第 6 卷 第 1 期 应 用 数 学 学 报 Vol. 6, No. 1
1983 年 1 月 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA Jan., 1983

关于竞赛图弧泛回路性的一类反例

吴正声 (南京师范学院)　张克民 (南京大学)　邹园 (南京师范学院)

A KIND OF COUNTEREXAMPLES ON ARC-PANCYCLIC TOURNAMENTS

Wu Zheng-sheng (*Nanjing Teachers' College*)
Zhang Ke-min (*Nanjing University*)
Zou Yuan (*Nanjing Teachers College*)

Abstract

Let $T=(V, A)$ be a tournament with p vertices. T is quasi-arc-pancyclic if for any arc $(v_0, v_1) \in A$ there is a k-cycle $C_K(k=3, 4, \ldots, p\text{-}1)$ in T which contains the arc (v_0, v_1) and if there is at least one arc in T which is not contained in any p-cycle.

Theorem. When $p \geq 6$, and $p \neq 7,9$, there always exists a quasi-arc-pancyclic tournament with p vertices.

设 $T(V, A)$ 是 p 个顶点的竞赛图，若对于任意 $(v_0, v_1) \in A$，在 T 中存在含有 (v_0, v_1) 的 k-回路 $C_k(k=3, 4, \cdots, p)$，则竞赛图 T 称为具有弧泛回路性. 若对于任意 $(v_0, v_1) \in A$，在 T 中存在含有 (v_0, v_1) 的 k-回路 $C_k(k=3, 4, \cdots, p-1)$，并且至少存在 T 的一条弧不含于 T 的任一 p-回路中，则竞赛图 T 称为具有准弧泛回路性.

为了叙述方便引进下列记号:

$R(p)$——p 个顶点的正则竞赛图所组成的集合;

$N(p)$——p 个顶点的具有弧泛回路性的竞赛图所组成的集合;

$T_{ss}(p)$——p 个顶点的其平方图是完全对称的竞赛图所组成的集合;

$Q(p)$——p 个顶点的具有准弧泛回路性的竞赛图所组成的集合;

$S(p)$——p 个顶点的强连通的竞赛图所组成的集合.

由[1—3]，有如下的真包含关系:

$$R(p) \subset N(p) \subset S(p), \quad R(p) \subset T_{ss}(p) \subset S(p).$$

又，在[4]中提出了如下的问题: "如果竞赛图 T 的平方图是完全对称图，那么 T 是否有弧泛回路性". 即 $N(p)=T_{ss}(p)$ 是否成立. 希望从图的结构来寻找竞赛图具有弧泛回路

本文 1980 年 3 月 10 日收到，1981 年 3 月 24 日收到修改稿.

性的充要条件．本文用构造性的方法证明了：当 $p \geqslant 6$，且 $p \neq 7.9$ 时，$Q(p) \neq \phi$．注意到

$$T_{ss}(p)/N(p) \supset Q(p).$$

从而，更广泛地否定了[4]中所提出的上述问题．

本文的主要结果如下：

定理　当 $p \geqslant 6$，且 $p \neq 7.9$ 时，$Q(p) \neq \phi$，即总存在 p 个顶点的具有准弧泛回路性的竞赛图．

在证明定理以前，先证明一个引理．

引理　设 $T' = (V', A')$ 是 p' 个顶点的有向图，在 T' 上添加新的顶点 u_0、u_1、u_2、u_3、u_4，并且对于任意的 $v \in V'$，添加新的弧，如图 1．由此，添加新的顶点与弧所得的有向图设为 $T = (V, A)$．若 $T' = (\{v\}, \phi)$，或者 $T' \in N(p')$，则 T 是具有准弧泛回路性的竞赛图．

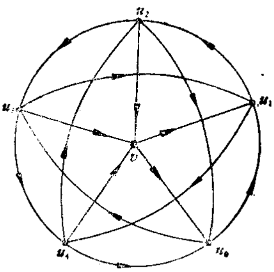

图 1

证　容易看出，有向图 T 是竞赛图，下面分两种情况来证明：竞赛图 T 具有准弧泛回路性．

情况一：设 $T' = (\{v\}, \phi)$，注意到，$u_2u_0u_1u_2$，$u_3u_1u_2u_3$，$u_4u_2u_3u_4$，$u_0u_3u_4u_0$，vu_1u_2v，vu_1u_4v，vu_0u_3v 都是 T 中的 3-回路；$u_3u_1u_4u_2u_3$，$u_3u_1u_2u_0u_3$，$u_4u_0u_3u_1u_4$，$vu_1u_2u_3v$，$vu_0u_1u_2v$，$vu_0u_3u_4v$ 都是 T 中的 4-回路；$vu_0u_1u_2u_3v$，$vu_1u_2u_0u_3v$，$vu_0u_3u_4u_2v$，$vu_1u_4u_0u_3v$，$vu_0u_3u_1u_4v$ 都是 T 中的 5-回路．由此，T 的每条弧分别含于 T 中的 3-回路、4-回路与 5-回路中．又，从图 1 不难看出，弧 (u_4, u_0) 不含于 T 中的任一 6-回路中．由此，竞赛图 T 具有准弧泛回路性．

