第44卷第1期　　数　学　学　报　　Vol.44, No.1
2001年1月　　ACTA MATHEMATICA SINICA　　Jan., 2001

文章编号:0583-1431(2001)01-0015-06　　文献标识码： A

恰含 d 个非零对角元的本原矩阵的广义最大密度指数集

苗正科　潘林强　张克民

(南京大学数学系　江苏　南京　210093)

摘　要　设 A 是一个具有周期 p 的 $n\times n$ 不可约布尔矩阵，文 [1] 定义了矩阵的广义最大密度指数 $h_A(k)$. 令 $DIS_{n,d}(k)=\{h_A(k)\mid A\in PM_n(d)\}$, 其中 $PM_n(d)$ 是所有恰含 d 个非零对角元的 $n\times n$ 本原矩阵的集合. 本文证明了

$$DIS_{n,d}(k)=\begin{cases}\{1,2,\ldots,n-1\}, & \text{当 } 1\le k\le d \text{ 时},\\ \{2,3,\ldots,n-d+k-1\}, & \text{当 } d+1\le k\le n-1 \text{ 时}.\end{cases}$$

另外，我们定义矩阵 A 的范数，用 $\sigma(A)$ 表示，为 A 中 1 的个数，并且刻划了具有最小范数的极矩阵.

关键词　广义最大密度指数；局部指数；范数；极矩阵

MR(1991) 主题分类　05C20, 05C50, 15A33

中图分类　O157.5

The Generalized Maximum Density Index Sets of Primitive Matrices with d Nonzero Diagonal Entries

MIAO Zheng Ke　　PAN Lin Qiang　　ZHANG Ke Min

(*Department of Mathematics, Nanjing University, Nanjing* 210093, *P. R. China*)

Abstract　Let A be an $n\times n$ irreducible Boolean matrix with period p. In [1], the generalized maximum density index $h_A(k)$ is defined. Let $DIS_{n,d}(k)=\{h_A(k)\mid A\in PM_n(d)\}$, where $PM_n(d)$ is the set of all $n\times n$ primitive matrices with d nonzero entries exactly. In this paper, we show that

$$DIS_{n,d}(k)=\begin{cases}\{1,2,\ldots,n-1\}, & \text{if } 1\le k\le d,\\ \{2,3,\ldots,n-d+k-1\}, & \text{if } d+1\le k\le n-1.\end{cases}$$

Furthermore, we define the norm of A, denoted by $\sigma(A)$, the numbers of 1 in A and describe the extremal matrices with minimum norm.

Keywords　Generalized maximum density index; Local exponent; Norm; Extremal matrix

MR(1991) Subject Classification　05C20, 05C50, 15A33

收稿日期：　1998-11-09;　接受日期：　1999-10-15

基金项目：国家自然科学基金资助项目；江苏省自然科学基金资助项目

作者简介：苗正科 (1965–), 男，江苏人，徐州师范大学数学系副教授，博士，从事组合论与图论研究；
潘林强 (1972–), 男，浙江人，南京大学数学系博士，从事组合论与图论研究；
张克民 (1935–), 男，浙江人，南京大学数学系博导，从事组合论与图论研究.

Chinese Library Classification O157.5

1 前言

具有周期 p 的 $n\times n$ 不可约布尔矩阵的幂序列的最大密度指数是一个重要的组合参数. 1997 年, 文 [1] 按如下方式推广了最大密度指数:

设 A 是一个具有周期 p 的 $n\times n$ 不可约布尔矩阵, 在幂序列 $A, A^2, A^3, \ldots$ 中, 令 $\mu_A^j(i)$ 表示 A^j 的第 i 行中 1 的数目, 若 $X\subset\{1,2,\ldots,n\}$, 我们定义:

定义 1 $\mu_A^j(X):=\sum_{i\in X}\mu_A^j(i)$.

定义 2 $\mu_A(X):=\max\{\mu_A^j(X)\mid j\in Z^+\}$.

