竞赛k-部图为强连通的一个充要条件

吴正声　　张克民*

设$K_{l_1,l_2,\cdots,l_k}$是完全k-部图，这里l_i（i＝1，2，…，k）是顶点集V的k-部划分（V_1，V_2，…，V_k）中V_i的顶点数$|V_i|$。若给$K_{l_1,l_2,\cdots,l_k}$的每边以一个定向，则称所得的有向图$T_{l_1,l_2,\cdots,l_k}$为竞赛k-部图。

显然，当$l_1=l_2=\cdots=l_k=1$时，竞赛k-部图$T_{1,1,\cdots,1}$是k个顶点的竞赛图。

设D＝（V，A）是有向图，且v∈V，记

$$O(v)=\{u|\ (v,u)\in A\},$$

则称$|O(v)|$为顶点v的得分。

本文将先给出非负整数序列是竞赛k—部图的得分序列的充分必要条件；再给出以得分序列表示的竞赛k-部图是强连通的充分必要条件。这两个结论分别是[1]中的定理1（即[2]中的定理1）与[2]中定理9的推广。

下面先引进一些记号。设竞赛k-部图$T_{l_1,l_2,\cdots,l_k}$的顶点集V的k-部划分为（V_1，V_2，…，V_k），令其中

$$V_i=\{v_{i1},\ v_{i2},\cdots,v_{il_i}\}\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ k);$$

令下标集

$$X_i=\{\ (i,\ j)\ |j=1,\ 2,\ \cdots l_i\}\ (i=1,2,\ \cdots,k),$$

$$X=X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_k.$$

而对于任意$Y\subseteq X$，有

$$Y=Y_1\cup Y_2\cup\cdots\cup Y_k,$$

这里$Y_i\subseteq X_i$。令$|Y_i|=l_i'$，便有$l_i'\leqslant l_i$。

定理1　非负整数序列

$$\begin{array}{l} s_{11},\ s_{12},\ \cdots,\ s_{1l_1},\\ s_{21},\ s_{22},\ \cdots,\ s_{2l_2},\\ \cdots\cdots\\ s_{k1},\ s_{k2},\ \cdots,\ s_{kl_k} \end{array} \tag{1}$$

为竞赛k-部图$T_{l_1,l_2,\cdots,l_k}$＝（V，A）中顶点序列

$$v_{11},\ v_{12},\ \cdots,v_{1l_1},$$

(*)南京大学数学系。

$$v_{21}, v_{22}, \cdots, v_{2l_2},$$

$$\cdots\cdots$$

$$v_{k1}, v_{k2}, \cdots, v_{kl_k}$$

所对应的得分序列的充分必要条件是

（Ⅰ） $$\sum_{x\in X} s_x = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant k} l_i l_j$$

（Ⅱ） 对于X的任意非空真子集Y，有

$$\sum_{y\in Y} s_y \geqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant k} l_i' l_j'$$

<u>证</u> 必要性：显然，有

$$\sum_{x\in X} s_x = |A| = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant k} l_i l_j$$

由此，（Ⅰ）成立。

设$V_y=\{v_y \mid y\in Y\}$。考虑V_y在$T_{l_1, l_2, \cdots, l_k}$中的生成子图$T_y$，对于任意$y\in Y$，设$s_y'$为$v_y$在生成子图$T_y$中的得分，则有

$$\sum_{y\in Y} s_y \geqslant \sum_{y\in Y} s_y' = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant k} l_i' l_j'。$$

由此，（Ⅱ）成立。

充分性：对于每个$x\in X$，取含有s_x个元素的集G_x与它对应。并且，假设这$l\ (=\sum_{i=1}^{k} l_i)$个集两两不相交（即对于任意x、$y\in X$，$x\neq y$，有$G_x\cap G_y=\phi$）。令

$$G=\bigcup_{x\in X} G_x，便有$$

$$|G| = \sum_{x\in X} |G_x| = \sum_{x\in X} s_x \tag{3}$$

令

$$B=\bigcup_{1\leqslant i<j\leqslant k} B_{ij},$$

这里

$$B_{ij}=\{(x, y) \mid x\in X_i, y\in X_j\}\ (i<j)。$$

显然，有 $$|B| = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant k} l_i l_j \tag{4}$$

对于$(x, y)\in B$，令

$$G_{xy}=G_x\cup G_y$$

考虑

$$H=\{G_{xy} \mid (x, y)\in B\}$$

注意到，H是G的子集所组成的类，且其子集的下标集是B。对于H的任意非空子类

$$H'=\{G_{xy} \mid (x, y)\in B'\}$$

这里$B'\subseteq B$，且$B'\neq\phi$。令

$$Y=\bigcup_{(x,y)\in B'}\{x,\ y\}。$$

显然，$Y\subseteq X$。注意到，（Ⅱ）成立。便有

$$|H'|=|B'|\leqslant\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k} l_i'l_j'\leqslant\sum_{y\in Y} s_y$$

$$=|\bigcup_{y\in Y}G_y|=|\bigcup_{(x,y)\in B'}G_x\cup G_y|=|\bigcup_{H'}G_{xy}|。$$