情况二：设 $T' \in N(p')$．首先，考虑任意 $(v_0, v_1) \in A'$．由于 $T' \in N(p')$，弧 (v_0, v_1) 必含于 T' 中的 k-回路 $C_k(k = 3, 4, \cdots, p')$ 中．而 C_k 也是 T 中的 k-回路．又，在 T' 中存在含有弧 (v_0, v_1) 的长为 $(k-5)$ 的路 $\mu_{k-5}(k = p'+1, p'+2, p'+3, p'+4)$．注意到，对于任意 $v \in V$，$u_3vu_0u_1u_2u_3$ 是 T 中的 5-回路．由此，弧 (v_0, v_1) 含于 T 中的 k-回路 $u_3\mu_{k-5}u_0u_1u_2u_3$ $(k = p'+1, p'+2, p'+3, p'+4)$ 中．

其次，考虑 T 中不属于 A' 的弧．设 v_0 是 T' 的任意给定的一个顶点．仿照情况一，容易证明：这些弧分别含于 T 中的 3-回路、4-回路与 5-回路中．由于 $T' \in N(p')$，在 T' 中必存在长为 $(k-5)$ 的终点为 v_0 的路 μ'_{k-5} 与始点为 v_0 的路 $\mu''_{k-5}(k = 6, 7, \cdots, p'+4)$．注意到，对于任意 $v \in V'$，$vu_0u_1u_2u_3v$、$vu_1u_2u_0u_3v$、$vu_0u_3u_4u_2v$、$vu_1u_4u_0u_3v$、$vu_0u_3u_1u_4v$ 都是 T 中的 5-回路．于是，$v_0u_0u_1u_2u_3\mu'_{k-5}$、$v_0u_1u_2u_0u_3\mu'_{k-5}$、$\mu''_{k-5}u_0u_3u_4u_2v_0$、$\mu''_{k-5}u_1u_4u_0u_3v_0$、$\mu''_{k-5}u_0u_3u_1u_4v_0$ 都是 T 中的 k-回路 $(k = 6, 7, \cdots, p'+4)$．由此，T 中不属于 A' 的任意弧分别含于 T 的 k-回路 $(k = 6, 7, \cdots, p'+4)$ 中．

最后，证明弧 (u_4, u_0) 不含于 T 中的 $(p'+5)$-回路中．注意到，以 u_0 为起点的弧只有 (u_0, u_1)、(u_0, u_3)；以 u_4 为终点的弧只有 (u_1, u_4)、(u_3, u_4)．于是，假如 T 有含 (u_4, u_0) 的 $(p'+5)$-回路，必为 $C_1 = u_4u_0u_3\cdots u_1u_4$ 或 $C_2 = u_4u_0u_1\cdots u_3u_4$ 的形式．而以 u_2 为终点的弧只有 (u_1, u_2)、(u_4, u_2)，故 u_2 不能在 C_1 中；对于任意 $v \in V$，以 v 为终点的不在 A' 中的弧只有 (v, u_0)、(v, u_1)，故 v 也不能在 C_2 中，从而，弧 (u_4, u_0) 不能含于

T 的 $(p'+5)$-回路中.

综上所述，竞赛图 T 具有准弧泛回路性.

定理的证明　当 $p=6$ 时，取 $T'=(\{v\},\ \phi)$. 当 $p=2l(l\geqslant 4)$ 时，从[1]可知总存在 $T'\in R(p-5)\subset N(p-5)$. 当 $p=2l+1(l\geqslant 5)$ 时，注意到存在 6 个顶点的具有弧泛回路的竞赛图，如图 2. 由此，用[1]的结束语中添加顶点的方法(即 [3] 中的 α 方法)，可得 $T'\in N(p-5)$. 在上述的 T' 上，用引理中的方法添加新的顶点与弧，所得的图设为 T. 由引理，T 是 p 个顶点的具有准弧泛回路性的竞赛图，即 $T\in Q(p)$.

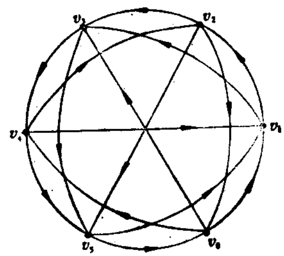

图 2

推论　当 $p\geqslant 6$. 且 $p\neq 7.9$ 时，$T_{ss}(p)/N(p)\neq\phi$，即总存在 p 个顶点的其平方图是完全对称的竞赛图，它不具有弧泛回路性.

证　由定理，当 $p\geqslant 6$，且 $p\neq 7.9$ 时，总存在竞赛图 $T\in Q(p)$. 于是，竞赛图 T 的任意一条弧都含于 T 的 3-回路中. 由[3]中的引理 2，竞赛图 $T\in T_{ss}(p)$. 又从 $T\in Q(p)$ 可知，$T\bar{\in}N(p)$. 由此，存在竞赛图 $T\in T_{ss}(p)/N(p)$.

这个推论否定地回答了 [4] 中提出的第六个问题.

最后指出，不存在 4、5、7 个顶点的具有准弧泛回路性的竞赛图.

参　考　文　献

[1] B. Alspach, Cycles of Each Length in Regular Tournaments, *Canad. Math. Bull.*, **10**:2(1967), 283—286

[2] J. A. Bondy, U.S.R. Murty, Graph Theory with Applications, The Macmillan Press LTD, 1976.

[3] 吴正声、张克民、邹园，一类竞赛图顶点的非正则性，南京师范学院学报（自然科学版），1980 年第 1 期，1—10.

[4] 朱永津，竞赛图方面研究工作的现状及展望. 曲阜师范学院学报，运筹学专刊，1980 年，60—64.