南京大学学报（自然科学版）
一九八一年　第三期

一类具有完备强路连通性的竞赛图的存在性

张克民　吴正声*　邹　园*

摘　要

本文证明了“对于 $p\geq7$ 时，恒存在 p 个顶点的完备强路连通竞赛图”。

一个有向图 $T=(V,A)$，若它是反对称的完全图，则称为竞赛图。

设 $D=(V,A)$ 是一个有向图，若对个任意 $(v_0,v_1)\in A$，在 D 中存在从 v_1 到 v_0 的长度为 $k(k=2,3,\cdots,p-1)$ 的路，记为 $P_k(v_0,v_1)$，简记为 P_k，其中 $p=|V|$，则称有向图 D 具有弧泛回路性。

设 $D=(V,A)$ 是一个有向图，若对于任意 $(v_0,v_1)\in A$，在 D 中存在从 v_0 到 v_1 的长度为 $k(k=2,3,\cdots,p-1)$ 的路，记为 $P'_k(v_0,v_1)$，简记为 P'_k，其中 $p=|V|$，则称有向图 D 具有弧泛反回路性。

设 $D=(V,A)$ 是一个有向图，若对于任意 $v_0,v_1\in V$，在 D 中恒存在从 v_0 到 v_1 的长度为 $k(k=d,d+1,\cdots,p-1)$ 的路，这里 $d=d_D(v_0,v_1)$ 为 v_0 到 v_1 的距离，$p=|V|$，则称有向图D具有强路连通性。

显然，强路连通性的有向图，必具有弧泛反回路性。

设 $T=(V,A)$ 是一个竞赛图，若 T 具有弧泛回路性和弧泛反回路性，则称竞赛图具有完备强路连通性。

R. J. Faudree, R. H. Schelp 在[1]中提出了无向图的强路连通性概念。这概念在有向图上自然的推广，就是上面叙述的强路连通性概念。对任意有向图，甚至对任意的竞赛图，一般地讨论强路连通性是相当困难的。朱永津、田丰在[2]中，在某种意义下（即不考虑 P'_2 的存在性），讨论了一类竞赛图的强路连通性，并给出了它的一个充分条件。本文用构造性的方法给出完备强路连通性竞赛图的存在性，并在[3]中进一步给出竞赛图具有完备强路连通性的一个充要条件。

定理：当 $p\geq7$ 时，恒存在 p 个顶点的完备强路连通性的竞赛图 $T=(V,A)$；当 $p\leq6$ 时，恒不存在 p 个顶点的完备强路连通性的竞赛图 $T=(V,A)$。

在给出证明之前，先证明几条引理。

为了叙述方便，对于有向图 $D=(V,A)$ 中的任意 $v\in V$，记：

* 南京师范学院。

$$I_D(v)=\{u \mid u\in V,(u,v)\in A\};$$

$$O_D(v)=\{u \mid u\in V,(v,u)\in A\}。$$

在不引起误解的情况下，简记为 $I(v)$、$O(v)$。若对于任意 $v\in V$，均满足 $|O(v)|-|I(v)|=0$，则称有向图 D 为正则的。若对于任意 $v\in V$，均满足 $\|O(v)|-|I(v)\|\leq 1$，则称有向图 D 为几乎正则的。

引理1：设 $D=(V,A)$ 是反对称的有向图，若对于 A 中任意弧，恒存在 P_2' 路，则对于任意 $v_0\in V$，有：

(1) $O(v_0)$ 在 D 中的生成子图 $D[O(v_0)]$ 中恒含回路，从而 $|O(v_0)|\geq 3$。

(2) $I(v_0)$ 在 D 中的生成子图 $D[I(v_0)]$ 中恒含回路，从而 $|I(v_0)|\geq 3$。

证：(1) 用反证法，如 $D[O(v_0)]$ 中不含回路，对 $(v_0,v_1)\in A$ 由假定存在 $v_0v_2v_1$ 路，又对 $(v_0,v_2)\in A$ 由假定存在 $v_0v_3v_2$ 路。由于 D 是反对称的，所以 $v_3\neq v_1$。如此下去，可遂次求得 D 的路：$v_0v_2v_1$，$v_0v_3v_2,\cdots,v_0\ v_kv_{k-1}$。若 v_1、v_2、$\cdots$、v_k 中有相同点，则 $D[O(v_0)]$ 中已包含了回路，不然这过程可以无限制地进行。但由于 $|O(v_0)|\leq p$ 是有限的，从而这过程不可能无限制地进行而矛盾，故 $D[O(v_0)]$ 中恒含回路。由此 $|O(v_0)|\geq 3$。