定义 3 $\mu_A(k):=\max\{\mu_A(X)\mid |X|=k\}$.

定义 4 $h_A(k):=\min\{m\in Z^+\mid$ 存在 $X\subset\{1,2,\ldots,n\}$ 使得 $|X|=k$ 且 $\mu_A^m(X)=\mu_A(k)\}$.

如果 $p=1$, 则 A 称为本原的, 此时, 显然有 $\mu_A(k)=nk$. 由于布尔矩阵的研究经常使用图论方法, 所以我们先介绍布尔矩阵与有向图之间的关系.

设 D 是一个有向图, 如果存在一个整数 m 使得对任意点对 $u,v\in V(D)$, D 中均有从 u 到 v 长为 m 的有向通道, 则称 D 为本原的, 这种 m 的最小者称为 D 的指数, 用 $\gamma(D)$ 表示. 令 $D\in PD_n$ 且 $u\in V(D)$, 其中 PD_n 是所有 n 阶本原有向图的集合. 我们定义在 u 点的局部指数, 用 $\exp_D(u)$ 表示, 是这样的最小整数 m, 它使得对任意的 $v\in V(D)$, D 中均有从 u 到 v 长为 m 的有向通道. 令 $V(D)=\{1,2,\ldots,n\}$, 则顶点可以被编号使得 $\exp_D(1)\le\exp_D(2)\le\cdots\le\exp_D(n)=\gamma(D)$. 其它未定义的概念和术语, 读者可参阅文献 [1–3].

设 A 是一个布尔矩阵, $D(A)$ 是 A 的伴随有向图, 则有:

命题 1[3] 设 D 是一个有向图, 则 D 本原的充要条件是 D 强连通且 $\gcd\{x\mid x\in L(D)\}=1$.

命题 2[3] 设 A 是一个 $n\times n$ 布尔矩阵, J 是一个 $n\times n$ 全 1 矩阵, 则 A 本原的充要条件是存在一个正整数 m 使得 $A^m=J$.

命题 3 设 A 是一个布尔矩阵, 则 A 本原的充要条件是 $D(A)$ 本原, 并且 $h_A(k)=\exp_{D(A)}(k)$.

证明 令 $V(D(A))=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, 则 A^m 的 (i,j) 元素为 1 的充要条件是存在一条从 v_i 到 v_j 长为 m 的有向通道. 由命题 2 及本原有向图的定义知, A 本原的充要条件是 $D(A)$ 本原. 令 $h_A(k)=m$, 则存在一个整数 m 和 $X\in\{1,2,\ldots,n\}$ 使得 $|X|=k$ 且 $\mu_A^m(X)=nk$ 但是对任意 $Y=\in\{1,2,\ldots,n\}$ 且 $|Y|=k$ 有 $\mu_A^{m-1}(y)<nk$. 因为 $\mu_A^m(X)=nk$ 蕴涵 $\exp_{D(A)}(k)\le m$, 对任意 $Y\in\{1,2,\ldots,n\}$ 且 $|Y|=k$ 有 $\mu_A^{m-1}(Y)<nk$ 蕴涵 $\exp_{D(A)}(k)\ge m$, 所以 $\exp_{D(A)}(k)=m=h_A(k)$.

