一类竞赛图顶点的非正则性

吴正声 张克民* 邹 园

B. Alspach在〔1〕中，证明了正则竞赛图的弧泛回路性，并举出了偶数个顶点的几乎正则图不含3—回路的反例。朱永津、田丰在〔2〕中，提出了竞赛图的 O（p，q）条件，并证明了具有O（p，2）条件的竞赛图的任意弧总存在过这弧的任意长的回路系列（除3—回路外）。又刘振宏、蔡茂诚在〔3〕中，证明了 $q=1$ 等价于竞赛图的正则性，并得出了图的最大次差

$$\max_{v\in V}\{\hat{d}(v)\}=\triangle$$

用q来估计的一个上界。从而，虽然〔2〕推广了〔1〕的结果，但是排除了3—回路的情况。加上朱永津在1979年曲阜的一次会议上提出的猜想：存在不是正则或几乎正则的竞赛图，其平方图是完全对称的。由此，有必要研究这样一类竞赛图的顶点的非正则性问题，这类图就是具有 $q\geqslant 2$（$\triangle\geqslant 1$），且其平方图是完全对称的竞赛图（即竞赛图中任意一条弧总存在过这弧的3—回路）。

§1. 术 语 与 记 号

用 $D=(V,A)$ 表示有向图D具有顶点集V与弧集A，这里 $A\subseteq V\times V$。用 $(u,v)\in A$ 表示D中以u为始点，v为终点的弧。用 $D-V_1$ 表示由 $V-V_1$ 导出的子图，这里 $V_1\subset V$（即 V_1 是V的真子集）。

在有向图 $D=(V,A)$ 中，给定 $u\in V$，采用下列记号：

$$I_D(u)=\{v\mid v\in V,(v,u)\in A\},\quad O_D(u)=\{v\mid v\in V,(u,v)\in A\},$$

$$d_D^-(u)=|I_D(u)|,\qquad d_D^+(u)=|O_D(u)|,$$

这里用 $|S|$ 表示集S中元素的个数。上述的 $d_D^+(u)$ 与 $d_D^-(u)$ 分别称为u的出次与入次。而

$$\hat{d}_D(u)=d_D^+(u)-d_D^-(u)$$

称为u的次差。在不引起混淆的情况下，$I_D(u)$，$O_D(u)$，$d_D^+(u)$，$d_D^-(u)$，$\hat{d}_D(u)$ 可分别简记为 $I(u)$，$O(u)$，$d^+(u)$，$d^-(u)$，$\hat{d}(u)$。

有向图 $T=(V,A)$ 称为竞赛图，如果对于任意不同的 $u,v\in V$，有 (u,v) 与 (v,u)

* 南京大学数学系。

中的一个且仅一个属于A，而 $(u,u)\overline{\in}A$。

设 $T=(V,A)$ 为竞赛图，且 $u\in V$，如果 $\hat{d}(u)=0$，则称u为正则点；如果 $|\hat{d}(u)|=1$，则称u为几乎正则点。

设 $T=(V,A)$ 为竞赛图，若对于任意 $v\in V$，有 $\hat{d}(v)=0$，则称T为正则的；若对于任意 $v\in V$，有 $|\hat{d}(v)|=1$，则称T为几乎正则的。

有向图 $D=(V,A)$ 称为完全对称的，如果对于任意不同的 u，$v\in A$，有 (u,v)、$(v,u)\in A$。而 $(u,u)\overline{\in}A$。

有向图 $D=(V,A)$ 的平方图 $D^2=(V',A')$ 是这样的有向图：$V'=V$；对于任意 $u,v\in V'$，$(u,v)\in A'$ 当且仅当 $(u,v)\in A$，或存在 $w\in V$，使得 $(u,w),(w,v)\in A$。

$Tss(p)$ 图是指其平方图为完全对称的p个顶点的竞赛图。$Tss(p,k)$ 图是指恰具有k个次差的绝对值大于1的顶点的 $Tss(p)$ 图。

§2. 几 个 引 理

为了给出主要结果，在本节中先证明下列几个引理。

引理1 设 $T=(V,A)$ 是具有p个顶点的竞赛图。对于任意 $v\in V$，下列结论成立：

(a) $|\hat{d}(v)|\leqslant p-1$。而当T是 $Tss(p)$ 图时，$|\hat{d}(v)|\leqslant p-3$。

(b) 当 $p=2m+1$ 时，$2|\hat{d}(v)$；当 $p=2m$ 时，$2|(\hat{d}(v)-1)$。

(c) $\sum\limits_{v\in V}\hat{d}(v)=0$，

(d) $d^+(v)=\dfrac{p+\hat{d}(v)-1}{2}$　　$d^-(v)=\dfrac{p-\hat{d}(v)-1}{2}$

证： 由 $\hat{d}(v)$ 的定义即得上述结论。

引理2 竞赛图 $T=(V,A)$ 是 $Tss(p)$ 图的充分必要条件是：对于任意弧 $(u,v)\in A$，在T中总存在过这弧的3—回路（即长为3的回路）。

证： 因T是竞赛图，对于任意 u，$v\in V$，可设 $(u,v)\in A$，$(v,u)\overline{\in}A$。且设 $T^2=(V',A')$。

必要性：因 T^2 是完全对称的，有 $(v,u)\in A'$，又因 $(v,u)\overline{\in}A$，存在 $w\in V$，使 (v,w)、$(w,u)\in A$，由此，在T中存在过 (u,v) 的3—回路 $u\,v\,w\,u$。

