数 学 年 刊
4A (3) 1983

关于竞赛图的完备强路连通性的一个充要条件

张克民　吴正声
（南京大学）（南京师范学院）

提　要

在本文定理 2 中，证明了如下结果：p个顶点的竞赛图 $T=(V, A)$是完备强路连通的充要条件是对 T 中任一弧，在 T 中总存在对应这弧的 P_2、P'_2、P_{p-1}、P'_{p-1}.

本文提出如下猜测：p 个顶点的竞赛图 $T=(V, A)$中的任一弧，在 T 中总存在对应这弧的 P'_2、P'_{p-1}，则 T 具有强路连通性.

设 $D=(V, A)$ 是一个有向图，若对于任意$(v_0, v_1)\in A$，在 D 中存在从 v_1 到 v_0(从 v_0 到 v_1)的长度为 k 的路，记为 $P_k(v_0, v_1)$，简记为 $P_k(P'_k(v_0, v_1)$；$P'_k)$ $(k=2, 3, \cdots, p-1$，其中 $p=|V|)$，则称有向图 D 具有弧泛回路性(弧泛反回路性)．又若对于任意 v_0, $v_1\in V$，在 D 中存在从 v_0 到 v_1 的长度为 k 的路($k=d, d+1, \cdots, p-1$，其中 $d=d_D(v_0, v_1)$为 v_0 到 v_1 的距离)的路，则称有向图 D 具有强路连通性.

显然，具有强路连通性的有向图，必具有弧泛反回路性.

设 $T=(V, A)$是一个竞赛图，若 T 同时具有弧泛回路性和弧泛反回路性，则称竞赛图具有完备强路连通性.

R. J. Faudree, R. H. Schelp 在[1]中提出了无向图的强路连通性概念，这概念在有向图上的自然推广，就是上面叙述的强路连通性概念．对任意有向图，甚至对任意竞赛图，一般地讨论强路连通性是相当困难的．朱永津、田丰在[2]中，在某种意义下(即不考虑 P'_2 的存在性)，讨论了一类竞赛图的强路连通性，并给出了它的一个充分条件．在[3]中我们证明了顶点数 $p\geqslant 7$ 的完备强路连通性的竞赛图的存在性．本文的主要结果是定理2，它给出了竞赛图具有完备强路连通性的一个充要条件.

定理 1　设 $T=(V, A)$是 p 个顶点的竞赛图，若对于 T 中的任一弧，在 T 中总存在对应这弧的 P_2 和 P'_2，且对某弧$(a, b)\in A$，在 T 中存在 P'_h, $3\leqslant h\leqslant p-1$．则在 T 中存在 $P'_k(a, b)$ $(k=2, 3, \cdots, h)$．特别当 $h=p-1$ 时，对弧(a, b)具有泛反回路性.

由定理 1，易得本文的主要结果：

定理 2　p 个顶点的竞赛图 $T=(V, A)$具有完备强路连通性的充要条件是 T 中任一弧在 T 中总存在对应这弧的 P_2, P'_2、P_{p-1}、P'_{p-1}.

证　必要性是显然的，对于充分性，由定理 1 知，T 具有弧泛反回路性，又由[4]中定理 1 知，T 具有弧泛回路性．从而，T 具有完备强路连通性.

本文 1981 年 1 月 12 日收到.

推论　设$T=(V, A)$是正则或几乎正则竞赛图，$|V|\neq 8, 9$，则T具有完备强路连通性的充要条件是T中任一弧，在T中总存在对应这弧的P_2、P_2'.

证　由定理2及[2]中定理1、2，[3]中引理3结论是显然的.

