高 校 应 用 数 学 学 报
第3卷第3期 Applied Mathematics No3, Vol. 3
1988年9月 A Journal of Chinese Universities Sep. 1988

二部竞赛图中含指定点对的互补回路

张克民 宋增民

（南京大学） （东南大学）

摘 要

设R是任一个k-正则二部竞赛图($k\geqslant 2$)，对R中任意两个不同的点u、v，R中存在一对点不相交且分别具有长4和$4k-4$的回路C_1、C_2，使得u在C_1上，v在C_2上，除非R同构于$R^*_{4,4}$。

一个定向图是一个有向图，其基础图是一个简单无向图，一个二部竞赛图是一个定向图，其基础图是一个简单完全二部图。一个定向图R是k-正则的，若R中任一点v，都有$d^+(v)=d^-(v)=k$,本文所指的路和回路均指简单有向路和回路。设R是n个点的定向图，C_1，C_2是R中任意两条点不相交的回路，若C_1，C_2的长之和为n，则称C_1、C_2是R中**一对互补的回路**。

为叙述的方便，令uv表示从u指向v的弧，设S是R的任一子图，v是R中任一点，引进**记号**：

$$N_s^-(v)=N_R^-(v)\cap V(S),\quad N_s^+(v)=N_R^+(v)\cap V(S);$$

$$d_s^-(v)=|N_s^-(v)|,\qquad d_s^+(v)=|N_s^+(v)|。$$

设$C=x_1y_1x_2y_2\cdots y_kx_1$是$R$中任一回路，如果存在$i$，$N_s^-(v)$或$N_s^+(v)$中含点$x_i$，$x_{i+1}$或$y_i$，$y_{i+1}$，则称$N_c^-(v)$或$N_s^+(v)$含$C$上相邻的点。其它概念和记号见[2]。

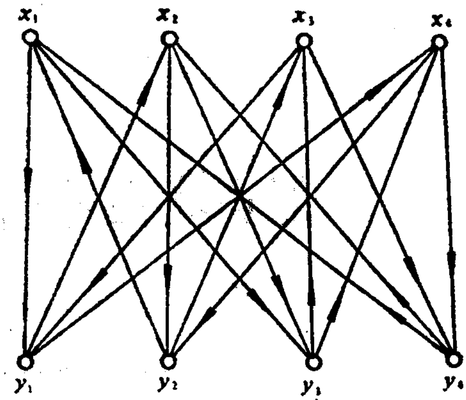
对于普通竞赛图的研究，已取得许多优美的结果，对于二部竞赛图，所得结果相对要少得多，尤其关于回路性质的研究，更主要是对k-正则图。本文研究了k-正则二部竞赛图的互补回路性质，得到比普通竞赛图在某种意义上更强的结果[4]，如下在叙述定理前，首先注意到下页所示的二部正则竞赛图$R_{4,4}^*$。

不难验证，它的任意一对互补的回路C_1、C_2、x_1和x_4总要在同一个回路上。

定理 设R是一个k-正则二部竞赛图，$k\geqslant 2$，u，v是R中任意两个不同的点，则R含有两个点不相交且长分别为4和$4k-4$的回路C_1，C_2，使得u在C_1上，v在C_2上，除非$R\cong R^*_{4,4}$。

本文1987年8月26日收到，1988年5月12日收到修改稿。

为了证明定理，先给出几个引理。



引理1 设C是二部竞赛图R中一条最长回路，$C=v_0v_1\cdots v_mv_0$，$P=u_0\cdots u_k$是$R-C$中长至少为1的路，如果u_kv_1、$v_mu_k\in A$，且存存$j\in\{3,\cdots,m-1\}$，$v_0v_j\in A$或$u_kv_j\in A$，作