由此，从Hall定理（可见[3]），H有不同代表系

$$\{g_{x_ix_j}|\ (x_i,\ x_j)\in B\}\ (\subseteq G) \tag{5}$$

即对于任意$(x_i,\ x_j)\in B$，对应地有

$$g_{x_ix_j}\in G_{x_ix_j}=G_{x_i}\cup G_{x_j},$$

且（5）中的$g_{x_ix_j}$互不相同。由(3)、(4)及（Ⅰ），有$|B|=|G|$。由此，便有

$$\{g_{x_ix_j}|\ (x_i,x_j)\in B\}=G=\bigcup_{x\in X}G_x \tag{6}$$

用如下的方法构造一个竞赛k—部图$T_{l_1,l_2,\cdots,l_k}=(V,\ A)$，对于任意$(x_i,\ x_j)\in B$，当$g_{x_ix_j}\in G_{x_i}$时，$(v_{x_i},\ v_{x_j})\in A$；当$g_{x_ix_j}\in G_{x_j}$时，$(v_{x_j},\ v_{x_i})\in A$；从（6）及上述的构造方法，容易看出，对于任意$x\in X$，$v_x$的得分为$|G_x|=S_x$。

这就证明了整数序列（1）是竞赛k—部图$T_{l_1,l_2\cdots,l_k}$的顶点序列（2）所对应的得分序列，定理证毕。

当$l_1=l_2=\cdots=l_k=1$时，上述的定理1就是[1]中的定理1，在[1]、[4]中分别以不同的方法给出了这个定理的两种证明，

定理2　设$T_{l_1,l_2,\cdots,l_k}=(V,\ A)$是竞赛$k$—部图，且它的顶点序列（2）所对应的得分序列为（1），则$T_{l_1,l_2,\cdots,l_k}$是强连通的充分必要条件是

（Ⅱ′）对于X的任意非空真子集Y，有

$$\sum_{y\in Y}s_y>\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k}l_i'l_j'$$

证　必要性：由定理1，条件（Ⅱ）成立。现在用反证法来证明：（Ⅱ）中不等式总是严格不等式。如若不然，则存在X的某个非空真子集Y，使

$$\sum_{y\in Y}s_y=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k}l_i'l_j' \tag{7}$$

考虑由$V_y=\{v_y|y\in Y\}$所生成的子图T_y。对于每个$v_y\in V_y$，在T_y中的得分设为s_y'。由定理1的必要性及（7），有

$$\sum_{y\in Y}s_y'=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k}l_i'l_j'=\sum_{y\in Y}s_y。$$

由此，再从$s_y'\leqslant s_y$，可得

$$s_y'=s_y\qquad(y\in Y)。$$

于是，在$T_{l_1,l_2,\cdots,l_k}$中，

$$(V_y,\ V-V_y)=\{(u,\ v)\ |\ (u,\ v)\in A,u\in V_y,v\in V-V_y\}=\phi$$

又注意到$V_y \neq \phi$，$V-V_y \neq \phi$，这与$T_{l_1,l_2,\cdots,l_k}$是强连通的有向图矛盾，就证明了（Ⅱ′）成立。

充分性：设竞赛k—部图$T_{l_1,l_2,\cdots,l_k}$的顶点序列（2）所对应的得分序列为（1），且满足（Ⅱ′）。下面用反证法来证明：$T_{l_1,l_2,\cdots,l_k}$是强连通的。如若不然，设$T_{l_1,l_2,\cdots,l_k}$有c（>1）个强连通分支T_1，$T_2,\cdots,T_c$。可以看出，必有某个强连通分支$T_m=(V_m,A_m)$，它在$T_{l_1,l_2,\cdots,l_k}$中，有

$$(V_m,\ V-V_m)=\{(u,\ v)\mid (u,\ v)\in A,\ u\in V_m,\ v\in V-V_m\}$$
$$=\phi. \qquad (8)$$

对于任意$u\in V_m$，设u在T_m中的得分为s_u'，由（8），有$s_u'=s_u$。令$Y=\{y|\ u_y\in V_m\}$，则有

$$V_y=\{v_y|\ y\in Y\}=V_m.$$

考虑上述的集Y，由$c>1$，可见Y是X的非空真子集，且有

$$\sum_{y\in Y} s_y=\sum_{y\in Y} s_y'=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k} l_i'l_j'$$

这与假设条件（Ⅱ′）矛盾，就证明了$T_{l_1,l_2,\cdots,l_k}$是强连通的，定理证毕。

当$l_1=l_2=\cdots=l_k=1$时，上述定理2就是[2]中的定理9。

注：本文完稿后，发现[5]中有类似结果。

参考文献

[1] Chang M. Bang and Henry Sharp Jr., Score Vectors of Tournaments, J. Comb. Theory B 26 (1979), 81—84.

[2] F. Harary and L. Moser, The Theory of Round Robin Tournaments, Amer. Math. Monthly 73 (1966), 231—246.

[3] H. J. Ryser, Combinatorial Mathematics, Carus Math. Monograph, No.14, New York, Wiley (1963), 47—49.

[4] H. J. Ryser, Matrices of Zeros and Ones in Combinatorial Mathematics, Recent Advances in Matrix Theory, Madison Univ Wisconsin Press (1964), 103—124.

[5] J. W. Moon, On The Score Sequence of an n-Partite Tournament, Canad. Math. Bull.5 (1962), 51—58.