数 学 年 刊
22A: 4(2001),517-524.

直径为 d 的超环面网的 $(d,2n)$- 控制数***

吕长虹*　　张克民**

提　　要

n 维超环面网 $C(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 定义如下：顶点集为 $\{(x_1,\cdots,x_n)|0\le x_i<d_i\ (1\le i\le n)\}$；每个顶点 $(x_1,\cdots,x_n)$ 与 $(x_1\pm1,x_2,\cdots,x_n),(x_1,x_2\pm1,\cdots,x_n),\cdots,(x_1,x_2,\cdots,x_n\pm1)$ 这 $2n$ 个顶点相邻．(d,m)- 控制数是用来刻画互连网络数据传输某种模式的一个新参数．本文证明了：当 $d=\mathrm{diam}(C(d_1,d_2,\cdots,d_n))$ 时，n 维超环面网 $C(d_1,d_2,\cdots,d_n)\ne C(3,3,\cdots,3)$ 的 $(d,2n)$-控制数为 2 $(n\ge3,\ d_i\ge3,\ i\in\{1,2,\cdots,n\})$.

关键词　图，可靠性，直径，控制数
MR (2000) 主题分类　05C40, 68M10, 68M15, 68R10
中图法分类　O157.5　　**文献标识码**　A
文章编号　1000-8314(2001)04-0517-08

§1. 引　　言

本文用图来表示网络．在这儿没有定义的术语和概念可参见文 [1]．令 $G=(V(G),E(G))$ 是一个有限无向图，$V(G)$ 表示 G 的顶点集，$E(G)$ 表示 G 的边集．路 $P:=v_0\to v_1\to\cdots\to v_{p-1}\to v_p$ 的路长为 p, 用 $|P|$ 表示，v_0 和 v_p 称为路的端点，$v_1,v_2,\cdots,v_{p-1}$ 称为中间点．

令 S 是 $V(G)$ 的一个非空真子集，$x\in V(G-S)$, 连接 x 和 S 中某个点的路称为一条 (x,S)- 路．图 G 的直径是 G 中所有两点之间距离的最大值．

n 维超环面网 $C(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 定义如下：顶点集为 $\{(x_1,\cdots,x_n)|0\le x_i<d_i\ (1\le i\le n)\}$; 每个顶点 $(x_1,\cdots,x_n)$ 与 $(x_1\pm1,x_2,\cdots,x_n),(x_1,x_2\pm1,\cdots,x_n),\cdots,(x_1,x_2,\cdots,x_n\pm1)$ 这 $2n$ 个顶点相邻．n 维超环面网是 $2n$- 连通的和 $2n$ 正则的．超环面网在网络理论被广泛利用，可参见文 [2,10,13].

为了刻画网络中数据传输延迟的可靠性，Hsu 和 Lyuu[5], Flandrin 和 Li[3] 分别独立地提出 m- 直径 即宽直径）的概念：在图 G 中任意取一对顶点 (x,y), 使得 x 和 y 之间至少存在 m 条内部顶点不相交长度不超过 d 的路的最小的整数 d 称为 x 和 y 的 m- 距离，用 $D_m(x,y)_G$ 表示．图 G 的 m- 距离，表示为 $D_m(G)=\max\limits_{x,y\in V(G)}\{D_m(x,y)_G\}$. 有关 m- 直径的结果可参见文 [3–8].

本文 1999 年 11 月 8 日收到，2001 年 4 月 2 日收到修改稿．

*湖南师范大学数学系，长沙 410081. **E-mail:** changhonglu@math.nctu.edu.tw

**南京大学数学系，南京 210093.

***国家自然科学基金 (No.19971086) 和江苏省自然科学基金资助的项目．

最近， Li 和 Xu[9] 定义了一个新参数 (d,m)- 控制数，用来刻画网络"资源分享"的可靠性. 在某种意义上，它比宽直径更能精确刻画网和络的可靠性.

定义 令 G 是一个 m- 连通图， S 是 $V(G)$ 的非空真子集， $y \in G-S$, 给定一个正整数 d, y 在图 G 中被 $S(d,m)$- 控制，如果在 G 中至少存在 m 条内部顶点不交的 (y,S)-路，并且每条路长不超过 d. 如果 S 能 (d,m)- 控制 $G-S$ 中的每一点，则称 S 为 G 的 (d,m)- 控制集，用 $S_{d,m}(G)$ 表示. 参数

$$s_{d,m}(G)=\min\{|S_{d,m}(G)|: S_{d,m}(G)\ \text{是}G\ \text{的}(d,m)-\text{控制集}\},$$

被称为 G 的 (d,m)- 控制数.