设 $PM_n(d)$ 表示所有恰含 d 个非零对角元的 $n\times n$ 本原布尔矩阵的集合 $(0\le d\le n)$. 1988 年, $\{\gamma(A)\mid A\in PM_n(n)\}$ 由文献 [4] 解决. 1989 年, $\{\gamma(A)\mid A\in PM_n(d)\}$ $(1\le d<n)$ 由文献 [5] 解决. 1998 年, $\{\exp_D(k)\mid D\in PD_n(0)\}$ 由文献 [6] 解决. 设 A,B 是两个 $n\times n$ 布尔矩阵, 我们定义 A 的范数, 用 $\sigma(A)$ 表示, 为 A 中 1 的个数. 显然, σ 满足范数公理. 如果存在一个 $n\times n$ 排列矩阵 P 使得 $A=PBP^{-1}$, 则称 A 与 B 是排列相似的, 记作 $A\approx B$. 易证, 如果 $A\approx B$, 那么 $\sigma(A)=\sigma(B)$ 且 $h_A(k)=h_B(k)$. 令 $M_{n,d}(k):=n-1+\max\{0,k-d\}$, $DIS_{n,d}(k):=\{h_A(k)\mid A\in PM_n(d)\}$, $S(d,k):=\{A\mid A\in PM_n(d), h_A(k)=M_{n,d}(k)\}$, 则 $DIS_{n,d}(n)$ $(1\le d\le k)$ 和 $DIS_{n,0}(k)$ $(1\le k\le n)$ 被解决. 本文考察了 $DIS_{n,d}(k)$ $(1\le k\le n-1$ 且 $1\le d\le n)$, 并得到如下结论:

定理 1

$$DIS_{n,d}(k)=\begin{cases}\{1,2,\ldots,n-1\}, & \text{当 } 1\le k\le d \text{ 时},\\ \{2,3,\ldots,n-d+k-1\}, & \text{当 } d+1\le k\le n \text{ 时}.\end{cases}$$

定理 2 设 $A \in PM_n(d)$, 则 $A \in S(d,k)$ 且 $\sigma(A) = \min\{\sigma(B) \mid B \in S(d,k)\}$ 当且仅当

$$A \approx \begin{cases} \begin{pmatrix} c_1 & 1 & & & \\ & c_2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 1 & & & & c_n \end{pmatrix}, & \text{当 } 1 \le k \le \min\{d+1,n\} \text{ 时}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & & & \\ & 1 & 1 & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & 1 & 1 & & & \\ & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & 1 \\ 1 & & & & & & & 0 \end{pmatrix}, & \text{当 } \min\{d+1,n\}+1 \le k \le n \text{ 时}, \end{cases}$$

其中 $c_i = 0$ 或 1 $(i = 1,2,\ldots,n)$ 且 $\sum_{i=1}^{n} c_i = d$.

2 广义最大密度指数集

设 $J_{m\times n}$ 表示 $m \times n$ 全 1 矩阵, $0_{m\times n}$ 表示 $m \times n$ 零矩阵, I_m 表示 $m \times m$ 单位矩阵.

引理 1[5] 设 D 是 n 阶本原有向图，则对任意 k $(1 \le k \le n-1)$ 均有 $\exp_D(k+1) \le \exp_D(k)+1$.

引理 2 设 $A \in PM_n(d)$, 则对任意 k $(1 \le k \le n)$ 均有 $h_A(k) \le M_{n,d}(k)$.

证明 设 $D = D(A)$, 则在 D 中必存在 d 个顶点使得该 d 个顶点上均有环. 由于在有环顶点 v 上有 $\exp_D(v) \le n-1$, 所以当 $1 \le k \le d$ 时, $\exp_D(k) \le n-1$, 再由引理 1 得，当 $d+1 \le k \le n$ 时, $\exp_D(k) \le n-1+k-d$, 故 $h_A(k) \le M_{n,d}(k)$. 证毕.

引理 3

$$DIS_{n,d}(k) \supset \begin{cases} \{n-d, n-d+1, \ldots, n-1\}, & \text{当 } 1 \le k \le d \text{ 时}, \\ \{n-2d+k, \ldots, n-d+k-1\}, & \text{当 } d+1 \le k \le n \text{ 时}. \end{cases}$$

证明 设 $1 \le t \le d$ 且

$$A = \begin{pmatrix} J_{t\times t} & 0_{t\times(d-t)} & 0_{t\times(n-d-1)} & J_{t\times 1} \\ J_{1\times t} & A_1 & 0_{1\times(n-d-1)} & 0 \\ 0_{(d-t)\times t} & A_2 & 0_{(d-t)\times(n-d-1)} & 0_{(d-t)\times 1} \\ 0_{(n-d-1)\times t} & 0_{(n-d-1)\times(d-t)} & I_{n-d-1} & 0_{(n-d-1)\times 1} \end{pmatrix}_{n\times n},$$