$$Z=\{i|v_{i-1}u_0\in A,\ i\in\{j+1,\cdots,m,0\}\},$$

则对任意$l\in Z$，$v_{i-1}v_l\notin A$。

证明：首先，由C是R中的最长回路得 $u_{k-1}v_0\in A$，设存在$l\in Z$，$v_{j-1}v_l\in A$，则由Z的定义，$v_{l-1}u\in A$且 $l\in\{j+1,\ \cdots,\ m,0\}$。由 $v_0v_j\in A$ 或 $u_kv_j\in A$，分别得比C更长的回路 $v_{j-1}v_l\cdots v_mv_0v_j\cdots v_{l-1}u_0\cdots u_kv_1\cdots v_{j-1}$和$v_{j-1}v_l\cdots v_mu_kv_j\cdots v_{l-1}u_0\cdots u_{k-1}v_0v_1\cdots v_{j-1}$，与$C$的选择矛盾，引理得证。

引理2 设$C=v_1\cdots v_mv_1$是R中任一回路，$P=u_0\cdots u_k$是$R-C$中任一长为奇数的路，如果有$d_C^+(u_k)+d_C^-(u_0)>\frac{1}{2}|V(C)|$，则$P$和$C$可构成长$m+k+1$的回路。

证明：如果C上存在两点v_i、v_{i+1}，$v_iu_0\in A$，$u_kv_{i+1}\in A$，则引理成立。否则，若$v_i\in N_C^-(u_0)$，$v_j\in N_C^+(u_k)$，且$(N_C^-(u_0)\cup N_C^+(u_k))\cap\{v_{i+1},\cdots,v_{j-1}\}=\phi$，则 $j-i\geqslant3$，从而，$|V(C)|\geqslant2\cdot d_C^-(u_0)-1+2\cdot d_C^+(u_k)-1+2=2d_C^+(u_0)+2d_C^+(u_k)$，矛盾。引理得证。

下面给出定理的证明。

证明：设R的点的二部分划为(X,Y)，则$|X|=|Y|=2k$，设u，v是R中的两个指定点，不妨设$x_1=u\in X$。首先证明R中含长为4的回路，它含x_1而不含v。事实上，如果$v\in X$，则$N_R^+(x_1)$中任取一点y_1，对$\forall x\in N_R^+(y_1)$，由R的正则性，有$|N_R^+(x)\cap N_R^-(x_1)|\geqslant1$，从而由$k\geqslant2$，总可在$N_R^+(y_1)$中取异于$v$的点$x_2$，在$N_R^+(x_2)\cap N_R^-(x_1)$中取一点$y_2$，于是$C_1=x_1y_1x_2y_2x_1$即为所求的4-回路，类似可证$v\in Y$时，同样可得这样的4-回路，我们选择这样的$C_1$，使$R-C_1$中最长回路的长度尽可能大。显然子竞赛图$R_1=R-C_1$有$4(k-1)$个点，最小内次和外次至少$k-2$，设$C$是$R_1$中最长回路，若$|V(C)|=4(k-1)$，则定理成立。故下面总假设

$$|V(C)|\leqslant4(k-2)+2 \qquad (1)$$

如果$k=2$，则R_1中有4个点，设为x_3，x_4，y_3，y_4。由(1)式得R_1中不存在回路，则存在点w，$d_{R_1}^-(w)=0$，若$w\in X$，不失一般性，令$w=x_3$，故x_3y_3、$x_3y_4\in A$，于是分别依次考虑点x_3、y_1、y_2、x_4的正则性，有y_1x_3，y_2x_3；x_4y_1，x_4y_2；y_3x_4，$y_4x_4\in A$，剩下的四条弧，确定其中一条弧的定向，则其余三条弧的定向亦就唯一确定了，且不论如何定向，它们是同构的。故不失一般性，假定$x_1y_3\in A$，于是有y_3x_2、x_2y_4，$y_4x_1\in A$，若$y_3\neq v$，则取回路$x_1y_3x_2y_2x_1$和$y_1x_3y_4x_4y_1$；若$y_3=v$，则取回路$x_1y_1x_2y_4x_1$和$y_2x_3y_3x_4y_2$，它们分别是R中一对互补的回路。若$w\in Y$，不失一般性，令$w=y_3$，类似上述讨论，易知此时$R\cong R_{4,4}^*$。故下面总假设$k\geqslant3$。