文 [9] 中已经证明了 m- 连通图的 (d,m)- 控制集和 (d,m)- 控制数的一些一般性质. 虽然，对 m- 连通图而言，当 $d \geq D_m(G)$ 时， $s_{d,m}(G)=1$. 因而当 $d<D_m(G)$ 时，求 $s_{d,m}(G)$ 的确切值是非常必要和有意义的. 有关特殊网络超方体 Q_m 和无向 de Bruijn 图 $UB(m)$ 的 (d,m)- 控制数可参见 [9,11,12,14].

本文确定了 $C(d_1,d_2,\cdots,d_n)\neq C(3,3,\cdots,3)$ $(d_i\geq 3, n\geq 3)$ 的 $(d,2n)$- 控制数，当 $d=D_2n(G)-1=\mathrm{diam}(G)$ 时.

§2. 事实和主要结果

为了方便起见，用 e_i, e_i' 表示 $\lfloor\frac{d_i}{2}\rfloor$ 和 $\lceil\frac{d_i}{2}\rceil$, $i=1,2,\cdots,n$. 对 $0\leq x_i\leq d_i-1$, 定义函数 $\delta(x_i)$ 如下 $\delta(x_i)=1$ 当 $e_i<x_i\leq d_i-1$ 时； $\delta(x_i)=-1$ 当 $0<x_i\leq e_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 时.

事实 2.1 当 $n\geq 2$, $d_i\geq 3$ $(1\leq i\leq n)$ 时， $C(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 是 $2n$- 正则的.

事实 2.2[7] 当 $n\geq 2$, $d_i\geq 3$ $(1\leq i\leq n)$ 时，

$$\mathrm{diam}(C(d_1,d_2,\cdots,d_n))=\sum_{1\leq i\leq n}\lfloor\frac{d_i}{2}\rfloor.$$

事实 2.3[7] 令 $G=C(d_1,d_2,\cdots,d_n)$, $n\geq 3$, $d_1\geq d_2\geq\cdots\geq d_n\geq 3$. 则 $D_{2n}(G)=1+\sum\limits_{1\leq i\leq n}\lfloor\frac{d_i}{2}\rfloor=\mathrm{diam}(G)+1$.

主要定理 令 $G=C(d_1,d_2,\cdots,d_n)\neq C(3,3,\cdots,3)$, $n\geq 3$, $d_i\geq 3$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 则当 $d=\mathrm{diam}(G)$ 时， G 的 $(d,2n)$- 控制数为 2.

§3. 主要定理的证明

$G=C(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ $(n\geq 3, d_i\geq 3)$, 令 $\mathbf{0}$ 和 $\mathbf{e}$ 分别表示顶点 $(0,0,\cdots,0)$ 和 $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$, $S=\{\mathbf{0},\mathbf{e}\}$, $\mathbf{x}\in V(G-S)$, 如下定义一个好的 $(\mathbf{x},S)_k$- 路系统:

(1) 存在 $2n$ 条内部顶点不相交的 $(\mathbf{x},S)$- 路 $P_1,P_2,\cdots,P_{2n}$.

(2) $P_1,P_2,\cdots,P_k$ 是 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{0}$ 之间的路； $P_{k+1},\cdots,P_{2n}$ 是 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{e}$. 在 $P_1,P_2,\cdots,P_{2n}$ 之间的路，并且至少有一条路的长度小于 $\mathrm{diam}(G)$ $(1\leq k\leq 2n-1)$.

(3) $|P_i|\leq\mathrm{diam}(G)$, $i=1,2,\cdots,2n$.

引理 3.1 $G=C(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ $(n\geq 3, d_i\geq 3)$, 如果对任意的 $\mathbf{x}\in V(G-S)$, 存在一个好的 $(\mathbf{x},S)_k$- 路系统， 则 S 是 G 的一个 $(d,2n)$- 控制集， $d=\mathrm{diam}(G)$.

因此只要证明：对任意的 $\mathbf{x}\in V(G-S)$, 存在一个好的 $(\mathbf{x},S)_k$- 路系统. 这里需要以下两个引理:

引理 3.2 $G=C(d_1,d_2,d_3)\neq C(3,3,3)$ $(d_i\geq 3)$, $S=\{(0,0,0),(e_1,e_2,e_3)\}$, 对任意的 $\mathbf{x}\in V(G-S)$, 存在一个好的 $(\mathbf{x},S)_k$- 路系统.

证 由 x_1,x_2,x_3 的对称性, 只要考虑以下三种情况.

情形 1 $\mathbf{x}=(x_1,0,0)$, $x_1\neq 0$.

