Tss图的弧k-回路性

吴正声　张克民*　邹　园

若T是p个顶点的竞赛图，且它的平方图T^2是完全对称的，则称T为Tss（p）图，或简称为Tss图。

设$T=(V,A)$是p个顶点的竞赛图。若k（$3\leqslant k\leqslant p$）是给定的整数，对于任意$(v_0,v_1)\in A$，在T中总存在从v_1到v_0的$(k-1)$-路$\mu_{k-1}(v_1,v_0)$，则称竞赛图T具有弧k—回路性；若对于任意满足$3\leqslant k\leqslant p$的整数k，T具有弧k—回路性，则称竞赛图T具有弧泛回路性。

1967年B．Alspach开始研究竞赛图的弧泛回路性，在〔1〕中证明了：正则竞赛图必具有弧泛回路性。1979年，朱永津在〔2〕中提出了，Tss图是否具有弧泛回路性。从〔3〕中的引理2，可见：竞赛图T具有弧3-回路性的充分必要条件是T为Tss图。在〔4〕中又证明了：对于适当大的整数p，总存在p个顶点的竞赛图T，它具有弧k-回路性（$k=3、4、\cdots、p-1$），但不具有弧泛回路性。由此可见，Tss图未必具有弧泛回路性，否定地回答了〔2〕中提出的问题。然而，下列定理成立：

定理1　若$T=(V,A)$是Tss(p)图，则T具有弧h-回路性，这里

$$h=3、4、\cdots、\left[\frac{p+1}{2}\right]+2。$$

证　从〔3〕中的引理2，可见Tss图T具有弧3-回路性。

对于任意给定的整数$k\left(3\leqslant k\leqslant\left[\frac{p+1}{2}\right]+1\right)$，假设图T具有弧k-回路性，下面来证明图T具有弧$(k+1)$-回路性。如果能证明这一点，定理便成立。

设(v_0,v_1)是T中任意给定的弧，由假设存在从v_1到v_0的$(k-1)$-路

$$\mu_{k-1}(v_1,v_0)=\{v_1,v_2,\cdots,v_k=v_0\}$$

为了方便起见，把v_i（$i=0、1、2、\cdots、k$）简记为i，且令

$$W=V-\mu_{k-1}(1,0)=V-\{1,2,\cdots,k=0\}$$

从而，有
$$|W|\geqslant p-\left(\left[\frac{p+1}{2}\right]+1\right)$$

下面分两种情况来证明总存在从1到0的k-路$\mu_k(1,k)$。

情况一　存在$w_0\in W$，有l、m（$1\leqslant l<m\leqslant k$），使得$(l,w_0)$、$(w_0,m)\in A$。此时，

---

* 南京大学数学系。

必有 $t\,(l \leqslant t < m)$，构成路

$$\mu_k(1,k)=\{1,\cdots,t,w_0,t+1,\cdots,k\}$$

情况二　否则，对于任意 $w\in W$，有整数 $s(w)\,(1\leqslant s(w)\leqslant k+1)$，使得

$$(w,1)、(w,2)、\cdots、(w,s(w)-1)、$$
$$(s(w),w)、(s(w)+1,w)、\cdots、(k,w)\in A$$〔注〕

令

$$s_1=\min_{w\in W}\{s(w)\}\quad,\qquad s_2=\max_{w\in W}\{s(w)\}$$

便有 $1\leqslant s_1\leqslant s_2\leqslant k+1$。

从T具有弧3-回路性，不难证明：当 $s_1=1$ 或 $s_2=k+1$ 时，总存在路 $\mu_k(1,k)$。并且，可以推得 $s_1\neq 2$，$s_2\neq k$。由此，只要考虑 $3\leqslant s_1\leqslant s_2\leqslant k-1$。下面将分两种情况来证明总存在路 $\mu_k(1,k)$。

情况1　$s_1\neq s_2$。此时 $3\leqslant s_1<s_2\leqslant k-1$。由此 $k\geqslant 5$。从T具有弧3-回路性，可以推得：存在 l、$m\,(2\leqslant l\leqslant s_1-1<s_1\leqslant m\leqslant k-1)$，使得 (l,k)、$(1,m)\in A$。下面再分两种情况讨论：

情况a　$k>5$。此时在不等式

$$2\leqslant l、l+1\leqslant m-1、m\leqslant k-1。$$

中必有一个不等式取严格不等号。当 $2<l$ 时，可得路

$$\mu_k(1,k)=\{1,m,\cdots,k-1,w_2,l+1,\cdots,m-1,w_1,3,\cdots,l,k\}$$

这里 $w_1,w_2\in W$，且 $s(w_1)=s_1$、$s(w_2)=s_2$。当 $l+1<m-1$ 或 $m<k-1$ 时，类似地可得路 $\mu_k(1,k)$