下面是定理1的证明：

事实上，由数学归纳法，只需证明如下命题："在定理的条件下，对任意给定的$k(3\leqslant k\leqslant h-1)$，若$T$中存在$P'_{k-1}(a, b)$，则在$T$中亦存在$P'_k(a, b)$. 故下面总假定在$T$中存在$P'_{k-1}(a, b)$，并约定其中的一条记为：$1, 2, 3, \cdots, k$，下文的$P'_{k-1}(a, b)$总指这条路，其中$a$和1、$b$和$k$代表$T$中同一顶点，文中不加区别. 对$P'_{k-1}(a, b)$的顶点集$\{1, 2, 3, \cdots, k\}$仍记为$P'_{k-1}$. 令$W=V\backslash P'_{k-1}$. 故$|W|\geqslant 2$. 又令对任意的$v\in V$，记：$I_T(v)=\{u|u\in V, (u, v)\in A\}$，$O_T(v)=\{u|u\in V, (v, u)\in A\}$. 在不引起混淆的情况下，简记为$I(v)$、$O(v)$. 下面用穷举法，来证明命题.

（一）　设存在$w\in W$和$i<j$，$i, j\in P'_{k-1}$，使得(i, w)、$(w, j)\in A$.

（二）　设存在$w\in W$，对于任意$i\in P'_{k-1}$，有$(i, w)\in A$. 或对于任意$i\in P'_{k-1}$有$(w, i)\in A$.

易证情况（一）、（二）均存在$P'_k(a, b)$. 故排除情况（一）、（二）后，总可假设对任意$w\in W$，存在指标$s(w)\,(1<s(w)\leqslant k)$，满足$O(w)\cap P'_{k-1}=\{1, 2, \cdots, s(w)-1\}$，记为$O'(w)$. $I(w)\cap P'_{k-1}=\{s(w), s(w)+1, \cdots, k\}$，记为$I'(w)$. 令$s_1=\min\{s(w)|w\in W\}$，$s_2=\max\{s(w)|w\in W\}$. 下面我们分（三）$s_1\neq s_2$、（四）$s_1=s_2$两种情况讨论.

（三）　设$s_1<s_2$，则存在w_1、$w_2\in W$，使$s(w_1)=s_1$，$s(w_2)=s_2$. 由假定存在$P_2(s_2, w_1)$：w_1ls_2，易知$l\bar{\in} W$，$l\bar{\in} I'(w_1)$，故$l\in O'(w_1)$，即存在$1\leqslant l\leqslant s_1-1$，使$(l, s_2)\in A$. 类似由假定存在$P_2(w_2, s_1-1)$，可以证明存在$s_2\leqslant m\leqslant k$，使$(s_1-1, m)\in A$. 下面先证明两条引理：

引理1　若存在l、m、u、v满足$u<l\leqslant s_1-1<s_2\leqslant v<m$，使得$(l, m)$、$(u, v)\in A$，则在$T$中存在$P'_k(a, b)$.

证　分两种情况讨论：

α) 在下列三个不等式$u+1<l$, $l+1<v-1$, $v<m-1$中至少有一个成立的情况，例如$u+1<l$成立. 于是存在$P'_k(a, b)$：$1\cdots uv\cdots(m-1)w_2(l+1)\cdots(v-1)w_1(u+2)\cdots lm\cdots k$. 其它情况，类似地可证明存在$P'_k(a, b)$.

β) $u+1=l$, $l+2=v$, $m=v+1$的情况，此时仅能是$l=s_1-1$, $v=s_2$, $s_1+1=s_2$. 任取w'_1、$w'_2\in W$，且$(w'_1, w'_2)\in A$. 于是存在$P'_k(a, b)$：$1\cdots(s_1-2)s_2w'_1w'_2(s_1-1)(s_2+1)\cdots k$.

在竞赛图$T=(V, A)$的$P'_{k-1}(a, b)$上，若存在l、m、u、v四个顶点，满足$u<l<v<m$，且(l, m)、$(u, v)\in A$，则称(l, m)、(u, v)互为$P'_{k-1}(a, b)$的顺向交叉弧.

引理2　若$(s_1-1, s_2)\in A$，$(s_1-1, s_2)\neq(a, b)$，且在T中不存在$P'_k(a, b)$，则在A中恒存在弧与(s_1-1, s_2)互为$P'_{k-1}(a, b)$的顺向交叉弧.

