关于非负矩阵的幂序列的注记

张 克 民 （南京大学数学系）

摘 要

n 阶非负方阵，当它是不可约时，它的幂收敛指数、最大密度指数的上界为 $O(n^2)$，特别当 A 是本原时，这两种指数相等，且有精确上界 $\overline{W}_n=(n-1)^2+1$。但对一般的非负矩阵，本文指出：当 $n\to\infty$ 时，它的最大密度指数的上界的无穷大阶比任何幂函数均要高。

关键词 **幂序列，非负矩阵**

n 阶非负方程 A 中，将其非零元均归并为1，所成的(0，1)一矩阵称为 A 的型阵 $\widetilde{A}$。并看成Bool矩阵，施以Bool运算。在幂序列 $\widetilde{A}_1$，$\widetilde{A}_2$，$\widetilde{A}_3\cdots$ 中，记最先重复出现的一对幂为 $\widetilde{A}^k=\widetilde{A}^{k+p}$，这里 k、p 均为正整数，称 $k=k(A)$ 为 A 的幂收敛指数，$p=p(A)$ 为 A 的幂振动周期。记 $\mu(A)=\mathrm{Max}|A^m|$，这里 $|A|$ 表示 A 中非零元个数，称 $\mathrm{index}(A)=\mathrm{Min}\{m\in Z^+|\ |A^m|=\mu(A)\}$ 为 A 的最大密度指数，或称 A 的广义指数。若 $\mu(A)=n^2$，则称 A 为本原的此时 $\mathrm{index}(A)$ 称为 A 的指数记为 $r(A)$、显然当 A 是本原时，$r(A)=\mathrm{index}(A)=k(A)$，$p(A)=1$。但对一般的非负方阵 $k(A)$、$\mathrm{index}(A)$ 是两个不同的参数。对于 $k(A)$，S. Schwarz[4]证明了 $k(A)\leqslant(n-1)^2+1$。而对于 n 阶不可约方阵 A 的 $\mathrm{index}(A)$，李乔、邵嘉裕[5]对它亦给出了精确公式，其阶数为 $O(n^2)$。[1]，[2]，[6]虽对一般的 n 阶非负方阵进行了研究，并得到 $\mathrm{index}(A)$ 的上界，可是用的是矩阵中许多不易直接计算的参数来加以表示的。至于对它的阶的估计，仍然一无所知，本文得到如下结果：

定理 若 $\{A\}$ 是 n 阶的非负矩阵簇，当 $n\to\infty$ 时，$\sup\limits_{\{A\}}\mathrm{index}(A)$ 和 $\sup\limits_{\{A\}}p(A)$ 的无穷大阶比任何幂函数要高，特别比 $\overline{W}_n=(n-1)^2+1$ 要高。

证 由[3]知，对任意 $i>1$，总存在一素数 x_i，且满足 $\alpha^{i-1}<x_i<\alpha^i$。令 $n_i=x_i+1$，

$$A_i=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & & & & & 0 \\ & & & & & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots\cdots & & & 0 \end{pmatrix}_{n_i\times n_i}$$

本文于1987年5月30日收到。

$$B_i=\begin{bmatrix} 0 & A_i & & 0 \\ 0 & A_i & \ddots & A_i \\ & 0 & \ddots & \\ A_i & & & A_i \end{bmatrix}_{x_i n_i \times x_i n_i}$$

及

$$C=\begin{bmatrix} B_2 & & 0 \\ & B_3 & \\ & & \ddots \\ 0 & & B_l \end{bmatrix}_{n\times n}$$

经直接计算得$k(A_i)=1$，$p(A_i)=x_i$，$\mathrm{indx}(A_i)=x_i$。注意到$\mu(B_i)=\mu(\widetilde{B}_i)$且当$k\geq x_i$时有

$$\widetilde{B}_i^k=\begin{bmatrix} \widetilde{A}_i^k & \widetilde{A}_i^k & \cdots & \widetilde{A}_i^k \\ \widetilde{A}_i^k & \widetilde{A}_i^k & \cdots & \widetilde{A}_i^k \\ \cdots\cdots\cdots & & & \\ \widetilde{A}_i^k & \widetilde{A}_i^k & \cdots & \widetilde{A}_i^k \end{bmatrix}_{x_i n_i \times x_i n_i}$$

故还有$k(B_i)=x_i$，$p(B_i)=x_i$，$\mathrm{index}(B_i)=x_i$；于是有：$\mathrm{index}(C)=\mathrm{l.c.m.}[x_2,x_3,\cdots,x_l]=x_2x_3\cdots x_l$和$p(C)=\mathrm{l.c.m.}[x_2,x_2,\cdots,x_l].x_2x_3\cdots x_l$，另一方面，$n=x_2n_2+x_3n_3+\cdots+x_ln_l<2^4+2^6+\cdots+2^{2l}=\frac{1}{3}(2^{2l+2}-2^4)<2^{2l+1}$，$x_2x_3\cdots x_l\geq 2\cdot 2^2\cdots 2^{l-1}=2^{\frac{1}{2}l(l-1)}$。故有

$$x_2x_3\cdots x_l\geq n^{(\log_2 n-4)/8}$$

所以$\sup\limits_{\{A\}}\mathrm{index}(A)\succ n^m$，$\sup\limits_{\{A\}}p(A)\succ n^m$，这里$m$是任一正整数，证毕。

当$n\to\infty$时，对于一般的n阶非负矩阵簇$\{A\}$，$\sup\limits_{\{A\}}\mathrm{index}(A)$，$\sup\limits_{\{A\}}p(A)$的无穷大的精确阶是什么？仍然是一个未解决的问题，有待于进一步研究。

参 考 文 献

1 B.R.Heap and M.S.Lynn, The structure of powers of nonnegative matrices I. The index of Convergence, *J. SIAM Appl Math* vol.14, No.3. (1966), 610—639.

2 —, The strueture of powers of nonnegatve mafrices II. The index of maximum density, *J.SIAM Appl. Math.* vol.14, No.4 (1966), 762—777.

3 华罗庚，数论导引，科学出版社（1975）79.

4 K$_i$ Hang Kim, Boolean Matrix Theory and Applycations, Marcel Dekker Inc. (1982), 218

5 李乔、邵嘉裕，论布尔方阵的幂序列，全国第三届组合数学学术会议材料，苏州(1987).

6 N.J.Pullman, On fhe number of positive entries in the powers of nonnegative matrix, *canad Math Bull* vol.7, No.4 (1964) , 525—538.

A Note of the Power Sequence of Nonnegative Matrices

Zhang Kemin

Abstract

For any nonnegative matrix A with order n, if A is irreducible, the upper bound of maximum density is $O(n^2)$. But for the general nonnegative matrices, this note points out that when $n \to \infty$. the order of infinity of the upper bound of maximum density is great than of any power function.

Key words: Power sequence, nonnegative matrices