子情形 1a $x_1\neq e_1$.

如下构造六条路 P_i $(1\leq i\leq 6)$:

$$P_1:\mathbf{x}=(x_1,0,0)\to(x_1+\delta(x_1),0,0)\to(x_1+2\delta(x_1),0,0)\to\cdots$$
$$\to(0,0,0)\quad |P_1|\leq e_1<\mathrm{diam}(G);$$
$$P_2:\mathbf{x}=(x_1,0,0)\to(x_1,-1,0)\to(x_1+\delta(x_1),-1,0)\to\cdots\to(0,-1,0)$$
$$\to(0,0,0)\quad |P_2|\leq e_1+2\leq\mathrm{diam}(G);$$
$$P_3:\mathbf{x}=(x_1,0,0)\to(x_1,0,-1)\to(x_1+\delta(x_1),0,-1)\to\cdots\to(0,0,-1)$$
$$\to(0,0,0)\quad |P_3|\leq e_1+2\leq\mathrm{diam}(G);$$
$$P_4:\mathbf{x}=(x_1,0,0)\to(x_1-\delta(x_1),0,0)\to\cdots\to(e_1,0,0)\to(e_1,1,0)\to\cdots$$
$$\to(e_1,e_2,0)\to(e_1,e_2,1)\to\cdots\to(e_1,e_2,e_3)\quad |P_4|\leq\mathrm{diam}(G);$$
$$P_5:\mathbf{x}=(x_1,0,0)\to(x_1,1,0)\to\cdots\to(x_1,e_2,0)\to(x_1,e_2,1)\to\cdots\to(x_1,e_2,e_3)$$
$$\to(x_1-\delta(x_1),e_2,e_3)\to\cdots\to(e_1,e_2,e_3)\quad |P_5|\leq\mathrm{diam}(G);$$
$$P_6:\mathbf{x}=(x_1,0,0)\to(x_1,0,1)\to\cdots\to(x_1,0,e_3)\to(x_1-\delta(x_1),0,e_3)\to\cdots$$
$$\to(e_1,0,e_3)\to(e_1,1,e_3)\to\cdots\to(e_1,e_2,e_3)\quad |P_6|\leq\mathrm{diam}(G).$$

容易发现 $\{P_1,\cdots,P_6\}$ 是一个好的 $(\mathbf{x},S)_3$- 路系统.

子情形 1b $x_1=e_1$ 即 $\mathbf{x}=(e_1,0,0)$.

$$P_1:\mathbf{x}\to(e_1-1,0,0)\to\cdots\to(0,0,0)\quad |P_1|\leq e_1<\mathrm{diam}(G);$$
$$P_2:\mathbf{x}\to(e_1+1,0,0)\to\cdots\to(d_1-1,0,0)\to(0,0,0)\quad |P_2|\leq e_1'<\mathrm{diam}(G);$$
$$P_3:\mathbf{x}\to(e_1,0,-1)\to(e_1-1,0,-1)\to\cdots\to(0,0,-1)\to(0,0,0)$$
$$|P_3|\leq e_1+2\leq\mathrm{diam}(G);$$
$$P_4:\mathbf{x}\to(e_1,-1,0)\to(e_1-1,-1,0)\to\cdots\to(0,-1,0)\to(0,0,0)$$
$$|P_4|\leq e_1+2\leq\mathrm{diam}(G);$$
$$P_5:\mathbf{x}\to(e_1,1,0)\to\cdots\to(e_1,e_2,0)\to(e_1,e_2,1)\to\cdots\to(e_1,e_2,e_3)$$
$$|P_5|\leq e_2+e_3<\mathrm{diam}(G);$$
$$P_6:\mathbf{x}\to(e_1,0,1)\to\cdots\to(e_1,0,e_3)\to(e_1,1,e_3)\to\cdots\to(e_1,e_2,e_3)$$
$$|P_6|\leq e_2+e_3<\mathrm{diam}(G).$$

容易发现 $\{P_1,\cdots,P_6\}$ 是一个好的 $(\mathbf{x},S)_4$- 路系统.

情形 2 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,0)$, $x_1\neq 0$, $x_2\neq 0$.