充分性：由 $(u,v)\in A$，得 $(u,v)\in A'$，因在T中存在过 (u,v) 的3—回路 $u\,v\,w\,u$，即存在 $w\in V$，使 (v,w)、$(w,u)\in A$，便得 $(v,u)\in A'$。显然 $(u,u)\overline{\in}A'$。从而，T^2 是完全对称的。

引理3 设 $T=(V,A)$ 是 $Tss(p)$ 图，且 $p>3$，则在T中，次差为 $-(p-3)$ 与次差为 $p-3$ 的顶点成对出现，且至多只能有一对。

证： 若T中有次差为 $-(p-3)$ 的顶点 u_0，则 $|O(u_0)|=1$，$|I(u_0)|=p-2$。设 $O(u_0)=\{w_0\}$。对于任意 $v\in I(u_0)$，(v,u_0) 必在T的某一个3—回路中。易见，这个3—回路只能是 $v\,u_0w_0\,v$。由此，$(w_0,v)\in A$。便有 $v\in O(w_0)$。从而 $I(u_0)\subseteq O(w_0)$。又因 $\{u_0\}\subseteq I(w_0)$。由此易得，$O(w_0)=I(u_0)$，$I(w_0)=\{u_0\}$。从而，T中有次差为 $p-3$ 的顶

点w_0。同理可证，若T中有次差为$p-3$的顶点w_0，则T中有次差为$-(p-3)$的顶点u_0。

若T中有两个次差为$-(p-3)$的顶点u_0与u_1,不妨设$(u_0,u_1)\in A$,则$\{u_1\}=O(u_0)$。仿上可证，u_1是次差为$p-3$的顶点。因$p>3$，便得矛盾。从而，T中至多只能有一个次差为$-(p-3)$的顶点。同理可证，T中至多只能有一个次差为$p-3$的顶点。

引理4 设$T=(V,A)$是$Tss(p)$图，若T有次差为$-(p-3)$的顶点u_1与次差为$p-3$的顶点u_2，则$T'=T-\{u_1, u_2\}=(V',A')$是$Tss(p-2)$图。且对于任意$v\in V'$，$\hat{d}_T(v)=\hat{d}_{T'}(v)$。

证：易见，T'是竞赛图，考虑任意$(v_1,v_2)\in A'$。由引理2，(v_1,v_2)在T的3—回路$v_1v_2wv_1$中。易见，$w\neq u_1, u_2$。否则u_1不能是次差为$-(p-3)$的顶点，或者u_2不能是次差为$p-3$的顶点，矛盾。于是$w\in V-\{u_1, u_2\}=V'$，从而3—回路$v_1v_2wv_1$在T'中。由此，T'是$Tss(p-2)$图。

容易证明，在竞赛图T中，$I(u_1)=O(u_2)=V-\{u_1,u_2\}=V'$，因而，对任意$v\in V'$，$\hat{d}_T(v)=\hat{d}_{T'}(v)$。

设$T=(V,A)$是竞赛图。且设$V_i\subset V(i=0, 1, 2)$，V_0,V_1与V_2互不相交。在图T上添加两个顶点u_1，u_2及弧(u_1, u_2)。再用下列方法添加其它的弧，使得构成竞赛图：对于任意$v_0\in V_0$，添加弧(v_0, u_1)与(v_0, u_2)；对于任意$v_1\in V_1$，添加弧(u_1, v_1)与(u_2, v_1)；对于任意$v_2\in V_2$，添加弧(u_1, v_2)与(v_2, u_2)；对于任意$v\in V_3=V-(V_0\cup V_1\cup V_2)$，添加弧$(v, u_1)$与$(u_2, v)$，见图1。由此构成的竞赛图$T'$称为在T上用$\gamma(V_0, V_1, V_2)$方法添加顶点$u_1$与$u_2$所得的图。

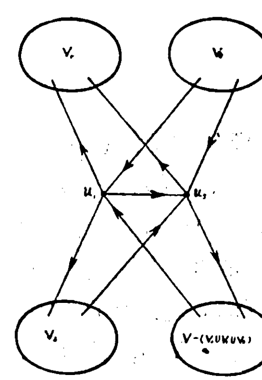
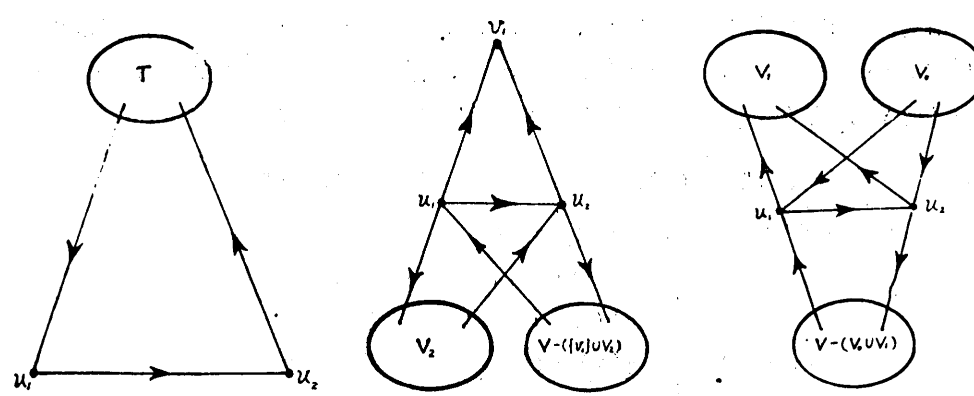


图1

采用下列简单的记号：

$$\alpha=\gamma(\varnothing, \varnothing, \varnothing),$$
$$\beta(v_1, V_2)=\gamma(\varnothing, \{v_1\}, V_2),$$
$$\gamma_0(V_0, V_1)=\gamma(V_0, V_1, \varnothing)。$$