其中 $A_1 = (1,0,\ldots,0)_{1\times(d-t)}$,

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}_{(d-t)\times(d-t)}$$

由命题 1 容易验证 $D(A)$ 是本原的，再由命题 3 和 $\exp_D(k)$ 的定义，有

$$h_A(k)=\exp_{D(A)}(k)=\begin{cases} n-t, & 当\ 1\le k\le d\ 时,\\ n-t+k-d, & 当\ d+1\le k\le n\ 时. \end{cases}$$

让 t 取遍 $\{1,2,\dots,d\}$ 中的所有整数，则引理得证．证毕．

引理 4 设 $d+2\le t\le n$ 且

$$A=\begin{pmatrix} J_{d\times d} & J_{d\times 1} & & & & & & & & \\ J_{1\times d} & 0 & 1 & & & & & & & \\ & 1 & 0 & 1 & & & & & & \\ & 0 & 1 & 0 & 1 & & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & 1 & & & \\ & & & & & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & \vdots & & 0_{(n-t+1)\times(n-t+1)} & \\ & & & & & & 1 & & & \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

则

$$h_A(k)=\begin{cases} t-d, & 当\ 1\le k\le d\ 时,\\ t-2d+k, & 当\ d+1\le k\le t\ 时,\\ 2(t-d), & 当\ t+1\le k\le n\ 时. \end{cases}$$

证明 由命题 1 容易验证 $D(A)$ 是本原的，再由命题 3 和 $\exp_D(k)$ 的定义，有

$$h_A(k)=\exp_{D(A)}(k)=\begin{cases} t-d, & 当\ 1\le k\le d\ 时,\\ t-2d+k, & 当\ d+1\le k\le t\ 时,\\ 2(t-d), & 当\ t+1\le k\le n\ 时. \end{cases}$$

证毕．

推论 1 对任意 $k\ (1\le k\le d)$, 有 $DIS_{n,d}(k)\supset\{2,3,\dots,n-d\}$.

证明 由引理 4 知，当 $1\le k\le d$ 时，对任意的 $t\ (d+2\le t\le n)$ 有 $t-d\in DIS_{n,d}(k)$. 让 t 取遍 $\{d+2,d+3,\dots,n\}$ 中的所有整数即得．证毕．

引理 5 设 $d+2\le k\le n-2$ 且

$$A=\begin{pmatrix} J_{d\times d} & J_{d\times 1} & & & & & & & & & & \\ J_{1\times d} & 0 & 1 & & & & & & & & & \\ & 1 & 0 & 1 & & & & & & & & \\ & 0 & 1 & 0 & 1 & & & & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & 1 & & & & & \\ & & & & & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ & & & & & & 1 & & & & & 0 \\ & & & & & & \vdots & & 0_{(n-t)\times(n-t)} & & & \vdots \\ & & & & & & 1 & & & & & 0 \\ & & & & & & 1 & & & & & 1 \\ & & & & & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

则

$$h_A(k)=\begin{cases} t-d+1, & \text{当 } 1\le k\le d \text{ 时},\\ t-2d+k+1, & \text{当 } d+1\le k\le t \text{ 时},\\ 2(t-d)+1, & \text{当 } t+1\le k\le n-1 \text{ 时},\\ 2(t-d+1), & \text{当 } k=n \text{ 时}. \end{cases}$$

证明 由命题 1 容易验证 $D(A)$ 是本原的，再由命题 3 和 $\exp_D(k)$ 的定义，有

$$h_A(k)=\exp_{D(A)}(k)=\begin{cases} t-d+1, & \text{当 } 1\le k\le d \text{ 时},\\ t-2d+k+1, & \text{当 } d+1\le k\le t \text{ 时},\\ 2(t-d)+1, & \text{当 } t+1\le k\le n-1 \text{ 时},\\ 2(t-d+1), & \text{当 } k=n \text{ 时}. \end{cases}$$

证毕.

