Hamilton 二部竞赛图*

张克民
(南京大学)

宋增民
(东南大学)

王建中
(太原机械学院)

ON HAMILTONIAN BIPARTITE TOURNAMENTS

Zhang Kemin
(Nanjing University, 210008)

Song Zengmin
(Southeast University, 210018)

and

Wang Jianzhong
(Taiyuan Institute of Machinery, 030051)

Abstract

Let $T=(X,Y;A)$ be a bipartite tournament with $|X|=|Y|=n+2$. This paper proves that: if for any $u,v\in T$ with $uv\notin A$, it implies $d^+(u)+d^-(v)\geqslant n$, then T is Hamiltonian except some special cases which are described. As coroliaries of this result. we get several known results [7]-[9] about completementary cycles of diregular bipartite tournaments.

摘　要

设$T=(X,Y;A)$是一个二部竞赛图,且满足$|X|=|Y|=n+2$,本文证明了:若对于 T 中任

* 1990年3月10日收到;国家自然科学基金资助项目

意的二点$u,v,uv\notin A$均有$d^+(u)+d^-(v)\geqslant n$,则除了二类特殊图类外,T是Hamiltonian,且这两类特殊图类已被刻划,已知的有关正则和几乎正则二部竞赛图是Hamiltonian,以及正则二部竞赛图中关于互补回路的几个结果,均可作为本文结果的推论.

设$T=(X,Y;A)$是一个二部竞赛图.T为等部的,即$|X|=|Y|$,是T存在Hamilton回路的必要条件,因此本文仅讨论等部二部竞赛图.对任意$u\in X\bigcup Y$如果$d^+(u)=d^-(u)=k$,则称T为k–正则二部竞赛图;如果$d^+(u),d^-(u)=k$或$k+1$,则称T为几乎k–正则二部竞赛图.设S是T的任一子图,u是T中任一点,引进记号.

$$N_s^+(u)=N_T^+(u)\bigcap V(S);N_s^-(u)=N_T^-(u)\bigcap V(S);$$

$$d_s^+(u)=|N_s^+(u)|;\quad d_s^-(u)=|N_s^-(u)|.$$

设M,N是T中的两个不相交的点集,记号$M\Rightarrow N$表示对任意的$u\in M,v\in N$总有$uv\in A$.文中其它没有定义的概念和符号.在[1]中可找到.

$T(k_1,k_2,k_3,k_4)$表示一个特殊的二部竞赛图,它的点集可剖分成四个点独立集B_1,B_2,B_3,B_4,使得$|B_i|=k_i(i=1,2,3,4)$,及对任意$i(i=1,2,3,4)B_i\Rightarrow B_{i+1}$,这里足标的加法是关于模4加法.还用$\tilde{T}(l_1+1,l_2+1,l_2,l_1)$表示另一类特殊的二部竞赛图.对任意$T\in\tilde{T}(l_1+1,l_2+1,l_2,l_1)$,$T$是由$T(l_1+1,l_2+1,l_2,l_1)$通过改变$B_3$到$B_4$和$B_4$到$B_1$之间的一些弧的方向,且对任意$b_3\in B_3,b_1\in B_1$满足$d_{B_4}^-(b_3)\leqslant 1,d_{B_4}^+(b_1)\leqslant 1$所得到的图或它的反向图,

关于二部竞赛图中Hamilton回路的研究,已知的结果甚少,[2][3][4]中得到正则和几乎正则二部竞赛图是Hamiltonian,除非它全构于$T(k+1,k+1,k,k)$

有向图中的2–因子是指由两两不相交的有向回路的并构成的生成子图.[5]有如下结果,

定理A 二部竞赛图T是Hamiltonian当且仅当T是强连通的,且在T中含有一个2–因子.

本文的主要结果是下列定理.

定理 设$T=(X,Y;A)$是一个二部竞赛图,$|X|=|Y|=m+2(m\geqslant 3)$.如果对于$T$中任意两点$u,v,uv\notin A$,总有$d^+(u)+d^-(v)\geqslant m$,则$T$是Hamiltonian,除非$T$全构于$T(k+2,k+2,k,k)$或$T$属于$\tilde{T}(m+2-l,l+1,l,m+1-l)$,这里$\frac{m-1}{2}\leqslant l\leqslant\frac{m}{2}+1$.