证　α)当$s_1-1\geqslant 3$时，对于任意$i\in\{3, 4, \cdots, s_1-1\}$，有$(i, 1)\in A$. 事实上，若存在某个$i$，有$(1, i)\in A$，则由假定存在$P_2(w_2, i-1)$：$(i-1)uw_2$，由$s_1$、$w_2$的定义知，$u\bar{\in}\overline{W}$、$u\bar{\in} O'(w)$，故$u\in I'(w_2)$，有$(i-1, u)\in A$. 于是存在$P'_k(a, b)$：$1i\cdots(s_2-1)\cdots(u-$

1) $w_1 2\cdots(i-1)u\cdots k$. 这和假设矛盾, 故 α) 成立. 同理可证 β) 当 $s_2\leqslant k-2$ 时, 对于任意 $j\in\{s_2, s_2+1, \cdots, k-2\}$, 有 $(k, j)\in A$. 下面对引理用反证法分三种情况讨论.

i) $s_1-1=1$: 此时 $s_2\neq k$. 由 β) 知, $I(k)=\{1, k-1\}$;

ii) $s_2=k$: 此时 $s_1-1\neq 1$, 由 α) 知, $O(1)=\{2, k\}$;

iii) $s_1-1>1$, $s_2<k$: 若对任意 $j\in\{s_2, s_2+1, \cdots, k-1\}$, 有 $(j, 1)\in A$, 由 α) 知 $O(1)=\{2, k\}$; 若存在某个 $j\in\{s_2, s_2+1, \cdots, k-1\}$ 有 $(1, j)\in A$. 于是由引理 1 知, 对任意 $i\in\{2, 3, \cdots, s_1-1\}$ 有 $(k, i)\in A$, 否则和反证法假设矛盾, 再由 β) 知, $I(k)=\{1, k-1\}$.

上述所有情况均和[3]中引理 1 矛盾, 故引理成立.

现在对(三)进行讨论:

(1) 存在 $l<s_1-1$, $m>s_2$, 使得 (l, s_2)、$(s_1-1, m)\in A$, 则由引理 1 知, 在 T 中存在 $P'_k(a, b)$.

(2) $(s_1-1, s_2)\in A$ 的情况.

① 当 $s_2-s_1\geqslant 4$ 时, (A) 若 $(w_1, w_2)\in A$, 则存在 $P'_k(a, b)$: $1\cdots s_1w_1w_2(s_1+2)\cdots s_2\cdots k$ (B) 若 $(w_2, w_1)\in A$, 则由假定存在 $P_2(w_2, w_1)$: w_1uw_2, 由 w_1、w_2 定义知, $u\overline{\in} P'_{k-1}$, 故 $u\in W$. 于是存在 $P'_k(a, b)$: $1-s_1w_1uw_2(s+3)\cdots s_2\cdots k$.

② 当 $s_2-s_1\leqslant 3$ 时, 由[3]中引理 3, 只需考虑 $k>6$ 的情况, 故 $(s_1-1, s_2)\neq(a, b)$. 由引理 2 知存在与 (s_1-1, s_2) 互为 $P'_{k-1}(a, b)$ 的顺向交叉弧的弧.

(A) 若存在满足 $u<s_1-1<v<s_2$ 的 $(u, v)\in A$, 对于 w_1、w_2 不论是 (w_1, w_2) 或 $(w_2, w_1)\in A$, 由假定它们总存在对应的 P_2、P'_2, 故在 T 中总存在 w_1rw_2 路, 由于 $s(w_1)<s(w_2)$, $r\overline{\in} P'_{k-1}$, 故 $w_3\equiv r\in W$, 在 W 中存在 $w_1w_3w_2$ 路, 于是易知当 $v=s_1$、s_1+1、s_1+2 分别均存在 $P'_k(a, b)$. 例如当 $v=s_1$ 时, 存在 $P'_k(a, b)$: $1, \cdots, us_1\cdots(s_2-1)w_1(u+1)\cdots(s_1-1)s_2\cdots k$.

(B) 若存在满足 $s_1-1<u<s_2<v$ 的 $(u, v)\in A$, 类似于 (A) 同样可证明总存在 $P'_k(a, b)$.

综上所述当 $s_1<s_2$ 时, 在 T 中总存在 $P'_k(a, b)$.