推论 2 对任意 k $(d+1\le k\le n-1)$, 有 $DIS_{n,d}(k)\supset\{4,5,\ldots,n-2d+k\}$.

证明 由引理 4 中让 t 取遍 $\{t+2,d+3,\ldots,n\}$ 中的所有整数，则有如下表 1:

k	$DIS_{n,d}(k)\supset$
$d+1$	$\{3,4,\ldots,n-d+1\}$
$d+2$	$\{4,5,\ldots,n-d+2\}$
$d+3$	$\{6,7,\ldots,n-d+3\}\cup\{4\}$
$d+4$	$\{8,9,\ldots,n-d+4\}\cup\{4,6\}$
$\vdots$	$\vdots$
$n-3$	$\{2n-2d-6,2n-2d-5,\ldots,2n-2d-3\}\cup\{4,6,\ldots,2n-2d-8\}$
$n-2$	$\{2n-2d-4,2n-2d-3,2n-2d-1\}\cup\{4,6,\ldots,2n-2d-6\}$
$n-1$	$\{2n-2d-2,2n-2d-1\}\cup\{4,6,\ldots,2n-2d-4\}$

在引理 5 中让 t 取遍 $\{d+2,d+3,\ldots,n\}$ 中的所有整数，则有如下表 2:

k	$DIS_{n,d}(k)\supset$	k	$DIS_{n,d}(k)\supset$
$d+3$	$\{5\}$	$n-3$	$\{5,7,\ldots,2n-d-7\}$
$d+4$	$\{5,7\}$	$n-2$	$\{5,7,\ldots,2n-d-5\}$
$\vdots$	$\vdots$	$n-1$	$\{5,7,\ldots,2n-d-3\}$

综合表 1 和表 2, 则引理得证. 证毕.

引理 6 当 $1\le k\le d$ 时， $1\in DIS_{n,d}(k)$; 当 $d+1\le k\le n$ 时， $2\in DIS_{n,d}(k)$.

证明 设 D 是由完全对称有向图 K_n^* 和 d 个环 $(v_1,v_1),(v_2,v_2),\ldots,(v_d,v_d)$ 组成，则容易验证当 $1\le k\le d$ 时， $\exp_D(k)=1$; 当 $d+1\le k\le n$ 时， $\exp_D(k)=2$. 引理得证. 证毕.

引理 7 对任意 k $(d+1\le k\le n-1)$, 有 $3\in DIS_{n,d}(k)$.

证明 设

$$A=\begin{pmatrix} J_{d\times d} & J_{d\times(n-d-1)} & 0_{d\times 1}\\ J_{(n-d-1)\times d} & 0_{(n-d-1)\times(n-d-1)} & A_3^T\\ 0_{1\times d} & A_3 & 0 \end{pmatrix}_{n\times n},$$

其中 $A_3=(0,\ldots,0,1)_{1\times(n-d-1)}$, A_3^T 是 A_3 的转置. 容易验证当 $d+1\le k\le n-1$ 时, $h_A(k)=\exp_{D(A)}(k)=3$, 所以当 $d+1\le k\le n-1$ 时， $3\in DIS_{n,d}(k)$. 证毕.

定理 1 的证明 由引理 2 知， $DIS_{n,d}(k)\subset\{1,2,\ldots,M_{n,d}(k)\}$. 再由推论 1, 2 的引理 3, 6, 7 可得，当 $1\le k\le d$ 时， $\{1,2,\ldots,M_{n,d}(k)\}=\{1,2,\ldots,n-1\}\subset DIS_{n,d}(k)$; 当 $d+1\le k\le n$

时，$\{2,3,\ldots,M_{n,d}(k)\}=\{2,3,\ldots,n-d+k-1\}\subset DIS_{n,d}(k)$. 另一方面，易知当 $d+1\le k\le n$ 时，$1\notin DIS_{n,d}(k)$. 引理得证. 证毕.