用α方法、$\beta(v_1, V_2)$方法与$\gamma_0(V_0, V_1)$方法所添加的新弧分别如图2中的(1)、(2)与(3)所示。



(1) (2) (3)

图2

引理5 设 $T=(V,A)$ 是 $Tss(p)$ 图，$T'=(V',A')$ 是在T上用 α 方法添加 u_1 与 u_2 所得的图，则 T' 是 $Tss(p+2)$ 图，并且

$$\hat{d}_{T'}(v)=\begin{cases}-(p-1) & 当\ v=u_1\\ p-1 & 当\ v=u_2\\ \hat{d}_T(v) & 当\ v\in V。\end{cases}$$

证 对于任意 $v\in V$，(v,u_1) 与 (u_2,v) 含于 T' 的3—回路 vu_1u_2v 中。由此，(u_1,u_2) 也含于 T' 的3—回路中。对于任意 $(u,v)\in A$，由引理2，(u,v) 含于T的某一个3—回路中，从而也含于 T' 的3—回路中。于是，由引理2，T' 是 $Tss(p+2)$ 图。关于 T' 中各顶点的次差，从 T' 的构造易见结论。

引理6 设 $T=(V,A)$ 是 $Tss(p)$ 图，$V_2\subset V$，$V_2\neq\varnothing$，$v_1\in V-V_2$，$|V_2|=l$。且设 $T'=(V',A')$ 是在T上用 $\beta(v_1,V_2)$ 方法添加 u_1 与 u_2 所得的图。若 $O(v_1)\supset V_2$，且对于任意 $v_2\in V_2$，总存在 $u\in V-(\{v_1\}\cup V_2)$，使 $(v_2,u)\in A$。则 T' 是 $Tss(p+2)$ 图。并且

$$\hat{d}_{T'}(v)=\begin{cases}-[p-(2l+3)] & 当\ v=u_1\\ p-(2l+1) & 当\ v=u_2\\ \hat{d}_T(v)-2 & 当\ v=v_1\\ \hat{d}_T(v) & 当\ v\in V-\{v_1\}。\end{cases}$$

证：对于任意 $v\in V-(\{v_1\}\cup V_2)$，(v,u_1) 与 (u_2,v) 含于 T' 的3—回路 vu_1u_2v 中。于是，(u_1,u_2) 也含于 T' 的3—回路中。从 $V_2\subset O(v_1)$ 可得，对于任意 $v_2\in V_2$，$(v_1,v_2)\in A$。于是，(v_2,u_2) 含于 T' 的3—回路 $v_2u_2v_1v_2$ 中。由此，(u_2,v_1) 也含于 T' 的3—回路中。再由 $V_2\subset O(v_1)$，存在 $u_0\in V-(\{v_1\}\cup V_2)$，使 $(v_1,u_0)\in A$。于是，(u_1,v_1) 含于 T' 的3—回路 $u_1v_1u_0u_1$ 中。由条件，对于任意 $v_2\in V_2$，总存在 $u\in V-(\{v_1\}\cup V_2)$，使 $(v_2,u)\in A$。于是 (u_1,v_2) 含于 T' 的3—回路 $u_1v_2uu_1$ 中，到此证明了，每条新添加的弧都在 T' 的某个3—回路中。由引理2．对于任意 $(u,v)\in A$，(u,v) 含于T的某个3—回路中．因而，它也含于 T' 的3—回路中，于是，由引理2，T' 是 $Tss(p+2)$ 图。关于 T' 中各顶点的次差，从 T' 的构造易见结论。

引理7 设 $T=(V,A)$ 是 $Tss(p)$ 图，$V_i\subset V$，$|V_i|=l_i\ (i=0,1,2)$，且 V_0，V_1 与 V_2 互不相交。设 T' 是在T上用 $\gamma(V_0,V_1,V_2)$ 方法添加顶点 u_1 与 u_2 所得的图。若 $V_3=V-(V_0\cup V_1\cup V_2)\neq\varnothing$，且对于任意 $v_0\in V_0$，存在 $v_1\in V_1$，使得 $(v_1,v_0)\in A$；对于任意 $v_1'\in V_1$，存在 $v_0'\in V_0$，使得 $(v_1',v_0')\in A$，对于任意 $v_2\in V_2$ 存在 $v_0''\in V_0$，$v_1''\in V_1$，使得 (v_2,v_0'')，$(v_1'',v_2)\in A$；或者存在 v_3'，$v_3''\in V_3$，使得 (v_2,v_3')，$(v_3'',v_2)\in A$，则 T' 是 $Tss(p+2)$ 图。并且

$$\hat{d}_{T'}(v)=\begin{cases}-[p-2(l_1+l_2)-1] & 当\ v=u_1\\ p-2(l_0+l_2)-1 & 当\ v=u_2\\ \hat{d}_T(v)+2 & 当\ v\in V_0\\ \hat{d}_T(v)-2 & 当\ v\in V_1\\ \hat{d}_T(v) & 当\ v\in V-(V_0\cup V_1)。\end{cases}$$