设$P=u_0\cdots u_m$是R_1-C中一条最长路，则$m\geqslant1$及

$$N^-_{R_1}(u_0)\subseteq V(P)\cup V(C),\quad N^+_{R_1}(u_m)\subseteq V(P)\cup V(C) \tag{2}$$

如果$d^+_C(u_m)>0$和$d^-_C(u_0)>0$，则由C的最长性得（见[1]定理2的证明）：

$$|V(C)|\geqslant 2d^+_c(u_m)+2d^-_c(u_0)+m-1 \qquad m\text{是奇数} \tag{3}$$

$$|V(C)|\geqslant 2d^+_c(u_m)+2d^-_c(u_0)+m-2 \qquad m\text{是偶数} \tag{4}$$

如果$k=3$，易得$|V(C)|\geqslant 4(k-2)$；如果$k\geqslant 4$，则R_1是强连通的，不然，考虑到反向图，不失一般性存在分支B‘$|B|\leqslant 2(k-1)$，它的点均指向R_1中所有其它分支的点。显然，B中点在R_1中的内次之和$\leqslant\frac{1}{4}|B|^2$，注意到$B$中任一点在$R_1$中的内次$\geqslant k-2$，从而应有$\frac{1}{4}|B|^2\geqslant|B|(k-2)$。即$|B|\geqslant 4(k-2)$，于是有$2(k-1)\geqslant 4(k-2)$，即$k\leqslant 3$，矛盾。从而由[3]中定理8得$|V(C)|\geqslant 4(k-2)$。因此$1\leqslant m\leqslant 3$。从而除$m=3$，$k=3$且$u_3u_0\in A$同时成立的情况外，由$k\geqslant 3$，知$d^+_C(u_m)>0$和$d^-_C(u_0)>0$，于是总有(3)、(4)式成立。以下由$C$的长度，分两种情况来证明。

情况1 $|V(C)|=4(k-2)$

根据P的长度，证明分三部份。

1.1 $m=3$，即R_1-C中存在Hamilton路，如果$d^+_C(u_3)+d^-_C(u_0)\geqslant 2(k-2)$，且$k=3$，$u_3u_0\in A$不同时成立，则由(3)式得：$|V(C)|\geqslant 4(k-2)+2$，矛盾；如果$d^+_C(u_3)=k-3$或$d^-_C(u_0)=k-3$，从而$u_3u_0\in A$。即$R_1-C$中含Hamilton回路，从而由[3]中引理7得$R_1$不是强连通的。因此，$k=3$。故剩下仅是$k=3$，$u_3u_0\in A$的情况，类似[3]中引理7的证明，可得$C$和$P$之间所有可能的弧都是从$C$指向$P$的，标号$C=x_3y_3x_4y_4x_3$，不妨设$u_0\in X$，从而由正则性知，$P$和$C_1$之间，$C_1$和$C$之间所有可能的弧都是由前者指向后者，记该图为$R_0$。此时不失一般性，可设$y_3$、$u_0\neq v$，从而回路$x_1y_3u_0y_2x_1$和$x_2y_4x_3u_1u_2y_1x_4u_3x_2$，是$R_0$中一对互补的回路

1.2 $m=2$。则$d^-_C(u_0)\geqslant k-2$，$d^+_C(u_2)\geqslant k-2$。由(4)式得$|V(C)|\geqslant 4(k-2)$，故

$$d^-_c(u_0)=k-2,\ d^+_c(u_2)=k-2 \tag{5}$$

且不失一般性，可设$v\in C$（否则，由C的长度和(5)式，可考虑另一含v的最长回路）。设R_1-C中不在P上的唯一点为u_3，则由P的最长性得u_0u_3、$u_3u_2\in A$。考虑弧u_0u_1，由C的最长性和(5)式，根据引理2得$d^+_C(u_1)\leqslant k-2$。考虑弧u_1u_2，类似地可得$d^-_C(u_1)\leqslant k-2$。