子情形 2a $\mathbf{x}=(e_1,e_2,0)$.

$$P_1:\mathbf{x}\to(e_1-1,e_2,0)\to\cdots\to(0,e_2,0)\to(0,e_2-1,0)\to\cdots\to(0,0,0)$$

$|P_1| = e_1 + e_2 < \mathrm{diam}(G)$;

$P_2 : \mathbf{x} \to (e_1, e_2 - 1, 0) \to \cdots \to (e_1, 0, 0) \to (e_1 - 1, 0, 0) \to \cdots \to (0, 0, 0)$

$|P_2| = e_1 + e_2 < \mathrm{diam}(G)$;

$P_3 : \mathbf{x} \to (e_1 + 1, e_2, 0) \to (e_1 + 1, e_2 - 1, 0) \to \cdots \to (e_1 + 1, 0, 0) \to (e_1 + 2, 0, 0)$

$\to \cdots \to (0, 0, 0) \quad |P_3| = e_1' + e_2 \le \mathrm{diam}(G)$;

$P_4 : \mathbf{x} \to (e_1, e_2 + 1, 0) \to (e_1 - 1, e_2 + 1, 0) \to \cdots \to (0, e_2 + 1, 0) \to (0, e_2 + 2, 0)$

$\to \cdots \to (0, 0, 0) \quad |P_4| = e_1 + e_2' \le \mathrm{diam}(G)$;

$P_5 : \mathbf{x} \to (e_1, e_2, 1) \to \cdots \to (e_1, e_2, e_3) \quad |P_5| = e_3 < \mathrm{diam}(G)$;

$P_6 : \mathbf{x} \to (e_1, e_2, -1) \to \cdots \to (e_1, e_2, e_3) \quad |P_6| = e_3' < \mathrm{diam}(G)$.

容易发现 $\{P_1, \cdots, P_6\}$ 是一个好的 $(\mathbf{x}, S)_4$- 路系统.

子情形 2b $\mathbf{x} = (x_1, e_2, 0)$, $x_1 \ne 0, e_1$.

$P_1 : \mathbf{x} \to (x_1 + \delta(x_1), e_2, 0) \to \cdots \to (0, e_2, 0) \to (0, e_2 - 1, 0) \to \cdots$

$\to (0, 0, 0) \quad |P_1| \le e_1 + e_2 < \mathrm{diam}(G)$;

$P_2 : \mathbf{x} \to (x_1, e_2 - 1, 0) \to \cdots \to (x_1, 0, 0) \to (x_1 + \delta(x_1), 0, 0) \to \cdots$

$\to (0, 0, 0) \quad |P_2| \le e_1 + e_2 < \mathrm{diam}(G)$;

$P_3 : \mathbf{x} \to (x_1, e_2 + 1, 0) \to (x_1 + \delta(x_1), e_2 + 1, 0) \to \cdots \to (0, e_2 + 1, 0)$

$\to (0, e_2 + 2, 0) \to \cdots \to (0, 0, 0) \quad |P_3| \le e_1 + e_2' \le \mathrm{diam}(G)$;

$P_4 : \mathbf{x} \to (x_1 - \delta(x_1), e_2, 0) \to \cdots \to (e_1, e_2, 0) \to (e_1, e_2, 1)$

$\to \cdots \to (e_1, e_2, e_3) \quad |P_4| \le e_1 + e_3 < \mathrm{diam}(G)$;

$P_5 : \mathbf{x} \to (x_1, e_2, 1) \to \cdots \to (x_1, e_2, e_3) \to (x_1 - \delta(x_1), e_2, e_3)$

$\to \cdots \to (e_1, e_2, e_3) \quad |P_5| \le e_1 + e_3 < \mathrm{diam}(G)$;

$P_6 : \mathbf{x} \to (x_1, e_2, -1) \to (x_1 - \delta(x_1), e_2, -1) \to \cdots \to (e_1, e_2, -1)$

$\to (e_1, e_2, -2) \to \cdots \to (e_1, e_2, e_3) \quad |P_6| \le e_1 + e_3' \le \mathrm{diam}(G)$.

容易发现 $\{P_1, \cdots, P_6\}$ 是一个好的 $(\mathbf{x}, S)_3$- 路系统.

子情形 2c $\mathbf{x} = (x_1, x_2, 0)$, $x_1 \ne 0, e_1$; $x_2 \ne 0, e_2$.