证明 首先证明T是强连通的.若不然,设T的有向连通分支为$C_1,C_2,\cdots,C_r$,其中$C_i,C_j(i<j)$间所有可能的弧均由C_i中的点指向C_j中的点,取C_1中的点v,使$d_{c_1}^-(v)\leqslant\frac{|C_1|}{4}$,取$C_r$中的点$u$,使$d_{C_r}^+(u)\leqslant\frac{|C_r|}{4}$.于是由定理条件有$m\leqslant d^+(u)+d^-(v)=d_{c_r}^+(u)+d_{c_1}^-(v)\leqslant\frac{1}{4}(|C_1|+|C_r|)\leqslant\frac{1}{4}(2m+4)$.这与$m\geqslant 3$相矛盾.

2.3　$R_2=\phi$.则由(2)知 R 中最多除一点外每点 r 均有$d_s^-(r)=1$,由(3)得$|R|\geqslant\frac{m}{2}>1$,故存在$r\in R,d_s^-(r)=1$.从而由(4)得$l\geqslant\frac{m-1}{2}$,又由(3)得$l\leqslant\frac{m}{2}+1$.如果存在$q\in Q,d_R^-(q)\geqslant 2$,则不妨设$rq\in A,r\in R$且$d_s^-(r)=1$,由定理条件有$m\leqslant d^+(q)+d^-(r)\leqslant|R|-2+|Q|-1+1=m-1$,矛盾,因此$T\in\tilde{T}(m+2-l,l+1,l,m+1-l)$,其中$\frac{m-1}{2}\leqslant l\leqslant\frac{m}{2}+1$.

综上所述,定理得证.□

由定理可得到许多熟知的结果作为它的推论.

若有向图 D,具有 2m 个顶点.对每个$k(2\leqslant k\leqslant m)$和 D 中的任意顶点 v,D 中总含有长度为 $2k$ 包含 v 点的回路,则称 D 具有点泛偶回路性,由[6]中定理 1,有

推论 1. T 是满足定理条件的二部竞赛图,则 T 具有点泛偶回路性,除非 T 全构于 $T(k,k,k,k)$或 $T(k+2,k+2,k,k)$或 T 属于 $\tilde{T}(m+2-l,l+1,l,m+1-l)$,这里$\frac{m-1}{2}\leqslant l\leqslant\frac{m}{2}+1$.

推论 2　设 T 是二部竞赛图,具有$4k+4$个顶点$(k\geqslant 2)$,若$\delta^-(T)\geqslant k,\delta^+(T)\geqslant k$,则 T 是 Hamiltonian,除非 T 全构于$T(k+2,k+2,k,k)$或 T 属于$\tilde{T}(k+2,k+1,k,k+1)$.

推论 3[2,3,4],正则和几乎正则二部竞赛图 T 是 Hamiltonian,除非$T\cong T(k+1,k+1,k,k)$.

证　易验证 T 满足定理的条件,但定理结论的两类图中仅$T(k+1,k+1,k,k)$是一张几乎正则的二部竞赛图而得证.

令C_k表示长为 k 的有向回路,称C_k和$C_{n-k}$$(3\leqslant k\leqslant n-3)$是 n 个顶点的有向图 D 的互补回路当且仅当C_k和C_{n-k}是 D 中两个顶点不相交的回路.

将$T(k,k,k,k,)$中的某一 4—回路$u_1u_2u_3u_4$,上弧反向,这里$u_i\in B_i,i=1,2,3,4$,最后得到之图记为:$\hat{T}(k,k,k,k)$.今又将$\hat{T}(k,k,k,k)$中的某些 4—回路$v_1(i)v_2(i)u_3v_4(i)$上的弧反向,这里$i=1,2,\cdots,m\leqslant k-1,v_j(i)\in B_j\setminus\{u_j\}$,且当$i\neq k$时有$v_2(i)\neq v_2(k),v_4\neq v_4(k)$,最后所得之图记为$T^*(k,k,k,k)$.

在[7],[8],[9]中,研究了正则两部竞赛图的互补回路性质,利用定理,检查相应被排除的非 Hamilton 图,仝样可得到上述性质.

推论 4[9]　设$T=(X,Y;A)$是一个$k(\geqslant 4)$正则二部竞赛图,任一指定弧$e=uv\in A$,异于 u,v 的任一指定点$w\in X\bigcup Y$,则 T 中存在两条点互不相交的回路C_4和C_{4k-4}使$e\in C_4,w\in C_{4k-4}$,除非$T\in T^*(k,k,k,k)$

证　首先证明 T 中含有C_4且有$e\in C_4,\omega\notin C_4$.事实上,若$\omega\in X$,取$x\in N^+(v)$使$x\neq\omega$,由于$k\geqslant 4$,这种 x 是存在的.由 T 的 k—正则性,存在$y\in N^-(u)$使得$xy\in A$,于是$C_4=uvxy$即为所求.类似地对$\omega\in Y$的情况,结论也成立.下面我们设$C_4=uvxy$.

