关于竞赛图的广义指数集

张克民
（南京大学）
王鸿德
（南京工程兵工程学院）
洪吉之
（浙江气象学校）

ON THE SET OF THE INDEX OF MAXIMUM DENSITY OF TOURNAMENTS

Zhang Kemin
(Nanjing University)
Wang Hongde
(Engineering Institute of Engineer Corps, CPLA)
Hong Jizhi
(Zhejiang Meteorological College)

Abstract

The index of maximum density of an $n\times n$ non-negative matrix A is the least integer k such that the number of nonzero entries in A^k is maximized, and denoted by index(A). If a tournament T_n with n vertices has an adjacency matrix $A(T_n)$, $\text{index}(T_n)=\text{index}(A(T_n))$ is called the index of maximum density of T_n. And let $\tilde{I}(n)=\{k\in Z^+ \mid \text{index}(T_n)=k,$ for some tournament $T_n\}$. In this paper, $\tilde{I}(n)$ are completely determined for any n as follows:

1986年11月29日收到.

$$\widetilde{I}(n)=\begin{cases}\{1\} & n=1,2,3\\ \{1,9\} & n=4\\ \{1,4,6,7,9\} & n=5\\ \{1,2,\cdots,8,9\}/\{2\} & n=6\\ \{1,2,\cdots,n+2\}/\{2\} & n=7,8,\cdots,15\\ \{1,2,\cdots,n+2\} & n\geq 16\end{cases}$$

摘　　要

$n\times n$的非负方阵A的广义指数 $\mathrm{index}(A)=\mathrm{Min}\{k\in \mathbf{Z}^+\mid A^k$中非零元个数最大$\}$，$n$阶竞赛图$T_n$，其邻接矩阵为$A(T_n)$。称$\mathrm{index}(T_n)=\mathrm{index}(A(T_n))$为$T_n$的广义指数，$\widetilde{I}(n)=\{k\in Z^+\mid$存在某个$T_n$，$\mathrm{index}(T_n)=k\}$为竞赛图的广义指数集。

本文对一切n，完全确定了$\widetilde{I}(n)$：

$$\widetilde{I}(n)=\begin{cases}\{1\} & n=1,\ 2,\ 3,\\ \{1,\ 9\} & n=4,\\ \{1,\ 4,\ 6,\ 7,\ 9\} & n=5,\\ \{1,\ 2,\ \cdots,\ 8,\ 9\}/\{2\} & n=6,\\ \{1,\ 2,\ \cdots,\ n+2\}/\{2\} & n=7,\ 8,\ \cdots,\ 15,\\ \{1,\ 2,\ \cdots,\ n+2\} & n\geq 16.\end{cases}$$

一个非负的 $n\times n$ 方阵A的**广义指数**，记为 $\mathrm{index}(A)$，定义如下：

$\mathrm{index}(A)=\mathrm{Min}\{k\in \mathbf{Z}^+\mid A^k$中非零元个数最大$\}$。一个非负的$n\times n$方阵$A$是**本原**的，若存在某个正整数$k$，$A^k>0$，并称$\gamma(A)=\mathrm{Min}\{k\in\mathbf{Z}^+\mid A^k>0\}$为$A$的**指数**。显然广义指数是指数的推广，且当 A 是本原时，$\mathrm{index}(A)=\gamma(A)$。若竞赛图$T_n$的邻接矩阵为$A_n$，称$\mathrm{index}(A_n)$为$T_n$的**广义指数**，还常把它记成$\mathrm{index}(T_n)$。称$E(n)=\{k\in\mathbf{Z}^+\mid$存在某个$n\times n$本原矩阵$A$，使$\gamma(A)=k\}$为**指数集**；$I(n)=\{k\in\mathbf{Z}^+\mid$存在某个$n\times n$非负矩阵$A$，使$\mathrm{index}(A)=k\}$为**广义指数集**。称$\widetilde{I}(n)=\{k\in\mathbf{Z}^+\mid$存在某个竞赛图$T_n$，使$\mathrm{index}(T_n)=k\}$为竞赛图的广义指数集。关于本原矩阵的指数集问题，自Wielandt[1]确定$\gamma(A)$的精确上界以来，许多文献研究了$E(n)$[2]-[4]和特殊矩阵类的$E(n)$[5]-[8]。但对于广义指数集，虽对广义指数的上界[9]-[11]有所研究，但对广义指数集本身未见于文献，本文完全确定了$\widetilde{I}(n)$。

在证明主要结果前，先证明两条引理。令$N(A)$表示A中非零元个数，记

$$k_i(n,A_n)=N(A^i)-N(A^{i-1})。$$

阵集簇。令$|\{A_4\}|=l_1$，$|\{A_5\}|=l_2$，$|\{A_m\}|=l_3$。于是若T_n的广义指数为2，则有

$$\left.\begin{array}{l} S_2(n,A_n)<l_1k_2(4,A_4)+\sum\limits_{\{A_5\}}k_2(5,A_5)+\sum\limits_{\{A_m\}}k_2(m,A_m) \\ S_3(n,A_n)\geq l_1k_3(4,A_4)+\sum\limits_{\{A_5\}}k_3(5,A_5)+\sum\limits_{\{A_m\}}k_3(m,A_m)\end{array}\right\}\quad(B)$$