首先构造五条路:

$P_1 : \mathbf{x} \to (x_1 + \delta(x_1), x_2, 0) \to \cdots \to (0, x_2, 0) \to (0, x_2 + \delta(x_2), 0)$

$\to \cdots \to (0, 0, 0) \quad |P_1| \le e_1 + e_2 < \mathrm{diam}(G)$;

$P_2 : \mathbf{x} =\to (x_1, x_2 + \delta(x_2), 0) \to \cdots \to (x_1, 0, 0) \to (x_1 + \delta(x_1), 0, 0)$

$\to \cdots \to (0, 0, 0) \quad |P_2| \le e_1 + e_2 < \mathrm{diam}(G)$;

$P_3 : \mathbf{x} \to (x_1 - \delta(x_1), x_2, 0) \to \cdots \to (e_1, x_2, 0)$

$\to (e_1, x_2 - \delta(x_2), 0) \to \cdots \to (e_1, e_2, 0) \to (e_1, e_2, 1)$

$\to \cdots \to (e_1, e_2, e_3) \quad |P_3| \le e_1 + e_2 + e_3 = \mathrm{diam}(G)$;

$$P_4:\mathbf{x}\to(x_1,x_2-\delta(x_2),0)\to\cdots\to(x_1,e_2,0)$$
$$\to(x_1,e_2,1)\to\cdots\to(x_1,e_2,e_3)\to(x_1-\delta(x_1),e_2,1)$$
$$\to\cdots\to(e_1,e_2,e_3)\quad |P_4|\le e_1+e_2+e_3=\mathrm{diam}(G);$$
$$P_5:\mathbf{x}\to(x_1,x_2,1)\to\cdots\to(x_1,x_2,e_3)$$
$$\to(x_1-\delta(x_1),x_2,e_3)\to\cdots\to(e_1,x_2,e_3)\to(e_1,x_2-\delta(x_2),e_3)$$
$$\to\cdots\to(e_1,e_2,e_3)\quad |P_5|\le e_1+e_2+e_3=\mathrm{diam}(G).$$

如果 $|P_1|<e_1+e_2$, 构造 P_6 如下

$$P_6:\mathbf{x}\to(x_1,x_2,-1)\to(x_1+\delta(x_1),x_2,-1)\to\cdots(0,x_2,-1)\to$$
$$(0,x_2+\delta(x_2),-1)\to\cdots\to(0,0,-1)\to(0,0,0)\qquad(*)$$
$$|P_6|\le e_1+e_2+1\le\mathrm{diam}(G).$$

如果 $|P_3|<e_1+e_2+e_3$, 构造 P_6 如下

$$P_6:\mathbf{x}\to(x_1,x_2,-1)\to(x_1-\delta(x_1),x_2,-1)\to\cdots\to(e_1,x_2,-1)$$
$$\to(e_1,x_2-\delta(x_2),-1)\to\cdots\to(e_1,e_2,-1)\to(e_1,e_2,-2)$$
$$\to\cdots\to(e_1,e_2,e_3)\quad |P_6|\le e_1+e_2+e_3'-1\le\mathrm{diam}(G).$$

如果 $|P_1|=e_1+e_2$, $|P_3|=e_1+e_2+e_3$, 则 $x=(e_1',e_2',0)=(d_1-1,d_2-1,0)$. 因而有 $d_1=d_2=3$. 既然 $G\ne C(3,3,3)$, 即 $d_3\ge 4$, 可以象 $(*)$ 一样构造 P_6, 其中 $|P_6|=e_1+e_2+2\le\mathrm{diam}(G)$.

容易发现 $\{P_1,\cdots,P_6\}$ 是一个好的 $(\mathbf{x},S)_2$- 路系统 或者 $(\mathbf{x},S)_3$- 路.

情形 3 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $x_i\ne 0$, $i=1,2,3$.

子情形 3a $x_i\ne e_i$, $i=1,2,3$.

$$P_1:\mathbf{x}\to(x_1+\delta(x_1),x_2,x_3)\to\cdots\to(0,x_2,x_3)\to(0,x_2+\delta(x_2),x_3)$$
$$\to\cdots\to(0,0,x_3)\to(0,0,x_3+\delta(x_3))\to\cdots\to(0,0,0)\quad |P_1|\le e_1+e_2+e_3;$$
$$P_2:\mathbf{x}\to(x_1,x_2+\delta(x_2),x_3)\to\cdots\to(x_1,0,x_3)\to(x_1,0,x_3+\delta(x_3))$$
$$\to\cdots\to(x_1,0,0)\to(x_1+\delta(x_1),0,0)\to\cdots\to(0,0,0)\quad |P_2|\le e_1+e_2+e_3;$$
$$P_3:\mathbf{x}\to(x_1,x_2,x_3+\delta(x_3))\to\cdots\to(x_1,x_2,0)\to(x_1+\delta(x_1),x_2,0)\to\cdots$$
$$\to(0,x_2,0)\to(0,x_2+\delta(x_2),0)\to\cdots\to(0,0,0)\quad |P_3|\le e_1+e_2+e_3;$$
$$P_4:\mathbf{x}\to(x_1-\delta(x_1),x_2,x_3)\to\cdots\to(e_1,x_2,x_3)\to(e_1,x_2-\delta(x_2),x_3)$$
$$\to\cdots\to(e_1,e_2,x_3)\to(e_1,e_2,x_3-\delta(x_3))\to\cdots\to(e_1,e_2,e_3)\quad |P_4|\le e_1+e_2+e_3;$$
$$P_5:\mathbf{x}\to(x_1,x_2-\delta(x_2),x_3)\to\cdots\to(x_1,e_2,x_3)\to(x_1,e_2,x_3-\delta(x_3))$$
$$\to\cdots\to(x_1,e_2,e_3)\to(x_1-\delta(x_1),e_2,e_3)\to\cdots\to(e_1,e_2,e_3)\quad |P_5|\le e_1+e_2+e_3;$$
$$P_6:\mathbf{x}\to(x_1,x_2,x_3-\delta(x_3))\to\cdots\to(x_1,x_2,e_3)\to(x_1-\delta(x_1),x_2,e_3)\to\cdots$$
$$\to(e_1,x_2,e_3)\to(e_1,x_2-\delta(x_2),e_3)\to\cdots\to(e_1,e_2,e_3)\quad |P_6|\le e_1+e_2+e_3.$$

