数 学 年 刊
22A:1(2001),115-120.

关于k-超竞赛图的度序列***

周国飞*　　张克民**

提　　要

本文对 3- 超竞赛图的度序列给出了一个充要条件，并且推广了竞赛图中相应的结果.

关键词 超竞赛图，度序列， Laudou 定理
MR (2000) 主题分类 05C65
中图法分类 O175.5　　**文献标识码** A
文章编号 1000-8314(2001)01-0115-06

§1. 引　　言

设 $n,k>1$ 为两个给定的正整数， $H=(V,A)$ 称为 V 上的 k- 超竞赛图，其中 V 是 n 个顶点的集合， A 是 V 中所有有序 k 元组的集合 (每一个 k 元组称为弧)，且满足：若 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_k)$ 及 $b=(b_1,b_2,\cdots,b_k)$ 是 H 中两条不同的弧，则

$$\bigcup_{i=1}^{k}\{a_i\}\neq\bigcup_{i=1}^{k}\{b_i\}.$$

显然，一个 2- 超竞赛图就是普通的竞赛图，于是上述概念是竞赛图概念的的推广.

设 $S=(s_1,s_2,\cdots,s_n)$ 为正整数序列 $(1\le i<j\le n)$. 记

$$S(s_i^+,s_j^-)=(s_1,s_2,\cdots,s_i+1,s_{i+1},\cdots,s_{j-1},s_j-1,\cdots,s_n);$$

同时记 $S'(s_i^+,s_j^-)=(s_1',s_2',\cdots,s_n')$ 为 $S(s_i^+,s_j^-)$ 的一个排列，满足 $s_1'\le s_2'\le\cdots\le s_n'$.

设 $H=(V,A)$ 为 V 上的 k- 超竞赛图． H 的点集与弧集分别记为 $V(H)$ 和 $V(A)$. 设 $a=(v_1,v_2,\cdots,v_k)$ 为 H 中的一条弧 (有时也用 a 表示弧 a 中顶点的集合). 如果 $|i-j|=1$, 我们称 v_i,v_j 在 a 中相邻. 若 $i<j$, 记

$$a(v_i,v_j)=(v_1,\cdots,v_{i-1},v_j,v_{i+1},\cdots,v_{j-1},v_i,v_j,\cdots,v_n)$$

为在 a 中交换 v_i 与 v_j 后得到的弧. 在 a 上定义一个函数 ρ: 若 $v_i\in a$, 则 $\rho(v_i,a)=k-i$; 否则 $\rho(v_i,a)=0$. 设 Q 为 V 的子集，记 $H[Q]$ 为由 Q 诱导出来的子超竞赛图. 设 $v\in V(H)$, 记 $d_H^+(v)$(或简记为 $d^+(v)$)$=\sum\limits_{a\in H}\rho(v,a)$ 为 v 在 H 中的度. 记非降序列 $S=(s_1,s_2,\cdots,s_n)$ 为 k- 超竞赛图的度序列，其中 s_i 为 H 中某个顶点的度. 我们称 H 为传递 k- 超竞赛

本文 1999 年 1 月 12 日收到， 1999 年 12 月 6 日收到修改稿.

*南京大学数学系，南京 210093. **E-mail:** gfzhou@nju.edu.cn

**南京大学数学系，南京 210093.

***国家自然科学基金资助的项目.

图，如果 $V(H)$ 中的顶点 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 能按这样的次序排列： $i<j$ 当且仅当在任何包含 v_i 与 v_j 的弧中， v_i 总是排在 v_j 前面．设 p,q 为两个正整数，规定当 $p<q$ 或 $q<0$ 时， $\binom{p}{q}=0$; 否则 $\binom{p}{q}=\frac{p!}{q!(p-q)!}$.

关于超竞赛图的其它文献，可见文 [1,2,3,5].

§2. 主要结果

定理 2.1 设 $k=3,n>k$, $S=(s_1,s_2,\cdots,s_n)$ 为非降的非负整数序列．则 S 为某一 k- 超竞赛图的度序列当且仅当：对任意的 $r(1\le r\le n)$, 有

$$\sum_{i=1}^{r}s_i\ge\binom{r}{2}\binom{n-2}{k-2},\tag{$\star$}$$

且当 $r=n$ 时取等号.

我们提出如下的猜测：

猜测 2.1 上述定理对 $k\ge 4$ 亦成立.