证：对于任意 $v_3 \in V_3$，(v_3, u_1) 与 (u_2, v_3) 含于 T' 的 3—回路 $v_3u_1u_2v_3$ 中，因 $V_3 \neq \varnothing$，从而 (u_1, u_2) 也总含于 T' 的 3—回路中。由假定，对于任意的 $v_0 \in V_0$，存在 $v_1 \in V_1$，使 $(v_1, v_0) \in A$。于是，(v_0, u_1) 含于 T' 的 3—回路 $v_0u_1v_1v_0$ 中；(v_0, u_2) 含于 T' 的 3—回路 $v_0u_2v_1v_0$ 中。同理可证，对于任意 $v_1' \in V_1$，存在 $v_0' \in V_0$，使得 (u_1, v_1') 含于 T' 的 3—回路 $u_1v_1'v_0'u_1$ 中，(u_2, v_1') 含于 T' 的 3—回路 $u_2v_1'v_0'u_2$ 中。对于任意 $v_2 \in V_2$，类似地可以证明，(u_1, v_2) 与 (v_2, u_2) 分别含于 T' 的某个 3—回路中。由引理 2，对于任意 $(u, v) \in A$，(u, v) 也含于 T' 的某个 3—回路中。于是，再由引理 2，T' 是 $Tss(p+2)$ 图。关于 T' 的各顶点的次差，从 T' 的构造易见结论。

引理 7 是引理 5 的推广。而引理 7 还有如下推论。

推论：设 $T=(V, A)$ 是 $Tss(p)$ 图，$V_i \subset V$，$|V_i| = l_i\,(i=0,1)$，且 V_0 与 V_1 互不相交，设 T' 是在 T 上用 $\gamma_0(V_0, V_1)$ 方法添加顶点 u_1 与 u_2 所得的图。若 $V-(V_0 \cup V_1) \neq \varnothing$，且对于任意 $v_0 \in V_0$，存在 $v_1 \in V_1$，使得 $(v_1, v_0) \in A$；对于任意 $v_1' \in V_1$，存在 $v_0' \in V_0$，使得 $(v_1', v_0') \in A$。则 T' 是 $Tss(p+2)$ 图。并且

$$\hat{d}_{T'}(v)=\begin{cases} -(p-2l_1-1) & \text{当 } v=u_1 \\ p-2l_0-1 & \text{当 } v=u_2 \\ \hat{d}_T(v)+2 & \text{当 } v\in V_0 \\ \hat{d}_T(v)-2 & \text{当 } v\in V_1 \\ \hat{d}_T(v) & \text{当 } v\in V-(V_0\cup V_1)。\end{cases}$$

§3. 主　要　结　果

一、主要结果：

本文的主要结果如下：

定理 1 (a) 当 $p=2m+1 \geqslant 9$ 时，总存在 $Tss(p, k)\,(k=0, 2, 3, \cdots, p)$ 图。

(b) 当 $p=2m \geqslant 10$ 时，总存在 $Tss(p, k)\,(k=0, 1, \cdots, p)$ 图。

推论：对于 $p \geqslant 5$，$p \neq 6$，总存在次差的绝对值大于 1 的顶点的 $Tss(p)$ 图。

这个推论肯定地回答了朱永津在1979年曲阜的一次会议上提出的猜想。

定理 2 (a) 当 $p=2m+1 \geqslant 3$ 时，总存在唯一的（在同构意义下）一个 $Tss(p)$ 图 T，在这个图 T 中，同时具有次差为 $\pm(p-3)$，$\pm(p-5)$，…，± 2，0 的顶点(共 $p-2$ 个)，而余下的两个顶点的次差都为 0。

(b) 当 $p=2m \geqslant 6$ 时，不存在同时具有次差为 $\pm(p-3)$，$\pm(p-5)$，…，± 3 的顶点的 $Tss(p)$ 图。但是，对于 $k=3, 5, \cdots, p-3$，总存在一个 $Tss(p)$ 图 T，在这个图 T 中同时具有次差为 $\pm(p-3)$，$\pm(p-5)$，…，$\pm(k+2)$，$\pm(k-2)$，…，± 1 的顶点。

二、几个命题：

在证明本文主要结果之前，先给出几个命题。

根据〔1〕中的定理，容易从本文的引理 2 推得：正则竞赛图一定是 Tss(p) 图，从而，当 $p=2m+1\geqslant 3$ 时，总存在正则的 Tss(p) 图，即总存在 Tss(p, 0) 图，当 $p=2m$ 时，有下列命题：

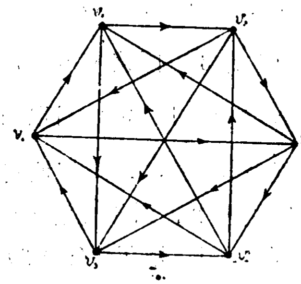


图 3

命题 1 （a）不存在 Tss(4) 图。

（b）当 $p=2m\geqslant 6$ 时，总存在几乎正则的Tss(p)图，即总存在 Tss(p, 0) 图。

证：（a）容易直接验证不存在 Tss(4) 图。

（b）对m用数学归纳法。

当 $m=3$ 时，图 3 就是 Tss(6) 图，结论成立。

现假设当$m\geqslant 3$时，结论成立，也就是，存在图$T=(V, A)$是几乎正则的 Tss(2m)图。设

$$V^+=\{v\mid v\in V,\ \hat{d}(v)=1\},\quad V^-=\{v\mid v\in V,\ \hat{d}(v)=-1\}。$$

易见，$|V^+|=|V^-|=m$，下面考虑 $m+1$ 时，分两种情况讨论：

第一种情况：存在 $v_1\in V^+$，使得对于任意 $v_2\in V^+-\{v_1\}$，有 $(v_1, v_2)\in A$，令 $V_2=V^+-\{v_1\}$，有 $O(v_1)\supset V_2$。又对于任意 $v_2\in V_2$，总存在 $v\in V^-$，使得 $(v_2, v)\in A$。否则 (v_1, v_2) 就不可能在T的某一个 3—回路中，这与T是 Tss(p) 图矛盾。在图T上，用 $\beta(v_1, V_2)$ 方法添加两个顶点，由此所得的图设为 T'。由引理 6，图 T' 是几乎正则的 Tss(2(m+1)) 图。