从而 $$d^-_{C_1}(u_1)=d^+_{C_1}(u_1)=1 \tag{6}$$

若$u_0\in X$，则由(5)式有：$N^-_{C_1}(u_0)=\{y_1,y_2\}$、$N^+_{C_1}(u_2)=\{y_1,y_2\}$；由(6)式得：$x_1u_1\in A$时，$u_1x_2\in A$；$x_2u_1\in A$时，$u_1x_1\in A$。这时分别考虑回路$C'_1=x_1u_1x_2y_2x_1$和$C''_1=x_1y_1x_2u_1x_1$，$R-C'_1-C$和$R-C''_1-C$中最长路分别为$u_0u_3u_2y_1$和$u_0u_3u_2y_2$，其长为3，从而归结为1.1的情况而得证。

若$u_0\in Y$，类似$u_0\in X$的情况，同样可归结为1.1的情况而得证。

1.3 $m=1$。类似于1.2得$d^-_C(u_0)=k-2$，$d^+_C(u_1)=k-2$，且可设$v\in C$。设R_1中不在P和C上两点为u_2，u_3，$u_2u_3\in A$。则由P的最长性，u_1和u_3同属X或Y，否则有$m\geqslant 2$。从而必有u_2u_1、$u_0u_3\in A$。类似地有$d^-_C(u_2)=k-2$，$d^+_C(u_3)=k-2$。考虑到反向图，不失

一般性，可令$u_0\in X$，则$N^-_{C_1}(u_0)=N^-_{C_1}(u_2)=\{y_1,y_2\}$，$N^+_{C_1}(u_1)=N^+_{C_1}(u_3)=\{x_1,x_2\}$，此时考虑回路$C_1'=x_1y_1u_0u_1x_1$，$R-C_1'-C$中含长为3的路$x_2y_2u_2u_3$，从而归结为1.1的情况而得证。

情况2 $|V(C)|=4(k-2)+2$

设R_1中不在C上的两点为x_3，y_3，若$x_3y_3\in A$，由(3)式得$4(k-2)+2\geqslant 2d^-_C(x_3)+2d^+_C(y_3)$，即$d^-_C(x_3)+d^+_C(y_3)\leqslant 2(k-2)+1$，从而由正则条件得

$$d^-_{C_1}(x_3)+d^+_{C_1}(y_3)\geqslant 3 \tag{7}$$

类似地，若$y_3x_3\in A$，则有

$$d^+_{C_1}(x_3)+d^-_{C_1}(y_3)\geqslant 3 \tag{7'}$$

2.1 $d^-_{C_1}(x_3)+d^+_{C_1}(y_3)=3$

此时$|V(C)|=2(d^-_C(x_3)+d^+_C(y_3))$。且或者$d^-_{C_1}(x_3)=2$，或者$d^+_{C_1}(y_3)=2$，根据$v\in C$和$v\notin C$分别讨论

2.1.1 v在C上。

(一)$d^-_{C_1}(x_3)=2$，则$d^+_{C_1}(y_3)=1$，因此，$y_3x_1\in A$时，$x_2y_3\in A$；$y_3x_2\in A$时，$x_1y_3\in A$。分别考虑$C_1'=x_1y_1x_2y_3x_1$和$C_1''=x_1y_3x_2y_2x_1$，由C_1的取法，C是$R-C_1'$和$R-C_1''$中的最长回路，对C_1'，$R-C_1'-C$中两点为x_3，y_2，$y_2x_3\in A$，$d^-_{C_1}(y_2)=1$ $d^+_{C_1}(x_3)=1$这与(7′)式矛盾。对C_1''类似地可得矛盾。