(2) 对于 $I(v_0)$ 情况，考虑反向图，由(1)即可得结论。

引理2：设 $D=(V,A)$ 是有向图，且 $v_0\in V$。

(1) 若 $D[O(v_0)]$ 中含回路 C，则弧 (v_0,v') $(v'\in C)$，在 D 中恒存在 $P_2'(v_0,v')$ 路。

(2) 若 $D[I(v_0)]$ 中含回路 C，则弧 (v',v_0) $(v'\in C)$，在 D 中恒存在 $P_2'(v',v_0)$ 路。

证：(1) 设 $D[O(v_0)]$ 中含回路为 $v_1v_2\cdots v_n$，则对于 (v_0,v_1)，存在 $v_0v_nv_1$ 路；对于 (v_0,v_i) $(i=2,3,\cdots,n,)$，存在 $v_0v_{i-1}v_i$。于是结论成立。

(2) 对 $D[I(v_0)]$ 情况，考虑反向图即可得结论。

引理3：设 $D=(V,A)$ 是反对称的有向图，若对于 D 中的任意弧，恒存在对应的 P_2' 路，则对 D 中任意弧恒存在对应的 $P_k'(k=2,3,\cdots,6)$ 路。

证：设任意的 $(v_0,v_1)\in A$，由假定存在 v_2，使 $v_0v_2v_1$ 构成 $P_2'(v_0,v_1)$ 路。对于 (v_0,v_2)，$(v_2,v_1)\in A$ 由假定分别存在 v_3、v_4 使 $v_0v_3v_2=P_2'(v_0,v_2)$、$v_2v_4v_1=P_2'(v_2,v_1)$。同理对于 (v_3,v_2)，$(v_2,v_4)\in A$，由假定分别存在 v_5、v_6 使 $v_3v_5v_2=P_2'(v_3,v_2)$、$v_2v_6v_4=P_2'(v_2,v_4)$。由于 D 是反对称的，故 $v_i(i=0,1,2,\cdots,6)$ 均相异。从而 $v_0v_2v_1$、$v_0v_3v_2v_1$、$v_0v_3v_2v_4v_1$、$v_0v_3v_5v_2v_4v_1$、$v_0v_3v_5v_2v_6v_4v_1$ 分别是弧 (v_0,v_1) 的 P_2'、P_3'、P_4'、P_5'、P_6' 路。证毕。

推论：若 $T=(V,A)$ 是弧泛反回路性的竞赛图，则 $|V|\geq 7$。

引理4：当 $7\leq p\leq 12$ 时，恒存在 p 个顶点的正则或几乎正则的完备强路连通竞赛图 $T=(V,A)$。

证：用构造性方法给出证明。

图 1 中 $\{v_1,v_2,\cdots,v_7\}$ 所生成的竞赛图记为 T_7，图 1 所示的竞赛图记为 T_8，图 2 中 $\{v_1,v_2,\cdots,v_k\}$ $(k=9,10,11,12)$ 所生成的竞赛图，记为 T_k。显然 T_7、T_9、T_{11} 是正则的，而 T_8、T_{10}、T_{12} 是几乎正则的。由[4]知 T_7、T_9、T_{11} 具有弧泛回路性。由[2]中定理 1 知，要证明 T_8、T_{10}、T_{12} 具有弧泛回路性，只需证明这些图中任一弧恒存在对应的 P_2 路即可，关于这一点，由直接验证知其存在。从而 T_8、T_{10}、T_{12} 亦具有弧泛回路性。