为了证明定理 2.1, 需要如下几个引理

引理 2.1 设 H 为 n 阶 k- 超竞赛图， $S=(s_1,s_2,\cdots,s_n)$ 为 H 的度序列，其中 $s_1\le s_2\le\cdots\le s_n$. 则

$$\sum_{i=1}^{n}s_i=\binom{k}{2}\binom{n}{k}.$$

证 若 $n<k$, 则 $s_1=s_2=\cdots=s_n=0$, 从而引理显然成立．于是，设 $n\ge k$. 设 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 为满足 $s_i=d^+(v_i)$ 的顶点 $(1\le i\le n)$, 则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}s_i&=\sum_{i=1}^{n}d^+(v_i)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{a\in H}\rho(v_i,a)\\&=\sum_{a\in H}\sum_{i=1}^{n}\rho(v_i,a)=\sum_{a\in H}\binom{k}{2}\\&=\binom{k}{2}\binom{n}{k}.\end{aligned}$$

引理 2.2 设 $S=(s_1,s_2,\cdots,s_n)$ 为非降的非负整数序列，则 S 是某一传递 k- 超竞赛图的度序列当且仅当 $s_i=(i-1)\binom{n-2}{k-2}$, 对任意的 $1\le i\le n$ 成立.

证 由传递 k- 超竞赛图的定义直接可证．详细证明留给读者.

引理 2.3 设 $(s_1,s_2,\cdots,s_n)$ 为 k- 超竞赛图，则对任意 $1\le r\le n$, 有

$$\sum_{i=1}^{r}s_r\ge\binom{r}{2}\binom{n-2}{k-2},$$

且当 $r=n$ 时取等号.

证 设 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 为满足 $d^+(v_i)=s_i$ 的顶点．令

$$\begin{aligned}E&=\{v_1,v_2,\cdots,v_r\},\\E^c&=\{v_{r+1},v_{r+2},\cdots,v_n\},\\W&=\{\text{包含 }E\text{ 和 }E^c\text{ 顶点的弧}\}.\end{aligned}$$

显然，当对任意 $a\in W$, a 中属于 E^c 的点都排在 a 中属于 E 的点前面时，$\sum\limits_{i=1}^{r}s_i$ 达到最小值. 于是

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{r}s_i &= \sum_{i=1}^{r}d^+_{H[E]}v_i+\sum_{a\in W}\sum_{v\in E}\rho(v,a)\\
&=\binom{k}{2}\binom{r}{k}+\sum_{a\in W}\sum_{v\in E}\rho(v,a)\\
&=\binom{k}{2}\binom{r}{k}+\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{\substack{a\in W,\\ |E\cap a|=j}}\sum_{\substack{v\in E\cap a,\\ |E\cap a|=j}}\rho(v,a)\\
&\geq\binom{k}{2}\binom{r}{k}+\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{\substack{a\in W,\\ |E\cap a|=j}}\binom{j}{2}\\
&=\binom{k}{2}\binom{r}{k}+\sum_{j=1}^{k-1}\binom{j}{2}\binom{r}{j}\binom{n-r}{k-j}\\
&=\binom{k}{2}\binom{r}{k}+\binom{r}{2}\sum_{j=1}^{k-1}\binom{r-2}{j-2}\binom{n-r}{k-j}\\
&=\binom{k}{2}\binom{r}{k}+\binom{r}{2}\left[\sum_{j=2}^{k}\binom{r-2}{j-2}\binom{n-r}{k-j}-\binom{r-2}{k-2}\right]\\
&=\binom{k}{2}\binom{r}{k}+\binom{r}{2}\binom{n-2}{k-2}-\binom{r}{2}\binom{r-2}{k-2}\\
&=\binom{r}{2}\binom{n-2}{k-2}.
\end{aligned}$$

当 $r=n$ 时，由引理 2.1 可知等号成立.

引理 2.4　设 $s_1\leq s_2\leq\cdots\leq s_n$ 为满足 ($\star$) 的非负整数序列. 设正整数 t 满足 $s_t\neq(t-1)\binom{n-2}{k-2}$ 并且对任意 $t<l\leq n$,

$$s_l=(l-1)\binom{n-2}{k-2}.$$

则存在整数 p $(1\leq p\leq t-1)$, 使得 $S'(s_t^+,s_p^-)$ 非降且仍满足 $(\star)$.

证　首先证明

$$s_t<(t-1)\binom{n-2}{k-2}.$$

假设 $s_t>(t-1)\binom{n-2}{k-2}$. 一方面,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}s_i&=\sum_{i=1}^{t-1}s_i+\sum_{i=t}^{n}s_i\\
&>\binom{t-1}{2}\binom{n-2}{k-2}+\sum_{i=t}^{n}(i-1)\binom{n-2}{k-2}\\
&=\binom{n}{2}\binom{n-2}{k-2}.
\end{aligned}$$

另一方面， $\sum_{i=1}^{n} s_i = \binom{n}{2}\binom{n-2}{k-2}$, 矛盾.