(二)$d^+_{C_1}(y_3)=2$，则$d^-_{C_1}(x_3)=1$。若$y_1x_3\in A$，则考虑$C_1'=x_1y_1x_3y_3x_1$及点x_2、y_2，$x_2y_2\in A$，$d^{-\prime}_{C_1}(x_2)=2$，$d^{-\prime}_{C_1}(y_2)=1$，由(一)的讨论可得矛盾。若$y_2x_3\in A$，则$x_3y_1\in A$，由正则条件得$d^+_C(y_3)=k-2$，$d^-_C(x_3)=k-1$，从而由C的最长性，可以标号C的点为$C=x_4y_4\cdots y_{2k}x_4$使$y_{2k}x_3$、$y_{2k-1}x_3$、$y_3x_5\in A$。从而

$$x_{2k}y_3、x_{2k}y_4、x_3y_4、x_4y_3\in A \tag{8}$$

考虑点x_{2k}的外次，如果$|N^+_C(y_3)\cup N^+_C(y_4)|>k-2$，注意到$x_{2k}y_{2k}\in A$，由(8)式和引理1可得$d^+_C(x_{2k})>k$，矛盾。因此

$$N^+_C(y_3)=N^+_C(y_4),\quad y_1x_{2k}、y_2x_{2k}\in A \tag{9}$$

进一步，$N^+_C(y_3)$中不含C上相邻点。否则，设x_i、x_{i+1}是$N^+_C(y_3)$中的两个点，考虑点y_i的外次，由引理1和$d^-_C(x_3)=k-1$，又注意到x_3y_i、$x_3y_{i-1}\in A$和$x_iy_i\in A$可得$d^+_C(y_i)<k-2$，从而$d^+_R(y_i)<k$。矛盾。

(1) $x_{2k}=v$，由$N^+_C(y_3)$中不含C上相邻点得$N^+_C(y_3)$中任一点x_i，有$x_3y_{i-1}\in A$。由于$d^+_C(y_3)=k-2$，$d^-_C(x_3)=k-1$，故有$y_{i-2}x_3\in A$。从而由(7)式和(一)的讨论，可设$y_{i-1}x_1\in A$。这样，C上除y_4外还有$k-3$个点，它们都指向x_1。因y_2x_1，$y_3x_1\in A$，所以由正则条件得$x_1y_{2k}\in A$。这时由(9)式回路$x_1y_{2k}x_4y_3x_1$和$y_{2k-1}x_3y_1x_2y_2x_{2k}y_4x_5\cdots y_{2k-1}$是满足要求的一对互补的回路。

(2) $x_{2k}\neq v$。考虑回路$C_1'=x_1y_1x_{2k}y_3x_1$，我们证明：点$y_2,x_3,x_4,y_4,x_5,\cdots,y_{2k-1}$可构

成长$4(k-2)+2$的回路C'

如果$d^-_{C_1}(x_4)=2$，则考虑回路$C_2=y_{2k-1}x_3y_4x_5^-\cdots y_{2k-1}$，$R-C_1'-C_2$中4点为$x_2$、$y_2$、$x_{2k}$、$x_4$，$x_2y_2$、$y_{2k}x_4$、$y_2x_4\in A$。考虑弧$y_2x_4$，$d^-_{C_2}(y_2)=k-1$，$d^+_{C_2}(x_4)=k-1$。由引理2得点$y_2$，$x_4$和$C_2$可构成回路$C'$。

如果$d^-_{C_1}(x_4)=1$，则由(9)式，$N^-_C(x_3)=N^-_C(x_2)$，从而$y_{2k-1}x_4\in A$。考虑回路$C_2=y_{2k-1}x_4y_4x_5\cdots y_{2k-1}$和弧$y_2x_3$，类似可得点$y_2$、$x_3$和$C'$可构成长$4(k-2)+2$的回路$C'$。

因此，考虑C_1'和C'及点x_2，y_{2k}，$d^{-\prime}_{C_1}(x_2)=2$，$d^{+\prime}_{C_1}(y_{2k})\leqslant 1$，由(7)、(7′)有$d^{+\prime}_{C_1}(y_{2k})=1$和$x_2y_{2k}\in A$，归结为(一)的情况而得证。