(四) 设 $s_1=s_2=s$, 即对于任意 $w\in W$, 有 $s(w)\equiv s$, 此时下列引理成立.

引理 3 α) W 在 T 中的导出子图 $T[W]$ 的任一弧在 $T[W]$ 中也总存在对应的 P_2、P'_2. β) $|W|\geqslant 7$.

证　注意到定理假定及[3]中引理 3, 结论成立.

由引理 3 知, 在下面(四)的讨论中, 总假定在 $T[W]$ 中存在 $w'_1w'_2w'_3$ 路, 于是类似引理 1 的证明可得:

引理 4 若存在 (l, m)、$(u, v)\in A$ 满足条件: $u<l<s-1<s<v<m$, 则存在 $P'_k(a, b)$.

引理 5 若存在满足 $u<s-1<s<m$ 的 m, u 使得 (u, s)、$(s-1, m)\in A$, 则存在 $P'_k(a, b)$.

下面对(四)用反证法证明, 在假设 T 中不存在 $P'_k(a, b)$ 的条件下, 有如下七点结论:

(1) $3<s\leqslant k-2$.

事实上，已知 $1<s\leqslant k$. 若 $s=2$，即对于任意 $w\in W$，$O'(w)=\{1\}$，故 $P'_h(a, b)$ 在 T 中不可能存在，这与定理假定相矛盾．所以 $s\neq 2$．类似可证 $s\neq k$. 若 $s=3$，即对于任意 $w\in W$，$O'(w)=\{1, 2\}$，从而 $P'_h(a, b)$ 仅能取如下形式：$1i_1i_2\cdots i_l\mu_r 2i_{l+1}\cdots i_t k$，这里 i_1、i_2、$\cdots i_t\in\{3, 4, \cdots, k-1\}$，$l\geqslant 1$、$t\leqslant k-3$、$\mu_r$ 是 $T[W]$ 中的一条长度为 $r=h-t-3$ 的路．显然在 μ_r 中能取到长度为 $r_1=k-t-3$ 的段 μ_{r_1}，于是 $1i_1i_2\cdots i_l\mu_{r_1}2i_{l+1}\cdots i_t k$ 是 T 中的 $P'_k(a, b)$，这与假设矛盾．所以 $s\neq 3$．类似可证 $s\neq k-1$．于是结论成立．

(2) 存在 $(l', m')\in A$，满足 $l'<s-1<s<m'$、$(l', m')\neq(a, b)$.

事实上，由(1)知 $2<s-1$，$k-1>s$. 又由假定存在 $P_2(w'_1, 2)$、$P_2(k-1, w'_1)$，从而总存在 $u'\in O'(w'_1)$、$v'\in I'(w'_1)$ 使得 $(2, v')$、$(u', k-1)\in A$. 若 $v'\neq s_1$，即 $v'>s$，令 $l'=2$，$m'=v'$；若 $v'=s$，则由引理5 $u'\neq s-1$，否则它和假设矛盾，于是令 $l'=u'$、$m'=k-1$. 故(2)成立．

记上述 $(l'_1, m')\in A$ 的全体弧为 A'. 令 $l=\max\{l'\mid(l', m')\in A'\}$；$m=\min\{m'\mid(l, m')\in A'\}$．显然 $(l, m)\in A'\subset A$. $(l, m)\neq(a, b)$，且满足 $l<s-1<s<m$. 在这里要特别指出的是：l, m 与选取的先后次序无关．即若令 $m_1=\min\{m'\mid(l', m')\in A'\}$；$l_1=\max\{l'\mid(l', m_1)\in A'\}$，则 $l_1=l$，$m_1=m$，事实上，显然有 $l\geqslant l_1$，$m\geqslant m_1$，$(l_1, m_1)\in A'\subset A$，且满足 $(l_1<s-1<s<m_1$. 若 $l=l_1$，则由 m 的定义知 $m=m_1$；反之若 $m=m_1$，则由 l_1 的定义知 $l=l_1$；而当 $l_1<l$、$m_1<m$ 时，由引理4知，它和假设矛盾而得证．

(3) 在 A 中恒存在弧，与 (l, m) 互为 $P'_{k-1}(a, b)$ 的顺向交叉弧．

这是因为若不成立，用类似于证明引理2的方法，可以证明 $I(k)=\{1, k-1\}$ 或 $O(1)=\{2, k\}$．从而与[3]中引理1矛盾．

下面仅对 $(u', v')\in A$，$u'<l<v'<m$，$l\geqslant 2$ 的情况进行讨论，对于存在 $(u'', v'')\in A$，$l<u''<m<v''$，$m\leqslant k-1$ 的情况，只需考虑其反向图即可．

(4) $m=s+1$．从而有 $(l, s+1)\in A$.