下面假设 T 不是 Hamiltonian,由定理 A 和[1]中的定理 5.2(即匹配理论中著名的 Hall 定理) 知存在$P\subseteq X$或 Y,使得$|P|>|N^+(P)|$,不失一般性设$P\subseteq X$,令$N^+(P)=Q$, $R=X\setminus P, S=Y\setminus Q$.考察$p\in P, s\in S$,由定理条件,有

$$m\leqslant d^+(p)+d^-(s)\leqslant|Q|-d_Q^-(p)+|R|-d_R^+(s) \tag{1}$$

因为$|P|+|R|=m+2>|Q|+|R|$,所以由(1)得$|Q|+|R|=m$或$m+1$.令$|Q|=l$.下面分两种情况讨论.

1. $|Q|+|R|=m$

由 p 及 s 的任意性及(1)得$P\Rightarrow Q, R\Rightarrow S$,若存在$q\in Q, r\in R$使得$rq\in A$,则由定理条件得$d^+(q)+d^-(r)\geqslant m$,然而$d^+(q)+d^-(r)\leqslant|R|-1+|Q|-1=m-2$,矛盾,因此 $Q\Rightarrow R$,再考察 p 和 r,由定理条件有$d^+(p)+d^-(r)=2l\geqslant m$,考察 q 和$s\in S$,有$d^+(q)+d^-(s)=2(m-l)\geqslant m$.故$m=2l$.所以此种情况$T\cong T(l+2,l+2,l,l)$.

2. $|Q|+|R|=m+1$

显然$|Q|=l, |P|=l+1, |R|=m+1-l, |S|=m+2-l$.由(1)得$d_Q^-(p)+d_R^+(s)\leqslant 1$.于是若对某个$s$, $d_R^+(s)=1$,则对任意的 p 总有$d_Q^-(p)=0$,即$P\Rightarrow Q$,考虑到 P,Q 和 S,R 分别在 T 和 T 的反向图中的地位是对称的,故不失一般性可假定$d_R^+(s)\geqslant d_Q^-(p)=0$.即总假定:

$$P\Rightarrow Q,\quad 且对任意s\in S, d_R^+(s)\leqslant 1 \tag{2}$$

对任意$q\in Q$和$s\in S$,则有:

$$m\leqslant d^+(q)+d^-(s)=|R|-d_R^-(q)+|R|-d_R^+(s) \tag{3}$$

对于任意$r\in R$和$p\in P$,还有:

$$m\leqslant d^+(p)+d^-(r)=l+l-d_Q^+(r)+d_s^-(r) \tag{4}$$

令$R_1=\{r\in R|d_s^-(r)>0\}$, $R_2=R\setminus R_1$.于是下面分三种子情况讨论.

2.1 $R_1=\phi$,即$R\Rightarrow S$.由(3),(4)有$\frac{m}{2}\leqslant l\leqslant\frac{m}{2}+1$.若存在$q\in Q, r\in R$,使$rq\in A$则由定理条件有:

$$m\leqslant d^+(q)+d^-(r)\leqslant|R|-1+|Q|-1=m-1,\qquad 矛盾.$$

因此$T\cong T(m+2-l,l+1,l,m+1-l)\in\tilde{T}(m+2-l,l+1,l,m+1-l)$,其中$\frac{m}{2}\leqslant l\leqslant\frac{m}{2}+1$;

2.2 $R_1\neq\phi, R_2\neq\phi$,取$r_2\in R_2$,由(4)得$l\geqslant\frac{m}{2}$.又因$R_1\neq\phi$,由(2)知,存在$s\in S$, $d_R^+(s)=1$,于是由(3)得$l\leqslant\frac{m+1}{2}$及$d_R^-(q)\leqslant 1$.即 $T\in\tilde{T}(m+2-l,l+1,l,m+1-l)$,其中$\frac{m}{2}\leqslant l\leqslant\frac{m+1}{2}$;

令$T_1 = T - V(C_4)$,则$\delta^+(T_1) \geqslant k-2, \delta^-(T_1) \geqslant k-2$.故$T_1$满足推论 2 的条件,因此除非$T_1 \cong T(k,k,k-2,k-2)$或$T_1$属于$\tilde{T}(k-1,k,k-1,k-2)$或$\tilde{T}(k,k-1,k-2,k-1)$情况下需进一步讨论,其它情况推论已成立.设$B_1,B_2,B_3,B_4$是这三类图的依次对应的四个独立集,且不失一般性可假定$B_1,B_3 \subseteq X, B_2,B_4 \subseteq Y$.