2.1.2 v不在C上，则$v\in\{x_3, y_3\}$

(一) $d^-_{C_1}(x_3)=2$，则$d^+_{C_1}(y_3)=1$。由C的最长性，可以标号$C=x_4y_4x_5^-\cdots y_{2k}x_4$，使$y_{2k}x_3\in A$，$y_3x_5\in A$，$y_3x_6\in A$。从而

$$x_3y_4、x_4y_3、x_3y_5、x_4y_5\in A \tag{10}$$

考虑点y_5^-的外次，类似于2.1.1(二)的讨论得：

$$N^-_c(x_3)=N^-_c(x_4),\quad y_5x_1,\ y_5x_2\in A \tag{11}$$

因此。由2.1.1的讨论，只需对$y_3=v$，$d^+_{C_1}(y_4)=2$证明。

因为$y_1x_5\in A$时，回路$x_1y_1x_5y_5x_1$和$y_{2k}x_4y_4x_2y_2x_3y_3x_6\cdots y_{2k}$是满足要求的一对互补回路，所以，假设$x_5^-y_1\in A$。考虑回路$C_1'=x_1y_1x_3y_4x_1$和$C_2=y_{2k}x_4y_3x_6\cdots y_{2k}$，考虑弧$y_5x_2$，由正则条件和引理2，$y_5$、$x_2$和$C_2$构成长$4(k-2)+2$的回路$C'$。对点$y_2$、$x_5$，$d^{+\prime}_{C_1}(y_2)=2$，$p^{-\prime}_{C_1}(x_5)=1$。则由(7)式得$x_5y_2\in A$，归结为2.1.1(二)的情况而得证。

(二)、$d^+_{C_1}(y_3)=2$，则$d^-_{C_1}(x_3)=1$。与2.1.1(二)相同，标号$C=x_4y_4\cdots y_{2k}x_4$，使$y_{2k}x_3$，$y_{2k-1}x_3$、$y_3x_5\in A$，且有(8)、(9)式成立。由2.1.1的讨论，只需对$x_3=v$，$d^-_{C_1}(x_4)=2$证明。

与(一)类似地对$x_1y_{2k}\in A$或$y_{2k}x_1\in A$讨论，或者得定理成立，或者可归结为2.1.1。

2.2 $d^-_{C_1}(x_3)+d^+_{C_1}(y_3)=4$

注意到C是R_1中的最长回路，故我们总可对C适当标号，使$C=x_4y_4x_5\cdots y_{2k}x_4$，有$y_{2k}x_3$，$y_3x_5^-$，$x_3y_4$，$x_4y_3\in A$，或$y_{2k}x_3$，$y_3x_6$，$x_3y_4$，$x_3y_5$，$x_4y_3$，$x_5y_3$，$x_4y_5\in A$。分别考虑$y_{2k}x_3y_3x_5\cdots y_{2k}$，$x_4y_4$；或$y_{2k}x_3y_4x_5y_3x_6\cdots y_{2k}$，$x_4y_5$。故不失一般性，总可假定$x_3$、$y_3\neq v$。

2.2.1 $N^+_C(y_3)$或$N^-_C(x_3)$含C上相邻点。此时可分两种情况。

(一) 可适当标号$C=x_4y_4x_5\cdots y_{2k}x_4$，使$y_3x_5$，$y_{2k}x_3\in A$且$y_3x_6\in A$或$y_{2k-1}x_3\in A$。假设$y_{2k-1}x_3\in A$，对$y_3x_6\in A$可类似地讨论。显然，$x_{2k}y_3\in A$，$x_{2k}y_4\in A$。由2.1的讨论，可设$d^+_{C_1}(y_4)=d^-_{C_1}(x_4)=2$。考虑点$x_{2k}$的内次，由引理1，类似于2.1中的讨论得

$$N^+_c(y_3)=N^+_c(y_1),\quad y_1x_{2k}、\ y_2x_{2k}\in A.$$

若$x_{2k}\neq v$，则类似于2.1.1中(二)(2)的讨论，考虑$C_1'=x_1y_1x_{2k}y_3x_1$，点y_2、x_4和回路$y_{2k-1}x_3y_4x_5\cdots x_{2k-1}$，由引理2可知；可构成长$4(k-2)+2$的回路$C'$。考虑$C_1'$和$C'$及另外两点$x_2$，$y_{2k}$，$d^{-\prime}_{C_1}(x_2)=2$，$d^{+\prime}_{C_1}(y_{2k})=1$，由(7)式得$x_2y_{2k}\in A$，从而归结为2.1的情况而得证。