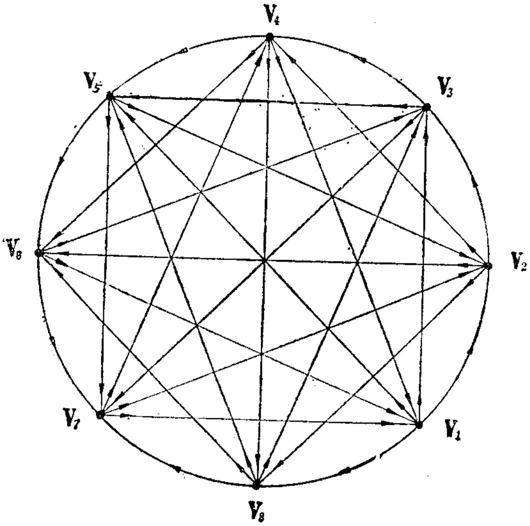

图 1

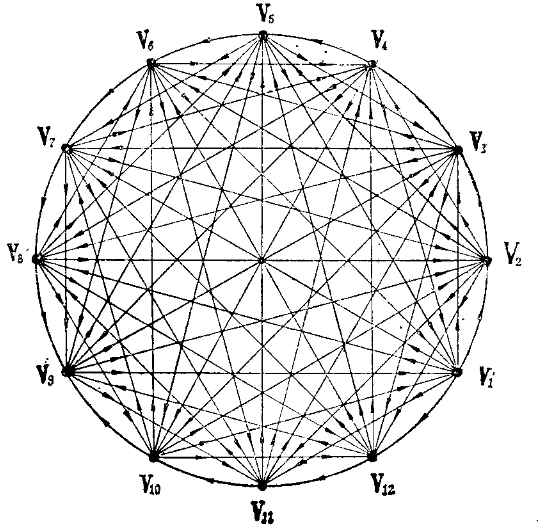

图 2

于是，要证明 $T_k(k=7,8,\cdots,12)$ 是完备强路连通的，剩下的只需验证它们具有弧泛反回路性。现在来证明这一点。对于这些图中任一弧，用引理 2，易直接验证，恒存在对应的 P_2' 路。再由引理 3 知，对于这些图中任一弧，恒存在对应的 P_3'、P_4'、P_5'、P_6' 路。于是由定义知 T_7 是完备强路连通的竞赛图。且可以证明，在同构意义下，T_7 是唯一确定的。容易直接验证 T_8 中的任一弧对应的 P_7' 路总是存在。同样可以直接验证 T_9 中的任一弧对应的 P_7'、P_8' 路总是存在，由此，由定义 T_8、T_9 是完备强路连通的竞赛图。对于 T_{10}、T_{11}、T_{12} 中任一弧对应的 $P_k'(k=7,8,\cdots,|V|-1)$ 路，由[2]中定理 2 知，这总是存在的。从而 T_{10}、T_{11}、T_{12} 都是完备强路连通的竞赛图，证毕。

设 $T_0=(V_0,A_0)$，$T_1=(V_1,A_1)$ 是任意两个竞赛图，$V_0\cap V_1=\varphi$，$v_0\in V_0$。令 $V=(V_0\setminus\{v_0\})\cup V_1$，$A=\{(v',v'')\mid v',v''\in V;\ (v',v'')\in A_0\cup A_1$，或 $v''\in O_{T_0}(v_0)$、$v'\in V_1$，或 $v'\in I_{T_0}(v_0)$、$v''\in V_1\}$，所得的竞赛图 $T=(V,A)$ 称为 T_0 在 v_0 点的 T_1 扩张。记为 $T=T_0[v_0;\ T_1]$。

引理 5：设 $T_0=(V_0,A_0)$，$T_1=(V_1,A_1)$ 是任给的两个完备强路连通的赛竞图，令 $|V_0|=p_0$，$|V_1|=p_1$ 和 $v_0\in V_0$，则 T_0 在 v_0 点的 T_1 扩张所构成的赛竞图 $T=T_0[v_0;\ T_1]=(V,A)$ 是 p_0+p_1-1 个顶点的完备强路连通的竞赛图。