如 $|P_1|=\mathrm{diam}(G)$, 一定有 $\mathbf{x}=(e_1',e_2',e_3')$; 如 $|P_4|=\mathrm{diam}(G)$, 一定有 $\mathbf{x}=(d_1-1,d_2-1,d_3-1)$. 所以, 由 $G\ne C(3,3,3)$, $|P_1|$ 或 $|P_4|$ 小于 $\mathrm{diam}(G)$, 对任意的 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$.

显然, $\{P_1,\cdots,P_6\}$ 是一个好的 $(\mathbf{x},S)_3$- 路系统.

子情形 3b $\mathbf{x}=(x_1,e_2,e_3)$, $x_1\neq 0,e_1$.

证明与子情形 1a 类似.

子情形 3c $\mathbf{x}=(x_1,x_2,e_3)$ 且对于 $i=1,2$, $x_i\neq e_i$, $x_i\neq 0$.

证明与子情形 2c 类似.

引理 3.3 令 G' 和 G 分别是 $C(d_1,\cdots,d_{n-1})$, $C(d_1,\cdots,d_n)$, $n\geq 4, d_i\geq 3$, $i=1,2,\cdots,n$.

$$\mathbf{0}'=(0,\cdots,0),\quad \mathbf{e}'=(e_1,\cdots,e_{n-1}).$$

$$S'=\{\mathbf{0}',\mathbf{e}'\},\quad S=\{\mathbf{0},\mathbf{e}\}.$$

对任意的 $\mathbf{x}'\in V(G'-S')$, 如果存在一个好的 $(\mathbf{x}',S')_k$- 路系统, 则对任意 $\mathbf{x}\in V(G-S)$, 也存在一个好的 $(\mathbf{x},S)_k$- 路系统.

证 对任意的 $\mathbf{x}'\in V(G'-S')$, $\{P'_1,\cdots,P'_k,P'_{k+1},\cdots,P'_{2n-2}\}$ 是一个好的 $(\mathbf{x}',S')_k$- 路系统, 并且 $P'_1,P'_2,\cdots,P'_k$ 是 $\mathbf{x}'$ 和 $\mathbf{0}'$ 之间的路, $P'_{k+1},\cdots,P'_{2n-2}$ 是 $\mathbf{x}'$ 和 $\mathbf{e}'$ 之间的路 $(1\leq k\leq 2n-3)$. 令 $|P'_i|=l'_i$, $i=1,2,\cdots,2n-2$. 用 $\mathbf{x}'=P'_i(0)\to P'_i(1)\to\cdots\to P'_i(l'_i)$ 表示 P'_i 的顶点序列. 不失一般性, 可以假定

$$|l'_1|\leq|l'_2|\leq\cdots\leq|l'_k|\quad\text{和}\quad|l'_{k+1}|\leq|l'_{k+2}|\leq\cdots\leq|l'_{2n-2}|.$$

这里将证明存在一个好的 $(\mathbf{x},S)_k$- 路系统, 对 $\mathbf{x}\in V(G-S)$.

由 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的对称性, 只需要考虑下面五种情形.

情形 1 $\mathbf{x}=(0,\cdots,0,x_n)$, $x_n\neq 0$.

证明类似于引理 3.2 情形 1.

情形 2 $\mathbf{x}=(e_1,e_2,\cdots,e_{n-1},x_n)$, $x_n\neq e_n$.

证明类似于引理 3.2 子情形 2a 或子情形 3b.