事实上，若 $m>s+1$，则考察顶点 $(s+1)$，由 $l_1(=l)$ 的定义知，当 $1\leqslant t\leqslant s-2$ 时，$(s+1, t)\in A$. 由假定 $P_2(s+1, w'_1)$ 恒存在，故只有 $(s-1, s+1)\in A$. 下面分两种情况讨论．

① $l<s-2$：考察顶点 $(s-2)$，由 l 的取法，当 $s+1\leqslant t\leqslant k$ 时，$(t, s-2)\in A$. 又由假定 $P_2(w'_1, s-2)$ 恒存在，故只能 $(s-2, s)\in A$. 于是由引理5，此时存在 $P'_k(a, b)$.

② $l=s-2$：再分两种情况讨论．(A)当 $v'\geqslant s+1$ 时，由引理4知，它存在 $P'_k(a, b)$. (B)当 $v'=s-1$ 或 s 时，分别存在如下 $P'_k(a, b)$：$1\cdots u'(s-1)\cdots(m-1)w'_1(u'+1)\cdots(s-2)m\cdots k$、$1\cdots u's\cdots(m-1)w'_1w'_2(u'+1)\cdots(s-2)m\cdots k$.

故当 $m>s+1$ 时，总与不存在 $P'_k(a, b)$ 的假定相矛盾．故 $m=s+1$.

设满足 $u'<l<v'<m=s+1$ 的 $(u', v')\in A$ 全体弧记为 A''. 令 $v=\min\{v'\mid(u', v')\in A''\}$；$u=\max\{u'\mid(u', v)\in A''\}$．显然有 $(u, v)\in A''\subset A$，且 $u<l<v<m=s+1$.

(5) T 还具有如下八点性质：

① $v>l+1$,

② 对于任意 $t\in\{l+1, l+2, \cdots, v-1\}$，$i\in\{1, 2\cdots, l-1\}$，有 $(t, i)\in A$,

③ 对于任意 $i\in\{1, 2, \cdots, u-1\}$，有 $(v, i)\in A$；当 $v<s$ 时，还有 $(v+1, i)\in A$.

事实上，若 $(i, v)\in A$，由②存在 $P'_k(a, b)$：$1\cdots iv\cdots sw'_1(l+1)\cdots(v-1)(i+1)\cdots l(s+$

1)$\cdots k$. 这与假设矛盾. 故$(v, i)\in A$. 又当$v<s$时, 若$(i, v+1)\in A$, 由②存在$P'_k(a, b)$: $1\cdots i(v+1)\cdots sw'_1w'_2(l+1)\cdots(v-1)(i+1)\cdots l(s+1)\cdots k$. 这又与假设矛盾. 故$(v+1, i)\in A$.

④ 对于任意$j\in\{s+2, \cdots, k\}$; $t\in\{l+1, \cdots, s\}$有$(j, t)\in A$.

事实上, (A)若存在某个$t\in\{l+1, \cdots, s-2\}$, 有$(t, j)\in A$, 则由引理 4, 存在$P'_k(a, b)$、(B)若$(s-1, j)\in A$, 则存在$P'_k(a, b)$: $1\cdots l(s+1)\cdots(j-1)w'_1w'_2(l+1)\cdots(s-1)j\cdots k$. (C)若$(s, j)\in A$, 则存在$P'_k(a, b)$: $1\cdots l(s+1)\cdots(j-1)w'_1(l+1)\cdots sj\cdots k$. 它们均和假定相矛盾.