证：为了叙述方便，记 V_0 中的点为 $\{v\}$，V_1 中之点为 $\{u\}$。

① 设 (u_1,u_2) 是 T 中含于 A_1 中的任意弧，由 T_1 具有完备强路连通性知，在 T_1 中存在 $P_s'(u_1,u_2)$ $(s=2,3,\cdots,p_1-1)$ 路。它们也是 T 中的路。设 $P_{p_1-1}'(u_1,u_2)$ 路为 $u_1\cdots u_3u_4u_2$，由 T_0 具有完备强路连通性知，在 T_0 中存在过 v_0 的长度为 $r+1$ 的回路，设为 $v_0v_1\cdots v_r(r=2,3,\cdots,p_0-1)$，故由 T 的定义知 (u_3,v_1)，(v_r,u_4)，$(v_r,u_2)\in A$。于是 $u_1\cdots u_3v_1v_2u_2$、$u_1\cdots u_3v_1\cdots v_ru_4u_2(r=2,3,\cdots,p_0-1)$ 分别是 T 中的 $P_{p_1}'(u_1,u_2)$、$P_{p_1+r-1}'(u_1,u_2)$ $(r=2,3,\cdots,p_0-1)$ 路。综合上述，证明了在 T 中存在 $P_k'(u_1,u_2)$ $(k=2,3,\cdots,p_0+p_1-2)$ 路。类似地可以证明在 T 中存在 $P_k(u_1,u_2)(k=2,3,\cdots,p_0+p_1-2)$ 路。

② 设 (v_1,v_2) 是 T 中含于 A_0 中的任意弧，显然 v_1、$v_2\neq v_0$。由 T_0 具有完备强路连

通性知，在 T_0 中存在 $P_s(v_1,v_2)$ $(s=2,3,\cdots,p_0-1)$ 路。路中若有 T_0 中的点 v_0，可用 V 中的点 u_1 代替，这样就得到 T 中的 $P_s(v_1,v_2)$ $(v=2,3,\cdots,p_0-1)$ 路。又设 $P_{p_0-1}(v_1,v_2)$ 路为 $v_2\cdots v_3v_0v_4\cdots v_1$。由 T_1 具有完备强路连通性知，在 T_1 中存在 r 路，记为 $u_1\cdots u_{r+1}$ $(r=1,2,\cdots,p_1-1)$。由 T 的定义知，(v_3,u_1)，$(u_{r+1},v_4)\in A$。于是 $v_2\cdots v_3u_1\cdots u_{r+1}v_4\cdots v_1$ 是 T 中的 $P_{p_0+r-1}(v_1,v_2)$ $(r=1,2,\cdots,p_1-1)$路。综合上述，证明了在 T 中存在 $P_k(v_1,v_2)$ $(k=2,3,\cdots,p_0+p_1-2)$ 路。类似地可以证明，在 T 中存在 $P'_k(v_1,v_2)$ $(k=2,3,\cdots,p_0+p_1-2)$路。

③ 剩下来仅需对形如 (u,v) 或 (v,u) 的弧来讨论，这里 $v\in V_0\setminus\{v_0\}$，$u\in V_1$。它们对应的 $P_k(u,v)$，$P'_k(u,v)$，$P_k(v,u)$，$P'_k(v,u)$ $(k=2,3,\cdots,p_0+p_1-2)$路，完全类似于②的证明，知道它们在 T 中存在。在此不多述了。故引理 5 成立。

现在来证明定理：

首先由引理 3 推论知，当 $p\le6$，恒不存在完备强路连通竞赛图。当 $7\le p\le12$，由引理 4 知存在完备强路连通竞赛图。对于 $p\ge13$，用数学归纳法。设对于 $7\le t\le p$ $(p\ge12)$ 的一切 t，均存在 t 个顶点的完备强路连通竞赛图。由归纳法假设，存在 $p-5\ge7$ 个顶点的完备强路连通竞赛图 T_1。取引理 4 中 T_7 作为引理 5 中的 $T_0=(V_0,A_0)$，作 T_7 在 v_1 点的 T_1 扩张所得的竞赛图 $T=T_7[v_1;T_1]$。由引理 5 知，T 是完备强路连通竞赛图，其顶点数为 $7+(p-5)-1=p+1$。于是由数学归纳法结论成立。

