未被 $M(H)$ 覆盖时，令 $M(G) = M(H) \cup \{xy\}$. 引理证毕.

定理 4.2　若 G 为 $\Delta \ge 5$ 的外平面图，且 G 的每一个最大度点不是割点，则 G 有 Δ- 匹配.

证　记 $A = V_\Delta(G)$, 令

$$B = \{u \in V(G) \backslash A \mid \text{存在 } v \in A \text{ 使 } uv \in E_{\text{in}}(G)\},$$
$$G^* = G[A \cup B] - E_{\text{out}}(G) - E(G[B]).$$

易见，G 含有 Δ- 匹配当且仅当 G^* 含覆盖 A 的匹配. 由引理 4.1, 我们只需证明 $\Delta(G^*) \ge 3$ 且 $V_\Delta(G^*) = A$. 事实上， G 的每一个点至少与两条外边相关联. 因此对任意 $x \in V(G^*)$ 有 $d_{G^*}(x) \le d_G(x) - 2$. 又因为 $V_\Delta(G)$ 中不含割点，故 G 的每一个最大度点 u 恰与两条外边相关联. 因此 $\Delta(G^*) = d_{G^*}(u) = d_G(u) - 2 = \Delta(G) - 2 \ge 3$ 且 $V_\Delta(G^*) = A$. 证毕.

推论 4.3　若 G 为 $\Delta \ge 5$ 的无割点的外平面图，则 G 有一个 Δ- 匹配.

应当指出，当 $\Delta \le 4$ 时定理 4.2 不真. 例如， $\overline{Z}_n$ 为 $\Delta = 4$ 的 2 连通外平面图，但当 n 为奇数时， $\overline{Z}_n$ 无 Δ- 匹配. 其次，当 $V_\Delta(G)$ 中含有割点时，一个外平面图 G 可能有，也可能没有 Δ- 匹配. 这两方面的例子都是不难找到的. 因此给出这个问题的一个完全刻划是很有意义的.

致谢　作者衷心感谢审稿人对本文提出的宝贵修改意见.

参 考 文 献

1 Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory with Applications. New York: MacMillan, 1976

2 Melnikov L S. Recent Advances in Graph Theory. Proc. Int. Symp. Prague, 1974 (Academic Praha, 1975)

3 王维凡. 低度平面图的边面全色数. 高校应用数学学报, 1993, 3A: 300–307

4 Borodin O V. Simultaneous Coloring of Edges and Faces of Plane Graphs. *Discrete Math.*, 1994, 128: 21–33

5 Wang Weifan. Equitable Colorings and Total Colorings of Graphs. The Doctoral Thesis, Nanjing University, 1997

6 Wang Weifan. On the Colorings of Outerplane Graphs. *Discrete Math.*, 1995, 147: 257–269

Δ-MATCHING AND EDGE-FACE CHROMATIC NUMBERS

WANG WEIFAN

(*Department of Mathematics, Liaoning University, Shenyang* 110036)

ZHANG KEMIN

(*Department of Mathematics, Nanjing University, Nanjing* 210093)

Abstract Let G be an outerplane graph with $\triangle(G) \geq 5$. And let $\chi_{ef}(G)$ be the edge-face chromatic number of G. In this paper, we prove that $\triangle(G) \leq \chi_{ef}(G) \leq \triangle(G)+1$. Especially, $\chi_{ef}(G) = \triangle(G)$ iff G contains a matching consisting of inner edges which coves all vertices of maximum degree.

Key words Plane graphs, edge-face chromatic numbers, matching