若$x_{2k}=v$，则考虑$C_1'=x_1y_1x_3y_3x_1$和$C_2=x_{2k}y_4x_5\cdots x_{2k}$，不在$C_1'$和$C_2$上的4点为$x_2$、$y_2$、$y_{2k}$、$x_4$，与上述$x_{2k}\neq v$时类似地讨论可得$y_2$、$x_4$可和$C_2$构成长$4(k-2)+2$的回路$C'$。考虑$C_1'$和$C'$及另外两点$x_2$、$y_{2k}$，由于$d^-_{C_1'}(x_2)=2$，故由(7)、(7′)式和2.1的讨论可设$x_2y_{2k}$、$y_{2k}x_1\in A$。此时考虑回路$C_1''=x_1y_1x_2y_{2k}x_1$和$C_2''=y_{2k-1}x_3y_3x_5\cdots y_{2k-1}$，其它4点为$x_{2k}$、$x_4$、$y_2$，$y_4$，类似与上述$x_{2k}\neq v$的讨论，$y_2$、$y_4$可和$C_2''$构成长$4(k-2)+2$的回路$C''$。此时$d^-_{C_1''}(x_{2k})=1$，故可归结为2.1。

（二） 可适当标号$C=x_4y_4\cdots x_{2k}y_{2k}x_4$，使$y_3x_6$、$y_{2k}x_3$、$x_4y_3$、$x_5y_3$、$x_3y_4$、$x_3y_5\in A$，且有$y_3x_7\in A$或$y_{2k-1}x_3\in A$，不妨设$y_{2k-1}x_3\in A$。由$d^+_C(y_3)=d^-_C(x_3)$得此时必有$y_3x_7\in A$，否则，属于(一)的情况。显然，$x_4y_5$、$x_{2k}y_5\in A$。由引理1知，当$y_5x_j\in A$时，有$y_{j-1}x_{2k}\notin A$。由于$d^+_C(y_5)\geqslant k-2$，以及$x_{2k}y_{2k}$、$x_{2k}y_3\in A$，故由$x_{2k}$的正则性，必有$y_4x_{2k}\in A$；同理，对称地有$y_6x_5\in A$，这时，回路

$$y_{2k-1}x_3\,y_4\,x_{2k}\,y_{2k}\,x_4\,y_5\,x_6\,y_6\,x_5\,y_3\,x_7\cdots y_{2k-1}$$

和C_1是一对互补的回路。

2.2.2 $N^-_C(x_3)$和$N^+_C(y_3)$不含C上相邻点。称具有交叉性，即剩下要讨论的图具有如下性质P：

对R中任意仅含一个指定点$x_1=u$的长为4的回路$\tilde{C}_1$和$R-\tilde{C}_1$中含v的任意长为$4(k-2)+2$的回路$\tilde{C}$，设$R-\tilde{C}_1-\tilde{C}$中两点为x、y，$xy\in A$，都有$d^-_{\tilde{C}_1}(x)+d^+_{\tilde{C}_1}(y)=4$，且$N^-_{\tilde{C}}(x)$和$N^+_{\tilde{C}}(y)$具有交叉性