注记：

完备强路连通竞赛图的存在性，提供了研究弧泛反回路性的方便。它与竞赛图的弧泛回路性相比较，由[7]知，"若 p 个顶点的竞赛图的每一弧，恒存在对应的 P_2 路，则存在对应 P_k 路$(k=2,3,\cdots,[\frac{p+1}{2}]+1)$" 。可是：

(1) 在本文中，引理 3 的结果，不能改进。

例 1：设 $T_0=(V_0,A_0)$ 是引理 4 中的 T_7，$T_1=(V_1,A_1)$ 是 p 个顶点的完备强路连通竞赛图，且 $V_0\cap V_1=\phi$。在 T_0，T_1 之间添加以新弧 $\{(v_1,v_0)|v_1\in V_1,\ v_0\in V_0\}$ 所得的竞赛图记为 T，由引理 2 知，T 的任一弧恒存在对应的 P'_2 路。但 T 中含于 A_0 中之弧，在 T 中不存在对应的 P'_k $(k\ge8)$ 路。

从例 1 可见，对弧泛反回路性，没有类似于[7]中的结论。

在[6]中举出了一类 p 个顶点的竞赛图的反例。"它的每一弧恒存在对应的 P_k $(k=2,3,\cdots,p-2)$ 路。但对某些弧不存在对应的 P_{p-1} 路"。而对弧泛反回路性，也有类似的反例。

(2) 存在一类 p 个顶点的竞赛图，它的任一弧恒存在对应的 $P'_k(k=2,3,\cdots,p-2)$路，但对某些弧不存在对应的P'_{p-1} 路。

例 2：设 T_0 是 $p-1$个顶点的完备强路连通竞赛图，在 T_0 外添加一点 v_p，v_p 与 T_0 中的点间的弧都指向点 v_p，所构成的竞赛图记为 T，则 T 中任一弧存在对应的 $P'_k(k=2,3,\cdots,p-2)$ 路。但对于 T 中含于 T_0 的弧不存在对应的 P'_{p-1} 路。

最后指出，在[5]中证明了"p 个顶点的竞赛图 T，具有弧泛回路性的充要条件是 T 中任一弧恒存在对应的 P_2 和 P_{p-1} 路"。对于竞赛图的弧泛反回路性有否类似结果？即"p 个顶点的竞赛图 T，具有弧泛反回路性的弧充要条件是 T 中任一弧恒存在对应的 P'_2 和 P'_{p-1} 路"？这一问题，尚未解决。

参 考 文 献

[1] R. J. Faudree, R. H. Schelp, The Square of a block is strongly path connected., J. Comb. Theory (B) 20, 47—61 (1976).

[2] 朱永津、田丰, On the strong path connectivity of a tournament., Scientia Sinica. Special Issue (Ⅱ), 18—28 (1979).

[3] 张克民、吴正声，关于竞赛图的完备强路连通性的一个充要条件，（待发表）。

[4] B. Alspach, Cycles of each length in regular tournaments., Canad. Math. Bull. 10, 283—286 (1967).

[5] 吴正声、张克民、邹园，竞赛图具有弧泛回路性的一个充要条件，中国科学，8，915—919 (1981)。

[6] 吴正声、张克民、邹园，关于竞赛图弧泛回路性的一类反例，应用数学学报，（即将发表）

[7] 吴正声、张克民、邹园，T_{5}图的弧 k-回路性（待发表）。

ON THE EXISTENCE OF A CLASS OF TOURNAMENTS WITH COMPLETELY STRONG PATH CONNECTIVITY

Zhang Kemin Wu Zhengsheng Zou Yuan

Abstract

This paper proved the following result: "when $p\geq7$, there is a class of tournaments with p vertices of completely strong path connectivity."