设 p 为使

$$(s_1, s_2, \cdots, s_{p-1}, s_p - 1, s_{p+1}, \cdots, s_{t-1}, s_t + 1, s_{t+1}, \cdots, s_n)$$

非降的最大正整数. 只需证明当 $p \le r \le t-1$ 时，序列 $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ 满足 $(\star)$ 中的严格不等式即可.

设 r_0 为满足如下条件的最小正整数： $p \le r_0 \le t-1$, 并且当 $r_0 \le r \le t-1$ 时，序列 $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ 满足 ($\star$) 中的严格不等式. 若 $r_0 = p$, 则引理已证. 于是设 $r_0 > p$. 由于

$$\sum_{i=1}^{r_0-1} s_i = \binom{r_0-1}{2}\binom{n-2}{k-2}$$

以及

$$\sum_{i=1}^{r_0} s_i > \binom{r_0}{2}\binom{n-2}{k-2},$$

可以得到

$$\begin{aligned} s_{r_0} &= \sum_{i=1}^{r_0} s_i - \sum_{i=1}^{r_0-1} s_i \\ &> \binom{r_0}{2}\binom{n-2}{k-2} - \binom{r_0-1}{2}\binom{n-2}{k-2} \\ &= (r_0-1)\binom{n-2}{k-2}. \end{aligned}$$

因为 $s_{p-1} < s_p = s_{p+1} = \cdots = s_{t-1}$ 并且 $p < r_0 \le t-1$, 所以

$$s_{r_0-1} = s_{r_0} > (r_0-1)\binom{n-2}{k-2} > (r_0-2)\binom{n-2}{k-2}.$$

故

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{r_0-1} s_i &= \sum_{i=1}^{r_0-2} s_i + s_{r_0-1} \\ &> \binom{r_0-2}{2}\binom{n-2}{k-2} + (r_0-2)\binom{n-2}{k-2} \\ &= \binom{r_0-1}{2}\binom{n-2}{k-2}, \end{aligned}$$

这与 r_0 的最小性矛盾.

引理 2.5 设 $S = (s_1, s_2, \cdots, s_n)$ 为 3- 超竞赛图 H 的度序列. 若 $s_i < s_j$, 则 $S'(s_i^+, s_j^-)$ 为另一 3- 超竞赛图 H' 的度序列.

证 设 $x \in V(H)$, $y \in V(H)$, 使得

$$d^+(y) = s_i, \quad d^+(x) = s_j.$$

设 a 为 H 中包含 x, y 的任意一条弧. 首先证明

$$\rho(x, a) \le \rho(y, a).$$

假设 $\rho(x, a) > \rho(y, a)$. 由于 $k = 3$, 考虑如下两种情形：

情形 1 $\rho(x,a)=\rho(y,a)+1$.

令 $a=(\cdots,x,y,\cdots)$. 则 $(H-a)\cup a(x,y)$ 为以 $S'(s_i^+,s_j^-)$ 为度序列的 3- 超竞赛图.

情形 2 $\rho(x,a)=\rho(y,a)+2$.

设 $a=(x,w,y)$. 我们证明 y,w 在 $H-a$ 中不相邻. 若存在弧 a_1, 使得 $a_1=(\cdots y,w\cdots)$, 则

$$(H-\{a_1,a\})\cup\{(y,x,w),a_1(y,w)\}$$

为以 $S'(s_i^+,s_j^-)$ 为度序列的 3- 超竞赛图. 若存在弧 a_2, 使得 $a_2=(\cdots w,y\cdots)$, 则

$$(H-\{a_2,a\})\cup\{(w,x,y),a_2(y,w)\}$$

为以 $S'(s_i^+,s_j^-)$ 为度序列的 3- 超竞赛图. 类似地, 可以证明 x,w 在 $H-a$ 中不相邻. 设 a_3, a_4 分别为包含 $\{u,w,y\}$ 与 $\{u,w,x\}$ 的弧. 考虑下列四种子情形:

子情形 2.1 $a_3=(w,u,y)$, $a_4=(w,u,x)$.

令 $H'=(H-\{(x,w,y),(w,u,y),(w,u,x)\})\cup\{(w,y,x),(u,w,y),(w,x,u)\}$. 则 H' 为以 $S'(s_i^+,s_j^-)$ 为度序列的 3- 超竞赛图.

子情形 2.2 $a_3=(w,u,y)$, $a_4=(x,u,w)$.

令 $H'=(H-\{(w,u,y),(x,u,w)\})\cup\{(w,y,u),(u,x,w)\}$. 则 H' 为以 $S'(s_i^+,s_j^-)$ 为度序列的 3- 超竞赛图.

子情形 2.3 $a_3=(y,u,w)$, $a_4=(w,u,x)$.

令 $H'=(H-\{(x,w,y),(y,u,w),(w,u,x)\})\cup\{(y,w,x),(u,y,w),(w,x,u)\}$. 则 H' 为以 $S'(s_i^+,s_j^-)$ 为度序列的 3- 超竞赛图.