第二种情况：对于任意 $v_1'\in V^+$，总存在 $v_0'\in V^+$，使得$(v_0', v_1')\in A$。因此，由 $d^+(v_1')=m$，$|V^+|=m$，得 $|O(v_1')\cap V^-|\geqslant 2$。任取 $u_0\in V^-$，令 $V_0=V^--\{u_0\}$，$V_1=V^+$。于是，$V=(V_0\cup V_1)=\{u_0\}\neq\varnothing$。又对于任意 $v_1'\in V_1$，由$|O(v_1')\cap V^-|\geqslant 2$，故存在 $v_0\in V_0$，使$(v_1', v_0')\in A$。而对于任意 $v_0\in V_0$，因 $d^-(v_0)=m$，$|V_0|=m-1$，从而存在 $v_1\in V_1$，使 $(v_1, v_0)\in A$。在图T上用 $\gamma_0(V_0, V_1)$ 方法添加两个顶点，由此所得的图设为 T'。由引理 7 的推论，T'是几乎正则的 Tss(2(m+1)) 图。

综合上述情况，由数学归纳法，结论成立。

推论： 当 $p=6$时，仅存在 Tss(6, 0) 图。

证： 反证，若存在非几乎正则的 Tss(6) 图T，则存在次差分别为 -3与 3 的顶点 u_1 与 u_2。于是，由引理 4，$T-\{u_1, u_2\}$是 Tss(4) 图，矛盾。

命题 2 （a）当 $p=2m+1$ 时，总不存在 Tss(p, 1)图。

（b）当 $p=5$ 时，仅存在 Tss(5, 0)，Tss(5, 2) 图。

（c）当 $p=7$ 时，仅存在 Tss(7, k) (k=0, 2, 4, 6) 图。

证：（a）由引理 1（c），立即得到结论。

（b）总存在 Tss(5, 0) 图 $T_{5,0}$。

图 4 中的图 $T_{5,2}$ 是 Tss(5, 2) 图。

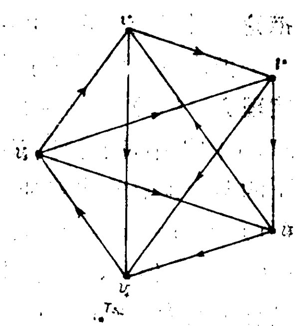


图 4

下面证明，不存在 Tss(5, k)(k=3, 4, 5) 图。由引理 1，除次差为 0 的正则点外，其余各顶点的次差只能为 ±2。由引理 3，次差为 2 与 −2 的顶点成对出现，且仅有一对，由此便得结论。

（c）总存在 Tss(7，0) 图 $T_{7,0}$。在 $T_{5,0}$ 与 $T_{5,2}$ 上分别用 α 方法添加两个顶点 v_6 与 v_7，由此所得的图分别设为 $T_{7,2}$ 与 $T_{7,4}$。由引理 5，图 $T_{7,2}$ 与 $T_{7,4}$ 分别是 Tss(7,2) 图与 Tss(7,4) 图。在 $T_{5,2}$ 上用 $\gamma_0(\{v_2\},\ \{v_1\})$ 方法添加两个顶点 v_6 与 v_7，由此所得的图设为 $T_{7,6}$。由引理 7 的推论，$T_{7,6}$ 是 Tss(7,6) 图。

下面证明：不存在 Tss(7,k)（k=3,5,7）图。

由引理 1，在 Tss(7) 图中，除了次差为 0 的正则点外，其余各顶点的次差只能为 ±4，±2。由引理 3，次差为 4 与 −4 的顶点成对出现。由此，若有奇数个非正则点，这与引理 1（c）矛盾。于是，不存在奇数个非正则点的 Tss(7) 图，便得结论。

命题 3　当 p=8 时，仅存在 Tss(8，k)（k=0，1，…，5）图。

证：（1）存在 Tss(8，k)（k=0，1，…，5）图。

由命题 1，总存在 Tss(8，0) 图 $T_{8,0}$。在图 3 中的图 $T_{6,0}$ 上，用 α 方法添加两个顶点 v_7 与 v_8，由此所得的图设为 $T_{8,2}$。由引理 5，图 $T_{8,2}$ 是 Tss(8，2) 图。在图 $T_{6,0}$ 上，用 $\gamma(\{v_5\},\ \{v_1\},\ \{v_2,\ v_3\})$ 方法添加两个顶点 v_7 与 v_8，由此所得的图设为 $T_{8,1}$；用 $\gamma_0(\{v_2\},\ \{v_1\})$ 方法添加两个顶点 v_7 与 v_8，由此所得的图设为 $T_{8,4}$。由引理 7 及其推论，图 $T_{8,1}$ 与 $T_{8,4}$ 分别是 Tss(8，1) 图与 Tss(8,4) 图。

在图 5 中的 $T'_{6,0}$ 上，用 $\gamma(\{v_2\},\ \{v_1,\ v_4\},\ \{v_3\})$ 方法添加两个顶点 v_7 与 v_8，由此所得的图设为 $T_{8,3}$；再用 $\gamma_0(\{v_2,\ v_6\},\ \{v_1,\ v_4,\ v_5\})$ 方法添加两个顶点 v_7 与 v_8。由此所得的图设为 $T_{8,5}$。由引理 7 及其推论，图 $T_{8,3}$ 与 $T_{8,5}$ 分别是 Tss(8,3) 与 Tss(8,5) 图。