（一） 可适当标号$C=x_4y_4x_5\cdots y_{2k}x_4$，使$y_3x_5$、$y_{2k}x_3\in A$。由2.1的讨论可设$d^-_{C_1}(x_4)=d^+_{C_1}(y_4)=2$。从而考虑$C_1'=x_1y_1x_3y_3x_1$，因为$y_4x_2\in A$，由性质$P$易得$x_2y_{2k}\in A$。考虑$C$和$C_1'$及点$x_2$、$y_2$，因$y_2x_4\in A$，由性质$P$得$x_{2k}y_2\in A$；考虑$C_1'$和回路$x_{2k}y_2x_4y_4x_5\cdots x_{2k}$及$x_2y_{2k}$，由2.1的讨论可设$y_{2k}x_1\in A$，即$d^-_R(x_1)\geqslant 4$。因此$k\geqslant 4$。设$y_i\in N^-_C(x_3)$，$x_j\in N^+_C(y_3)$，且$\{x_{i+1}, y_{i+1}, \cdots, x_{j-1}, y_{j-1}\}\cap(N^-_C(x_3)\cup N^+_C(y_3))=\phi$。由$C$的最长性，$j-i\geqslant 2$。由$C$的长度和正则条件，$j-i\leqslant 3$。如果$j-i=2$，考虑回路$y_{2k}x_4y_4\cdots y_ix_3y_3x_{i+2}\cdots y_{2k}$及两点$x_{i+1}$、$y_{i+1}$，$x_{i+1}y_{i+1}\in A$。由2.1的讨论可设$d^+_{C_1}(y_{i+1})=d^-_{C_1}(x_{i+1})=2$，即有$y_{i+1}x_1\in A$。如果$j-i=3$，则由假设，$x_3y_{i+1}$，$x_3y_{i+2}\in A$；$x_{i+1}y_3$、$x_{i+2}y_3\in A$，从而$x_{i+1}y_{j-1}\in A$，否则得比$C$更长的回路。考虑回路$y_{2k}x_4y_4\cdots y_ix_3y_{i+1}x_{i+2}y_3x_{i+3}\cdots y_{2k}$和弧$x_{i+1}y_{j-1}$，由2.1的讨论，可设$d^-_{C_1}(x_{i+1})=d^+_{C_1}(y_{j-1})=2$，即有$y_{i+1}x_1\in A$。因此，由性质$P$和$d^+_C(y_3)=d^-_C(x_3)=k-2$，且注意到$y_{2k}x_1\in A$，得$d^-_R(x_1)>k$，与正则性矛盾。

（二）不属于(一)的情况，则由交叉性和正则条件得$k=3$，且可标号$C=x_4y_4x_5y_5x_6y_6x_4$，使得$N^-_C(x_3)=\{y_6\}$，$N^+_C(y_3)=\{x_6\}$。由C的最长性，可设$x_4y_5\in A$，于是由x_4，y_5的正则性得$N^-_R(x_1)=\{y_2, y_3, y_5\}$，$N^-_R(x_2)=\{y_1, y_3, y_5\}$。因此，$x_1y_4$、$x_2y_4\in A$。但这与$y_4$的正则性矛盾。

综上所述，完成了定理的证明。

参 考 文 献

[1] Ayel, J.: Degrees and longest paths in bipartite digraphs, Annals of Discrete Math., No 17, (1983), 33-38

[2] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R.: Graph Theory with Application, Amer. Elsevier, New York, 1976.

[3] Jackson, B.: long paths on cycles in oriented graphs, J.Graph Theory, No 5, (1981), 145-157.

[4] Reid, K.B.: Two complementary circuits in two-connected tournaments, Annals of Discrete Math.: No 27, (1985), 321-334.

COMPLEMENTARY CYCLES CONTAINING A PAIR OF FIXED VERTICES IN BIPARTITE TOURNAMENTS

Zhang Kemin

(Nanjing University)

Song Zengmin

(Southeast University)

Abstract

Let R be a k-diregular bipartite tournament, $(k\geqslant 2)$ and u, vbetwo distinct vertices in R. Denote a cycle of length r by Cr. Then there exist a pair of vertex-disjoint cycles C_4 and C_{4k-4} with $u\in C_4$ and $v\in C_{4k-4}$ in R, except R is the especial 8-digraph $R^*_{4,4}$.