推论 3 所有具有非零对角元的 $n\times n$ 布尔矩阵的广义最大密度指数集是 $\bigcup_{1\le d\le n} DIS_{n,d}(k)$.

3 具有最小范数的极矩阵

设

$$A_i=\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & & & \\ i & 1 & 1 & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & 1 & 1 & & & \\ & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & 1 \\ 1 & & & & & & & 0 \end{pmatrix}_{n\times n} \in PM_n(d) \quad (i=0,1).$$

容易证明对任意的 k $(2\le k\le n)$, 有 $h_{A_0}(k)=h_{A_1}(k)=M_{n,d}(k)$, 但是 $A_0\approx A_1$, 所以极矩阵不唯一. 因此我们只考虑具有最小范数的极矩阵.

定理 2 的证明 显然，$\min\{\sigma(A)\mid A\in S(d,k)\}=n+d$. 很容易证明定理的充分性成立. 假设 $A\in S(d,k)$ 且 $\sigma(A)=n+d$, 则 $D(A)$ 是强连通的并且在 d 个不同的顶点上有环，所以 $D(A)$ 必一个 n 圈和 d 个不同顶点上的环组成，因此有

$$A\approx C=\begin{pmatrix} c_1 & 1 & & & \\ & c_2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 1 & & & & c_n \end{pmatrix},$$

其中 $c_i=0$ 或 1 $(i=1,2,\ldots,n)$ 且 $\sum_{i=1}^{n}c_i=d$. 这就证明了对任意满足 $n-d\le d\le n$ 且 $1\le k\le n$ 或 $1\le d\le n-2$ 且 $1\le k\le d+1$ 的 n,k 必要性成立，以下只需证明对满足 $1\le d\le n-2$ 且 $d+2\le k\le n$ 的 n,k 必要性也成立即可. 为此不失一般性假定 $c_1=1$ 且 $c_n=0$. 如果存在 i $(2\le i\le d)$ 和 j $(i\le j<n-1)$ 使得 $c_i=c_{i+1}=\cdots=c_j=0$ 且 $c_{j+1}=1$, 那么 $\exp_{D(C)}(v_n)=\exp_{D(C)}(v_j)=n$, 从而 $\exp_{D(C)}(d+2)=n$, 故由引理 1 知，对任意的 k $(d+2\le k\le n)$ 有 $\exp_{D(C)}(k)\le n+k-d-2<n-d+k-1$, 再由命题 3 知对任意的 k $(d+2\le k\le n)$ 即有，$h_A(k)=h_C(k)<n-d+k-1$, 与 $A\in S(d,k)$ 矛盾，故当 $1\le i\le d$ 时，$c_i=1$; 当 $d+1\le i\le n$ 时，$c_i=0$. 定理得证. 证毕.

参 考 文 献

[1] Chen X., Zhang Kemin, The Upper Bounds of the Generalized Maximum Density Index of Irreducible Boolean Matrices [J], Linear Algebra Appl., 1997, **256**: 75–93.

[2] Brualdi R. A., Liu Bolian, Generalized Exponents of Primitive Directed Graphs [J], J. Graph Theory, 1990, **14**(4): 483–499.

[3] Brualdi R. A., Ryser H. J., Combinatorial Matrix Theory [M], Combridge Univ. Press, 1991, 53–87.

[4] Guo Zhong, The Exponent Set of Primitive Matrices with Positive Diagonal Entries [J]. Acta Mathematica Sinica, 1988, **31**(2): 283–288.

[5] Liu Bolian, On the Distribution of Exponent Set of Primitive Matrices [J], Acta Mathematica Sinica, 1989, **32**(6): 803–809.

[6] Miao Zhengke, Zhang Kemin, The Local Exponent Sets of Primitive Digraphs Without Loop [J], J. of Nanjing University, Mathematical Biquarterly, 1999, **16**(1): 13–17.