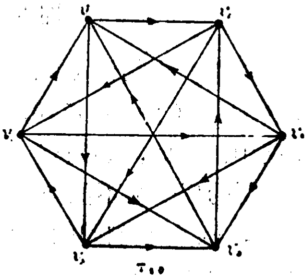


图 5

（2）不存在 Tss(8,k)（k=6,7,8）图。

（a）不存在 Tss(8,7) 图。

反证，设存在 Tss(8，7) 图 $T_{8,7}$。则 T 的 7 个非几乎正则顶点的次差只能为 ±3。否则，由引理 3，在 T 中有一对顶点 u_1 与 u_2，它们的次差分别为 5 与 −5。由引理 4，$T_{8,7}-\{u_1,\ u_2\}$ 是 Tss(6,5) 图，这与命题 1 的推论矛盾。由此，在图 $T_{8,7}$ 中，有一个顶点次差为 ±1，其余 7 个顶点的次差为 ±3。但是，这又与引理 1（c）矛盾。于是，不存在 Tss(8，7) 图。

（b）不存在 Tss(8,8) 图。

反证，设 $T_{8,8}=(V,A)$ 是 Tss(8,8) 图。由引理 3、引理 4、命题 1 的推论及引理 1（c）可推得，在图 $T_{8,8}$ 中 4 个顶点的次差为 3，另 4 个顶点的次差为 −3。

设次差为 −3 的 4 个顶点为 v_1，v_2，v_3，v_4。次差为 3 的顶点为 v_5，v_6，v_7，v_8。考虑 $T_1=(V_1,\ A_1)=T_{8,8}-\{v_5,\ v_6,\ v_7,\ v_8\}$，在图 T_1 中，必有两个顶点的次差为 1。否则，与 v_1，v_2，v_3，v_4 在 $T_{8,8}$ 中次差都为 −3 矛盾。不妨设，在图 T_1 中，次差为 1 的两个顶点为 v_2 与 v_3，且 $(v_2,\ v_3)\in A_1$。则必有 $(v_3,\ v_1)$，$(v_3,\ v_4)\in A_1$。由对称性，不妨设 $(v_2,\ v_1)\in A_1$，则 $(v_4,\ v_2)\in A_1$。因 v_2 与 v_3 在 $T_{8,8}$ 中的次差为 −3，从而，$T_{8,8}$ 中必有弧 $(v_i,\ v_2)$，$(v_i,\ v_3)\in A$，(i=5,6,7,8)。考虑次差为 −3 的顶点 v_1。易见，在 v_5，v_6，v_7，v_8 中必有一个顶点，由对称性不妨设为 v_8，使 $(v_8,\ v_1)\in A$，但这

样一来，$(v_8,\ v_2)\in A$，它不含于$T_{8,8}$的任何3—回路中，可见图6。这与$T_{8,8}$是Tss(8)图矛盾。

(c) 不存在Tss(8,6)图。

反证，设存在Tss(8,6)图 $T_{8,6}=(A,T)$。由引理3、引理4、命题1的推论及引理1(c)可推得，在图$T_{8,6}$中，次差为1与-1的顶点各一个，次差为3与-3的顶点各3个。设v_1，v_2，v_3是$T_{8,8}$中次差为-3的顶点。分两种情况讨论：

第一种情况：不妨设$(v_1,\ v_2)$、$(v_2,\ v_3)$、$(v_3,\ v_1)\in A$，再分三种情况讨论：

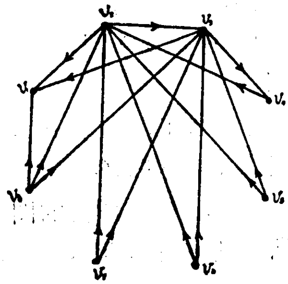


图6

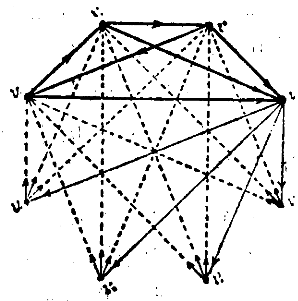


图7

情况1，不妨设$(v_i,\ v_4)\in A$ $(i=1,2,3)$。因$\hat{d}(v_i)=-3$ $(i=1,2,3)$。从而，必有$(v_j,\ v_i)\in A(j=5,6,7,8;\ i=1,2,3)$。因$(v_j,\ v_i)$ $(j=5,6,7,8)$要在$T_{8,6}$的某一个3—回路中。从而，必须有$(v_4,\ v_j)\in A(j=5,6,7,8)$。以上可见图7。易见，顶点$v_5$，$v_6$，$v_7$，$v_8$间的任一弧不能与$v_1$，$v_2$，$v_3$，$v_4$的任意一个顶点构成3—回路。由此，顶点$v_5$，$v_6$，$v_7$，$v_8$与它们间的弧必须构成Tss(4)图。由命题2(a)，这是不可能的，得到矛盾。

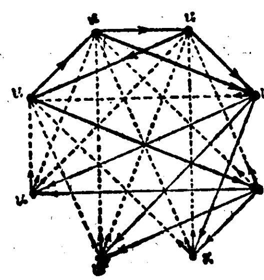


图8

情况2，不妨设$(v_i,\ v_4)\in A(i=2,3)$，$(v_1,v_5)\in A$。因$\hat{d}(v_i)=-3(i=1,2,3)$。从而，必有$(v_j,v_i)\in A(j=6,7,8,\ i=1,2,3)$，$(v_5,\ v_2)$、$(v_5,\ v_3)$、$(v_4,v_1)\in A$。因$(v_j,v_i)$ $(j=6,7,8;\ i=1,2)$要在$T_{8,6}$的某一个3—回路中。从而，必有$(v_i,\ v_j)\in A(j=6,7,8;\ i=5,4)$。以上见图8。这样一来，顶点$v_6$，$v_7$，$v_8$必须构成3—回路。从而$\hat{d}(v_6)=\hat{d}(v_7)=\hat{d}(v_8)=1$。矛盾。