情形 3 $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_{n-1},0)$, $\mathbf{x}'=(x_1,\cdots,x_{n-1})\neq\mathbf{e}',\mathbf{0}'$

用 P'_i 构造 P_i, $1\leq i\leq 2n-2$.

$$\mathbf{x}=(P'_i(0),0)\to(P'_i(1),0)\to\cdots\to(P'_i(l'_i),0)=\mathbf{0}\quad(1\leq i\leq k);$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}&=(P'_{k+1}(0),0)\to\cdots\to(P'_{k+1}(l'_{k+1}),0)\to(P'_{k+1}(l'_{k+1}),1)\\&\to\cdots\to(P'_{k+1}(l'_{k+1}),e_n)=\mathbf{e};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}&=(P'_i(0),0)\to\cdots\to(P'_i(l'_i-1),0)\to(P'_i(l'_i-1),1)\\&\to\cdots\to(P'_i(l'_i-1),e_n)\to(P'_i(l'_i),e_n)=\mathbf{e}\quad(k+2\leq i\leq 2n-2).\end{aligned}$$

显然, $P_1,\cdots,P_{2n-2}$ 是内部顶点不相交的 $(\mathbf{x},S)$- 路, 并且每条路长度不超过 $\mathrm{diam}(G)$, 其中 P_1 的长度小于 $\mathrm{diam}(G)$. 现在, 我们构造其它两条路.

(i) 如果 $|P'_1|<\mathrm{diam}(G')$,

$$\begin{aligned}P_{2n-1}:\mathbf{x}&\to(P'_1(0),-1)\to(P'_1(1),-1)\to\cdots\to(P'_1(l'_1),-1)\\&\to(P'_1(l'_1),0)=\mathbf{0};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_{2n}:\mathbf{x}&\to(P'_{k+1}(0),1)\to\cdots\to(P'_{k+1}(0),e_n)\to(P'_{k+1}(1),e_n)\\&\to\cdots\to(P'_{k+1}(l'_{k+1}),e_n)=\mathbf{e}.\end{aligned}$$

因为 $|P_1'| < \mathrm{diam}(G')$, $d_n \geq 3$, 所以 P_{2n-1} 和 P_{2n} 的长度不超过 $\mathrm{diam}(G)$. 如果 $P_1, P_2, \cdots, P_{2n}$ 不是内部顶点不相交的，则存在某条路 P_i $(k+2 \leq i \leq 2n-3)$, 它与 P_{2n} 存在公共内部顶点 $(P_i'(l_i'-1), 1)$, 即

$$(P_i'(l_i'-1),1) = (P_{k+1}'(0),1) = (x',1).$$

故 $l_i' = 1$. 由 $l_{k+1}' \leq l_i'$, 有 $l_{k+1}' = 1$. 则 P_{k+1}' 与 P_i' 是一条公共路, 矛盾 !所以 $\{P_1, \cdots, P_{2n}\}$ 是一个好的 $(\mathbf{x}, S)_k$- 路系统.

(ii) $|P_{k+1}'| < \mathrm{diam}(G')$,

$$\begin{aligned} P_{2n-1} : \mathbf{x} &\to (P_{k+1}'(0), -1) \to (P_{k+1}'(1), -1) \to \cdots \to (P_{k+1}'(l_{k+1}'), -1) \\ &\to (P_{k+1}'(l_{k+1}'), -2) \to \cdots \to (P_{k+1}'(l_{k+1}'), e_n) = \mathbf{e}; \\ P_{2n} : \mathbf{x} &\to (P_{k+1}'(0), 1) \to \cdots \to (P_{k+1}'(0), e_n) \to (P_{k+1}'(1), e_n) \\ &\to \cdots \to (P_{k+1}'(l_{k+1}'), e_n) = \mathbf{e}. \end{aligned}$$

如上所示，也能够证明 $\{P_1, \cdots, P_{2n}\}$ 是一个好的 $(\mathbf{x}, S)_k$- 路系统.

情形 4 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, e_n)$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}'$ 和 $\mathbf{e}'$.

证明类似于情形 3.

情形 5 $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n)$, $x_n \neq 0, e_n$, $\mathbf{x}' \neq \mathbf{0}', \mathbf{e}'$.