下面对l_1,l_2,l_3进行讨论：

(1) $l_3=0$，由引理1，有$S_3(n,A_n)>S_2(n,A_n)$ 矛盾；

(2) $l_1\neq0,l_3\neq0$或$l_2\neq0,l_3\neq0$，由引理1，2，此时

$S_3(n,A_n)\leq n-m-6\leq3<k_3(4,A_4)+k_3(m,A_m)$，与$(B)$矛盾；

(3) $l_1=l_2=0$，$l_3\neq0$，显然此时$l_3\leq2$。若$l_3=2$，　设$\{A_m\}=\{A_{m'},A_{m''}\}$，于是$S_2(n,A_n)\leq2$，$S_3(n,A_n)\leq1$。由$A_{m'}$，$A_{m''}$的本原性知，

$\mathrm{index}(T_n)=\mathrm{Max}\{r(A_{m'}),r(A_{m''})\}\geq3$ 矛盾。

故剩下仅需考虑$l_1=l_2=0$，$l_3=1$的情况，此时$S_2(n,A_n)\leq n-m-1$，$S_3(n,A_n)\leq n-m-2$。由(B)有$k_2(m,A_m)>S_2(n,A_n)$和$S_3(n,A_n)\geq k_3(m,A_m)$，由引理1知，$m\neq6,7$。故下面总假定$m\geq8$。再由引理2，$S_3(n,A_n)\leq n-m-2<m-2\leq k_3(m,A_m)$，与$(B)$矛盾。

综上所述，定理1成立。#

引理3〔12，§13〕　(α)若竞赛图T_n的邻接阵矩A_n如(A)所示，令η为$A(1),A(2),\cdots.A(l)$中最大阶数，则

$$\mathrm{index}(T_n)\leq\begin{cases}1 & n\leq3\\ 9 & n=4\\ \mathrm{Max}\{\eta+2,9\} & n=5,6\\ n+2 & n\geq7\end{cases}$$

(β) 当$n\geq6$时，对任意的$i(3\leq i\leq n+2)$或当$n\geq16$时，对任意$i(1\leq i\leq n+2)$，则存在某个T_n，它的$\mathrm{index}T(_n)=i$。

证：仅需注意到当T_n是强连通时，$\mathrm{index}(T_n)=\gamma(A_n)$。#

定理2：

$$\widetilde{I}(n)=\begin{cases}\{1\} & n=1,2,3\\ \{1,9\} & n=4\\ \{1,4,6,7,9\} & n=5\\ \{1,2,\cdots,8,9\}/\{2\} & n=6\\ \{1,2,\cdots,n+2\}/\{2\} & n=7,8,\cdots.15\\ \{1,2,\cdots,n+2\} & n\geq16\end{cases}$$

证：由于对任意n，总存在传递竞赛图T_n'，它的$\mathrm{index}(T_n')=1$；又当$n\leq5$时，易直接验证结果成立；当$n\geq6$时，由定理1和引理3立即得到结果。#

参考文献

〔 〕 H. Wielandt, Unzerlegbare, nicht negative Matrizen, Math. Zeitschr. 52 (1950) 642-648.

〔2〕 M. Lewin and Y. Vitek, A system of gaps in the exponent set of primitive matrices, Illinois J. Math. 25 (1) (Spring 1981) 87-98.

〔3〕 Shao Jiayu, On a conjecture about the exponent set of primitive matrices, LAA 65 (1985), 91-123.

〔4〕 Zhang Kemin. On Lewin and Vitek's conjecture about exponent set of primitive matrices, LAA (to appear)

〔5〕 R. A. Brualdi and J. Ross, On the exponent of a primitive nearly reducible matrix. Math. Oper. Res. 5 (1980), 229-241.

〔6〕 J. Ross, On the exponent of a primitive nearly reducible matrix (II), SIAM J. Algebraic Discrete Methods 3 (3) (Sept. 1932) 395-410.

〔7〕 J.W.Moon and N.J.Pullman, On the power of tournament matrices, J, Combin. Theory 3 (1967) 1-9.

〔8〕 Shao Jiayu,, The exponent set of symmetric primitive matrices, Scientia Sinica Ser.A 9 (1986) 931-939.

〔9〕 B.R.Heap and M.S.Lynn' The structure of powers of nonnegative matrices, I. The index of convergence, J.SIAM Appl. Math 14(3) (1966) 610-639.

〔10〕 ——, II. The index of maximum density, ibid. 14 (4) (1666) 762-777.

〔11〕 张克民，关于非负矩阵的幂序列数的一点注记，新疆大学学报(自然科学版) (待发表).

〔12〕 J.W.Moon, Topics on tournaments, Holt, Rinehart, and Winston, New York, (1968).

〔13〕 王鸿德，张克民，非同构的竞赛图Tn(n≤9)表及对应的自同构群，(待发表)