情况b　否则，$k=5$。此时 $s_1=3$，$s_2=4$。而 $l=2$，$m=4$。从而，可得路

$$\mu_k(1,k)=\{1,m=4,\ w',\ w'',\ 2=l,\ k\}$$

这里 w'、$w''\in W$，且 $(w',w'')\in A$。

情况2　否则，$s_1=s_2=s$。此时 $3\leqslant s\leqslant k-1$。并且，对于任意 $w\in W$，有

$$(w,1)、(w,2)、\cdots、(w,s-1)、$$
$$(s,w)、(s+1,w)、\cdots、(k,w)\in A。$$

在这情况下，从T具有弧3-回路性，不难推得下列引理。

引理1　W的生成子图T〔W〕是具有弧3-回路的竞赛图。从而，T〔W〕是强连通的。

引理2　存在整数 l、$r\,(1<l<s\leqslant r<k)$，使得 $(1,r)$、$(l,k)\in A$。

现在来证明，在这情况下总存在路 $\mu_k(1,k)$。

注意到，对于引理2中的整数 l、r，有

$$r-l\leqslant k-3\leqslant\left[\frac{p+1}{2}\right]-2\leqslant p-\left(\left[\frac{p+1}{2}\right]+1\right)\leqslant|W|。$$

〔注〕　当 $s(w)=1$ 时，此处理解为

$$(1,w)、(2,w)、\cdots、(k,w)\in A;$$

当 $s(w)=k+1$ 时，理解为

$$(w,1)、(w,2)、\cdots、(w,k)\in A$$

于是，由引理1，在$T[W]$中存在$[(r-l)-1]$－路$\eta_{(r-l)-1}$（0－路看作一个点）。从而，便得路

$$\mu_k(1,k)=\{1,r,\cdots,k-1,\ \eta_{(r-l)-1},\ 2,\cdots,l,k\}。$$

综上所述，总存在路$\mu_k(1,k)$。于是，定理的结论成立。

下列的定理2说明了定理1的结论已不能再改进。同时，再次否定地回答了〔2〕中提出的问题：Tss图未必具有弧泛回路性。

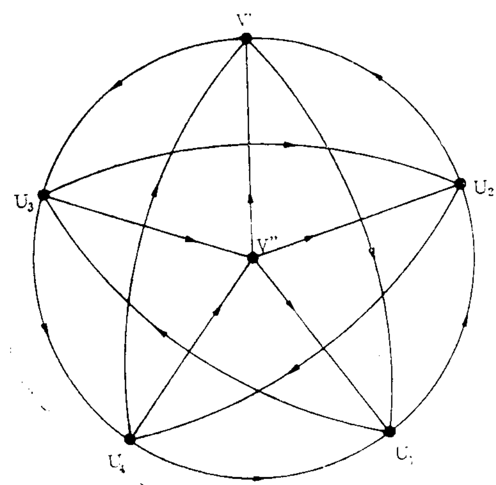
定理2 对于$p=6$、10，$p\geqslant 14$，总存在这样的$Tss(p)$图$T=(V,A)$，它至少有一条弧不含于任意一条$\left(\left[\frac{p+1}{2}\right]+3\right)$－回路中。

证 设$T'=(V',A')$与$T''=(V'',A'')$分别是$Tss(p')$图与$Tss(p'')$图，或者都是1个顶点所组成的图。且设$V'\cap V''=\phi$。在图T'与图T''的并$T'\cup T''$中添加四个顶点u_1、u_2、u_3与u_4。并且，对于任意$v'\in V'$与任意$v''\in V''$，添加弧如图。设由此所得的图为T。容易看出，T是$Tss(p'+p''+4)$图。不难证明，在图T中任意含有(u_4,u_1)的回路都不能同时含有T'与T''的顶点。由此，当$p'\geqslant p''$时，(u_4,u_1)不能含于T的$(p'+5)$－回路中。

对于给定的p，令

$$p'=\left[\frac{p+1}{2}\right]-2,$$

$$p''=p-\left[\frac{p+1}{2}\right]-2$$



当$p=6$、10，$p\geqslant 14$时，p'与p''都是不等于2、4的正整数。由〔3〕中的定理2，对于如此的p'与p''，分别存在$Tss(p')$图T'与$Tss(p'')$图T''。注意到，$p'\geqslant p''$。由此易见，用上述方法作出的$Tss(p)$图T是符合定理所述条件的图。

顺便指出，当$p\leqslant 5$，$p=7$、8、9、12、13时，定理2的结论不成立。

参 考 文 献

〔1〕 B. Alspach, Cycles of each length in regular tournaments, Canad. Math. Bull. Vol. 10(1967), 283—286.

〔2〕 朱永津，竞赛图方面研究工作的现状及展望，曲阜师院学报（运筹学专刊），1980，60—64。

〔3〕 吴正声、张克民、邹园，一类竞赛图的非正则性，南京师院学报(自然科学版)，1980年第一期。

〔4〕 吴正声、张克民、邹园，关于竞赛图弧泛回路性的一类反例，已投应用数学学报。