如下构造 $2n-2$ 条路 $P_1, \cdots, P_{2n-2}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (P_1'(0), x_n) \to (P_1'(1), x_n) \to \cdots \to (P_1'(l_1'), x_n) = (0', x_n) \\ &\to (0', x_n + \delta(x_n)) \to \cdots \to \mathbf{0}; \\ \mathbf{x} &= (P_i'(0), x_n) \to (P_i'(1), x_n) \to \cdots \to (P_i'(l_i'-1), x_n) \\ &\to (P_i'(l_i'-1), x_n + \delta(x_n)) \to \cdots \to (P_i'(l_i'-1), 0) \to \mathbf{0} \quad (2 \leq i \leq k); \\ \mathbf{x} &= (P_{k+1}'(0), x_n) \to \cdots \to (P_{k+1}'(l_{k+1}'), x_n) \to (P_{k+1}'(l_{k+1}'), x_n - \delta(x_n)) \\ &\to \cdots \to (P_{k+1}'(l_{k+1}'), e_n) = \mathbf{e}; \\ \mathbf{x} &= (P_i'(0), x_n) \to \cdots \to (P_i'(l_i'-1), x_n) \to (P_i'(l_i'-1), x_n - \delta(x_n)) \\ &\to \cdots \to (P_i'(l_i'-1), e_n) \to (P_i'(l_i'), e_n) \\ &= \mathbf{e} \quad (k+2 \leq i \leq 2n-2). \end{aligned}$$

其它两条路可以如下构造

$$\begin{aligned} P_{2n-1} : \mathbf{x} &\to (P_1'(0), x_n + \delta(x_n)) \to \cdots \to (P_1'(0), 0) \\ &\to (P_1'(1), 0 \to \cdots \to (P_1'(l_1'), 0) = \mathbf{0}; \\ P_{2n} : \mathbf{x} &\to (P_{k+1}'(0), x_n) \to (P_{k+1}'(0), x_n - \delta(x_n)) \to \cdots \\ &\to (P_{k+1}'(0), e_n) \to (P_{k+1}'(1), e_n) \to \cdots \\ &\to (P_{k+1}'(l_{k+1}'), e_n) = \mathbf{e}. \end{aligned}$$

类似的，也能发现 $\{P_1, P_2, \cdots, P_{2n}\}$ 是一个好的 $(\mathbf{x}, S)_k$- 路系统.

最后，从引理 3.1–3.3 得到主要定理.

参 考 文 献

[1] Bondy, J. A. & Murty, U. S. R., Graph theory with applications [M], Macmillan Press, London, 1976.

[2] Dally, W. J., Performance analysis of k-ary k-cube interconnection networks [J], *IEEE Trans. Comput.*, **39**(1990), 775–785.

[3] Flandrin, E. & Li, H., Mengerian properties [J], *Hamiltonicity and claw-free graphs, Networks*, **24**(1994), 660–678.

[4] Hsu, D. F., On container width and length in graphs, groups, and networks [J], *IEICE Trans. Fundam.*, **E77A**(1994), 668–680.

[5] Hsu, D. F. & Lyuu, Y. D., A graph-tyeoratical study of transmission delay and fault-tolerance [A], Proc. of 4th ISMM International Conference on Paralled and Distributed Computing and Systems [C], (1991), 20–24.

[6] Hsu, D. F. & Luszak, T., Note on the k-diameter of k-regular k-connected graphs [J], *Disc. Math.*, **132**(1994), 291–296.

[7] Ishigami, Y., The wide-diameter of the n-dimensionml torodal mesh [J], *Networks*, **27**(1996), 257–266.

[8] Li, Q., Sotteau, D. & Xu, J. M., 2-diameter of de Bruijn graphs [J], *Networks*, **28**(1996), 7–14.

[9] Li, H. & Xu, J. M., (d, m)-dominating number of m-connected graphs [A], Rapport de Recherche, LRI, URA 410 du CNRS Universite de paris-sud [R], 1130 (1997), submitted to Networks.

[10] Linder, D. H. & Harden, J. C., An adaptive and fault tolerant wormhole routing strategy for k-ary n-cubes [J], *IEEE Trans. Comput.*, **40**(1991), 867–872.

[11] Lu, C. H. & Zhang, K. M., A note of (d, m)-dominating numbers of hypercube Q_m for $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 \leq d \leq m$ [R], Manuscript, 1998.

[12] Lu, C. H., Xu, J. M. & Zhang, K. M, On (d, n)-dominating number of n-dimensional de Bruijn graph for $d = n - 1$ [J], *Disc. Appl. Math*, **105**(2000), 137–145.

[13] Stout, Q. F., Mesh-connected computer with broadcasting [J], *IEEE Trans. Comput.*, **C-32**:9(1988), 826–830.

[14] Xu, J. M., Lu, C. H. & Zhang, K. M., A new property of binary undireted de Bruijn graphs [J], *Chin. Ann. of Math.*, **21B**:1(2000), 1–4.