情况3，不妨设(v_1,v_4)、(v_2,v_5)、$(v_3,v_6)\in A$。由此，必有$(v_j,v_i)\in A(j=7,8;\ i=1,2,3)$，$(v_4,\ v_i)\in A(i=2,3)$，$(v_5,\ v_i)\in A(i=1,3)$，$(v_6,\ v_i)\in A(i=1,\ 2)$。因$(v_j,\ v_i)(j=7,8;\ i=1,2,3)$要在$T_{8,6}$的某一个3—回路中。从而，必有$(v_i,\ v_j)\in A(i=4,5,6;\ j=7,8)$。以上见图9。这样一来，$v_7$与$v_8$间的弧不在$T_{8,6}$的3—回路中，矛盾。

第二种情况：不妨设(v_1,v_2)，(v_1,v_3)，$(v_2,\ v_3)\in A$。且设$(v_2,v_4)\in A$。由此，必有$(v_j,\ v_i)\in A(j=5,6,7,8;\ i=1,2)$，$(v_4,\ v_1)\in A$。因$(v_j,\ v_1)(j=5,6,7,8)$要在$T_{8,6}$的某一个3—回路中。从而，必须有$(v_3,\ v_j)\in A(j=5,6,7,8)$。以上可见图10。这与$\hat{d}(v_3)=-3$矛盾。

综合上述情况，不存在Tss(8,6)图。

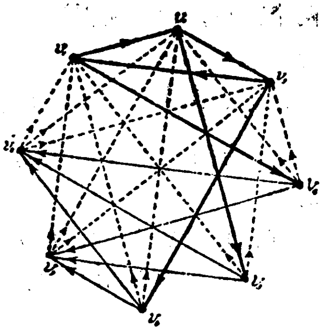


图9

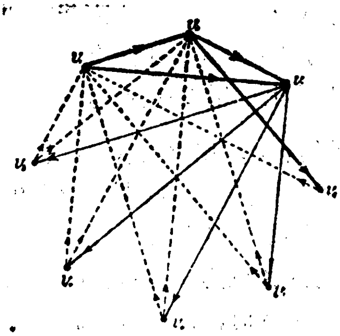


图10

三、证明主要结果：

现在来证明本文的主要结果。

证明定理1。

证：（a）对m用数学归纳法。

当 $m=4$ 时，Tss(9,0) 图总是存在的。在命题2中的图 $T_{7,0}$，$T_{7,2}$，$T_{7,4}$ 与 $T_{7,6}$，上，分别用α方法添加两个顶点 v_8 与 v_9。由此所得的图分别设为 $T_{9,2}$，$T_{9,4}$，$T_{9,6}$ 与 $T_{9,8}$。由引理5，它们分别为 Tss(9,2)、Tss(9,4)、Tss(9,6) 与 Tss(9,8)图。

在图 $T_{7,0}$ 中，不妨设 $\{v_2\}\subset O(v_1)$。在图 $T_{7,0}$ 上用 $\beta(v_1,\ \{v_2\})$ 方法添加顶点 v_8 与 v_9，由此所得的图设为 $T_{9,3}$。由引理6，图 $T_{9,3}$ 是 Tss(9,3) 图。

在图 $T_{7,0}$ 中，不妨设有弧 (v_1,v_2)、(v_3,v_2)。在图 $T_{7,0}$ 上，用 $\gamma_0(\{v_2\},\ \{v_1,v_3\})$ 方法添加两顶点 v_8 与 v_9，由此所得的图设为 $T_{9,5}$。由引理7的推论，图 $T_{9,5}$ 是 Tss(9,5)图。

在图 $T_{7,6}$ 上，用 $\gamma_0(\{v_3\},\ \{v_7,\ v_2\})$ 方法添加两个顶点，由此所得的图设为 $T_{9,7}$。由引理7的推论，图 $T_{9,7}$ 是 Tss(9,7) 图。

在图 $T_{7,4}$ 上，用 $\gamma(\{v_6\},\ \{v_1,\ v_2,\ v_3\},\ \{v_4\})$ 方法添加两个顶点，由此所得的图设为 $T_{9,9}$。由引理7，图 $T_{9,9}$ 是 Tss(9,9) 图。

综上所说，当 $m=4$ 时，结论成立。

现假设当 $m(\geqslant 4)$ 时，结论成立。考虑 $m+1$ 的情况，由归纳假设，存在 Tss(p，k)（$k=0,\ 2,3\cdots,\ 2m+1=p$）图 $T_{p,k}$。在图 $T_{p,k}$ 上，用α方法添加两个顶点，由此所得的图设为 $T_{p+2,\ k+2}$。由引理5，$T_{p+2,h}$（$h=2,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ p+2$）是 Tss(p+2，h)图。

在图 $T_{p,0}$ 中，不妨设 $\{v_2\}\subset O(v_1)$。在这个图 $T_{p,0}$ 上，用 $\beta(v_1,\ \{v_2\})$ 方法添加两个顶点，由此所得的图设为 $T_{p+2,3}$。由引理6易见，$T_{p+2,3}$ 是 Tss(p+2，3)图。又Tss(p+2，0)图总是存在的。从而当 $p+2$ 时，即当 $m+1$ 时，结论成立。

由数学归纳法，（a）得证。

（b）对m用数学归纳法。

当 $m=5$ 时，Tss(10,0) 图总是存在的。在命题3中的图 $T_{8,k}$（$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5$）上，用α方法添加两个顶点，由此所得的图设为 $T_{10,k+2}$。由引理5，$T_{10,h}$（$h=2,3,\cdots,7$）是 Tss(10，h)图。