子情形 2.4 $a_3=(y,u,w)$, $a_4=(x,u,w)$.

令 $H'=(H-\{(x,w,y),(y,u,w),(x,u,w)\})\cup\{(y,x,w),(u,y,w),(x,w,u)\}$. 则 H' 为以 $S'(s_i^+,s_j^-)$ 为度序列的 3- 超竞赛图.

至此, 我们证明了对任何包含 x,y 的弧 a, 有

$$\rho(x,a)\le\rho(y,a).$$

因为 $d^+(x)>d^+(y)$, 所以存在弧 a_1 与 a_2, 分别包含顶点集 $\{u,v,x\}$ 与 $\{u,v,y\}$, 并且满足 $\rho(x,a_1)>\rho(y,a_2)$. 若 $\rho(x,a_1)=\rho(y,a_2)+1$, 则交换弧 a_1 与 a_2 中 x 与 y 的位置后, 就得到一个以 $S'(s_i^+,s_j^-)$ 为度序列的新的 3- 超竞赛图. 于是, 设 $\rho(x,a_1)=\rho(y,a_2)+2$. 由于 $k=3$, 可设 $a_1=(x,u,v)$, $a_2=(\cdots,y)$. 若 $a_2=(v,u,y)$, 则

$$(H-\{a_1,a_2\})\cup\{a_1(x,u),a_2(u,y)\}$$

为以 $S'(s_i^+,s_j^-)$ 为度序列的 3- 超竞赛图. 因此, 设 $a_2=(u,v,y)$. 令 a_3 为包含顶点 $\{v,x,y\}$ 的弧. 因为 $\rho(x,a_3)\le\rho(y,a_3)$, 所以或者 $a_3=(\cdots,y,x,\cdots)$, 或者 $a_3=(y,v,x)$. 若 $a_3=(\cdots,y,x,\cdots)$, 则

$$(H-\{a_1,a_2,a_3\})\cup\{(y,u,v),(u,v,x),a_3(x,y)\}$$

为以 $S'(s_i^+,s_j^-)$ 为度序列的 3- 超竞赛图. 若 $a_3=(y,v,x)$, 则

$$(H-\{a_1,a_2,a_3\})\cup\{(v,u,x),(u,y,v),(y,x,v)\}$$

为以 $S'(s_i^+,s_j^-)$ 为度序列的 3- 超竞赛图.

定理 2.1 的证明 设 $S=(s_1,s_2,\cdots,s_n)$ 为满足 $(\star)$ 的非降非负整数序列.

必要性 由引理 2.3 直接可得.

充分性 若 $n<3$, 定理显然成立. 因此，设 $n\geq 3$. 若对所有 $1\leq i\leq n$, 都有

$$s_i=(i-1)\binom{n-2}{k-2},$$

则由引理 2.2 可知，S 是一个传递 3- 超竞赛图的度序列. 因此，设 t 为满足 $s_t<(t-1)\binom{n-2}{k-2}$ 的最大整数. 反复应用引理 2.4, 得到一个满足 $(\star)$ 的新序列

$$S'=(s_1',s_2',\cdots,s_n'),$$

使得对任意 $l\geq t$, 有

$$s_l'=(l-1)\binom{n-2}{k-2}.$$

重复上述步骤，最终可得到满足 $(\star)$ 的序列

$$S''=(s_1'',s_2'',\cdots,s_n''),$$

使得对所有 $1\leq l\leq n$, 有

$$s_l''=(l-1)\binom{n-2}{k-2}.$$

于是，由引理 2.2 可知，S'' 为传递 3- 超竞赛图 H' 的度序列. 再反复应用引理 2.5, 最终可得到以 S 为度序列的 3- 超竞赛图 H''.

参 考 文 献

[1] Assous, R., Enchainabilite et seuil de monomorphie des tournois n-aires [J], *Discrete Math.*, **62**(1986), 119–125.

[2] Barbut, E. & Bialostocki, A., A generalization of rotational tournaments [J], *Discrete Math.*, **76**(1989), 81–87.

[3] Frankl, P., What must be contained in every oriented k-uniform hypergraph [J], *Discrete Math.*, **62**(1986), 311–313.

[5] Harary, F. & Moser, L., The theory of round robin tournament [J], *Amer. Math. Monthly*, **73**(1966), 231–246.

[6] Gutin, G. & Yeo, A., Hamiltonian paths and cycles in hypertournaments [J], *J. Graph Theory*, **25**(1997), 277–286.

[7] Laudau, H. G., On dominance relation and the structure of animal societies, III: The condition for a score structure [J], *Bull. Math. Biophys*, **15**(1953), 143–148.