1. $T_1 \cong T(k,k,k-2,k-2)$.此时对任一$y_2 \in B_2$,由于$B_1 \Rightarrow B_2$和 T 的 k-正则性,必有$y_2 x \in A$,于是有$d^-(x) \geqslant k+1$,矛盾;

2. $T_1 \in \tilde{T}(k-1,k,k-1,k-2)$,此时注意到$|B_2| = k$.由 T 的 k-正则性有,$B_3 \Rightarrow B_4 \cup \{v,y\}, B_4 \cup \{v,y\} \Rightarrow B_1$.若存在$y_2 \in B_2$满足$y_2 \neq \omega, y_2 u \in A$,则取$C'_4 = uvxy_2$,于是$T - V(C'_4) \cong T(k-1,k-1,k-1,k-1)$,显然它是 Hamiltonian,故推论已成立.另一方面由 T 的 k-正则性,$d^-_{B_2}(u) > 0$,所以仅需考虑如下情况:$\omega \in B_2, \omega u \in A, u \Rightarrow B_2 \setminus \{\omega\}$,因而也有$B_2 \setminus \{\omega\} \Rightarrow x, B_4 \cup \{y\} \Rightarrow u, x \Rightarrow B_4 \cup \{y\}$,因此$T \cong \hat{T}(k,k,k,k) \in T^*(k,k,k,k)$;

3. $T_1 \in \tilde{T}(k,k-1,k-2,k-1)$.此时注意到$|B_1| = k$,由 T 的 k 正则性,有$B_2 \Rightarrow \{u,x\} \Rightarrow B_4$,若存在$x_1 \in B_1$满足$x_1 \neq \omega, x_1 y \in A$.则再由 T 的 k 正则性,有$vx_1 \in A$.则取$C''_4 = uvx_1y$.令$T_2 = T - V(C''_4)$.注意到$k \geqslant 4$且有对任意$b_1 \in B_1 \setminus \{x_1\}, b_3 \in B_3$有$d^-_{B_4}(b_3) \leqslant 1, d^+_{B_4}(b_1) \leqslant 1$,故 T_2 是强连通的,再由 Hall 定理知 T_2 中含有 2-因子,所以 T_2 是 Hamiltonian.另一方面,由 T 的 k 正则性,$d^-_{B_1}(y) > 0$,所以仅需考虑$\omega \in B_1, \omega y \in A, y \Rightarrow B_1 \setminus \{\omega\}$.从而 $B_3 \cup \{x\} \Rightarrow y, B_4 \cup \{v\} \Rightarrow \omega$. 令 $B_{11} = \{x \in B_1 | xv \in A\}, B_{12} = B_1 \setminus B_{11}$; $B_{31} = \{x \in B_3 | vx \in A\}, B_{32} = B_3 \setminus B_{31}$.由 v 点的 k-正则性有$|B_{32}| = |B_{12}|$.又由 x 点的 k-正则性,对任意 $x \in B_{12}, d^+_{B_4}(x) = 1$,对任意 $x \in B_{32}, d^-_{B_4}(x) = 1$,因 $\{u,x\} \Rightarrow B_4, B_{31} \Rightarrow B_4 \Rightarrow B_{11}, N^+_{B_4}(B_{12}) = N^-_{B_4}(B_{32})$.故$T \cong T^*(k,k,k,k)$.推论成立.□

参考文献

1 J. A. Bondy and U. S. R. Murty, Graph theory with applications, Macmillan, (1976)

2 B. Jackson, Long paths and cycles in oriented graphs. JGT 5(1981) 145–157

3 宋增民,有向图中最长路或圈,南京工学院学报 17(4) (1987), 133–137.

4 王建中,何曙光,正则二部竞赛图的弧泛回路性质,科学通报1 (1987), 76.

5 R. Häggkivst and Y. Manoussakis, Cylces and paths in bipartite tournaments with spanning configurations, Combinatorica 9(1) (1989), 51–56

6 张克民,二部竞赛图的点泛偶回路性,南京大学学报,数学半年刊1(1), (1984), 85–88.

7 张克民,宋增民,二部竞赛图中含指定点对的互补回路,高等学校应用数学学报3(3) (1988) 401–407.

8 Zhang Ke Min ,Y. Manoussakis and Song Zeng Min, Complementary cycles cortaining a fixed arc in bipartite tournaments, Dis. Math., in press.

9 Zhang Ke Min and Wang Jian Zhong, Complementary cycles containing a fixed arc and a fixed vertex in bipartite tournaments, Ars Combinatioca, in press (1991).