在命题3中的图 $T_{8,4}$ 上，用 $\gamma_0(\{v_4\},\ \{v_5\})$ 方法添加两个顶点，由此所得的图为

$T_{10,8}$；用 $\gamma_0(\{v_3, v_4\}, \{v_5, v_6\})$ 方法添加两个顶点，由此所得的图为 $T_{10,10}$。由引理7的推论，$T_{10,8}$ 与 $T_{10,10}$ 分别是 Tss(10,8) 与 Tss(10, 10) 图。

在图5中的 $T'_{6,0}$ 上，用 $\gamma_0(\{v_6\}, \{v_5\})$ 方法添加两个顶点 v_7 与 v_8，由此所得的图设为 $T'_{8,4}$。再在图 $T'_{8,4}$ 上，用 $\gamma_0(\{v_2\}, \{v_1, v_4\})$ 方法添加两个顶点，由此所得的图设为 $T_{10,9}$。由引理7的推论，$T_{10,9}$ 是 Tss(10,9) 图。

在图 $T_{8,0}$ 中，不妨设 $\hat{d}(v_1)=1$，而 $v_2 \subset O(v_1)$，$|V_2|=2$。用 $\beta(v_1, V_2)$ 方法添加两个顶点，由此所得的图设为 $T_{10,1}$。由引理6，$T_{10,1}$ 是Tss(10,1) 图。

综上所说，当 $m=5$ 时，结论成立。

现设当 $m(\geqslant 5)$ 时，结论成立。考虑 $m+1$ 的情况，由归纳假设，存在 Tss(p，k)（$k=0, 1, \cdots, 2m=p$）图 $T_{p,k}$。在 $T_{p,k}$ 上，用 α 方法添加两个顶点，由此所得的图设为 $T_{p+2,k+2}$。由引理5，$T_{p+2,h}$（$h=2, 3, \cdots, p+2$）是 Tss(p+2, h) 图。

在图 $T_{p,0}$ 中，不妨设 $\hat{d}(v_1)=1$，而 $V_2 \subset O(v_1)$，$|V_2|=m-2$。在图 $T_{p,0}$ 上，用 $\beta(v_1, V_2)$ 方法添加两个顶点，由此所得的图设为 $T_{p+2,1}$。由引理6，$T_{p+2,1}$ 是 Tss(p+2,1) 图。由命题1，Tss(p+2,0) 图总是存在的，从而，当 $p+2$ 时，即当 $m+1$ 时，命题结论成立。

由数学归纳法，（b）得证。

证明定理2。

证：（a）对m用数学归纳法。

当 $m=1$ 时，存在唯一的3—回路图满足条件，结论成立。

现假设当 $m(\geqslant 1)$ 时，结论成立。考虑 $m+1$ 的情况。由归纳假设，存在唯一的满足定理条件的 Tss(p) 图T。在T上用 α 方法添加两个顶点，根据引理5，由此所得的图是满足定理条件的 Tss(p+2) 图。并且，由引理3，4。可见其唯一性。

由数学归纳法，结论（a）成立。

（b）对m用数学归纳法。

当 $m=3$ 时，由命题1的推论，结论成立。

假设当 $m(\geqslant 3)$ 时，结论成立，考虑 $m+1$ 的情况。如果存在 Tss(p+2) 图T，它同时具有次差为 $\pm(p-1)$，$\pm(p-3)$，$\cdots$，± 3 的顶点。设T中次差为 $p-1$ 与 $-(p-1)$ 的顶点分别为 u_1 与 u_2。由引理4，$T-\{u_1, u_2\}$ 是 Tss(p) 图，并且同时具有次差为 $\pm(p-3)$，$\pm(p-5)$，$\cdots$，± 3 的顶点，这与归纳假设矛盾。

再由归纳假设，对于 $k=3, 5, \cdots, p-3$，存在一个同时具有次差为 $\pm(p-3)$，$\pm(p-5)$，$\cdots$，$\pm(k+2)$，$\pm(k-2)$，$\cdots$，± 1 的顶点的 Tss(p) 图，记为 T_k。在 T_k 上用 α 方法添加两个顶点，根据引理5，由此所得的图是一个 Tss(p+2) 图，它同时具有次差为 $\pm(p-1)$，$\pm(p-3)$，$\cdots$，$\pm(k+2)$，$\pm(k-2)$，$\cdots$，± 1 的顶点。在图 T_{p-3} 中，总有这样的两个顶点，不妨设 v_1 与 v_2，它们使 (v_2, v_1) 是 T_{p-3} 的弧，且另有两个顶点与它们的次差分别相等。在 T_{p-3} 上用 $\gamma_0(\{v_1\}, \{v_2\})$ 方法添加两个顶点，根据引理7的推论，由此所得的图是一个 Tss(p+2) 图，且同时具有次差为 $\pm(p-3)$，$\pm(p-5)$，$\cdots$，± 1 的顶点，这样就证明了当 $m+1$ 时，结论成立。

由数学归纳法，结论（b）成立。 （下转第三十六页）

（上接第十页）

参　考　文　献

〔1〕 Alspach, B., Cycles of each length in regular tournaments, Canad, Math. Bull. 10(2):283, 1976.

〔2〕 Lhu Youg-jin(朱永津)、Tian Feng(田丰),On the strong Path Connectivity of a tournament, Scientia Sinica, 1979 Special Issue(Ⅱ):18。

〔3〕 刘振宏、蔡茂诚，竞赛图是k－圈图的充分条件，曲阜师院学报（自然科学版）1978年，第3期，第12页。

（80.1.4收到）