⑤ 对于任意$t\in\{l+1, \cdots, s-2\}$, 有$(s+1, t)\in A$.

⑥ 对于任意$t\in\{l+1, \cdots, s-2\}$, 有$(t, s)\in A$.

这是因为由假定存在$P_2(w'_1, t)$, 考虑到④、⑤, 即得结论.

⑦ $(s+1, s-1)\in A$.

事实上, 由⑥及引理 5, 只能$(s+1, s-1)\in A$.

⑧ $u=l-1$, 从而有$(l-1, v)\in A$.

事实上, 若$u<l-1$, 由①、②知恒存在$P'_k(a, b)$: $1\cdots uv\cdots sw'_1(l+1)\cdots(v-1)(u+1)\cdots l(s+1)\cdots k$. 这与假设矛盾.

(6) $v\overline{\in}\{l+1, l+2, \cdots, s-2\}$.

若$v\in\{l+1, l+2, \cdots, s-1\}$, 考虑$\{l+1, l+2, \cdots, s-2, s-1\}$在$T$中的导出子图, 记为$T_1$, 显然$T_1$的凝聚图$\hat{T}_1$是传递图(见[5]中习题 10.1.9). 设$T_1$中含$v$的有向连通分支记为$\hat{v}$, 在$\hat{T}_1$中仍记为$\hat{v}$, 令$I_{\hat{T}_1}(\hat{v})$对应在$T_1$中的顶点集合记为$L$. $O_{\hat{T}_1}(\hat{v})$对应在T_1中的顶点集合记为R. 显然若L、R、$\hat{v}$非空, 则均存在哈密顿路, 分别记为μ_1、μ_2和μ. 并有下面四点性质:

① 对任意$i\in L$, 恒有$i<v$. 对任意$j\in R$, 恒有$v<j$.

这是因为, 若$i>v$, 则$iv(v+1)\cdots(i-1)i$是一回路, 故$i\in\hat{v}$, 矛盾, 所以$i<v$. 同理证明后半部分.

② $L\neq\emptyset$.

事实上, 若$L=\emptyset$, 则存在$P'_k(a, b)$: $1\cdots(l-1)\mu\mu_2sw'_1l(s+1)\cdots k$. 这与假设矛盾.

③ $R=\emptyset$.

事实上, 若$R\neq\emptyset$, 则$(L, R)=\{(i, j)\mid\forall i\in L; \forall j\in R\}\subset A$. 由假定在$T$中存在$P_2(L, R)$. 又由(5)知, 它只能是$RlL$. 于是存在$P'_k(a, b)$: $1\cdots(l-1)\mu sw'_1\mu_1\mu_2l(s+1)\cdots k$. 这与假设矛盾.

④ $\hat{v}=\{v\}$.

事实上, 若$\hat{v}\neq\{v\}$, 设$\hat{v}\setminus\{v\}$中的哈密顿路记为μ'. 由假定在T中存在$P_2(L, \hat{v})$, 又由(5)知, 它只能是$\hat{v}lL$, 再考虑到③, 于是存在$P'_k(a, b)$: $1\cdots(l-1)vsw'_1\mu_1\mu'l(s+1)\cdots k$. 这与假设矛盾.

由①、③、④知, $v=s-1$. 故(6)成立.

(7) $v\neq s-1, s$.

若$v=s-1$或s, 则T有如下七点性质:

① 对于任意 $i, j\in\{1, 2, \cdots, l-1\}$, 且 $i>j+1$, 有 $(i, j)\in A$.

事实上, 由(5)③, 用类似于引理 2 中 α)的证明, 便得结论.

② 对于任意 $i, j\in\{s+1, \cdots, k\}$, 且 $i>j+1$, 有 $(i, j)\in A$.

这由((5)的④, 用类似引理 2 中 α)的证明, 便得结论.

③ 恒存在某个 $i\in\{2, 3, \cdots, l\}$, 使 $(i, k)\in A$, 且对任意的 $j\in\{s+1, \cdots, k-1\}$, 有 $(j, 1)\in A$.

事实上, 若对任意 $i\in\{2, \cdots, l\}$, $(k, i)\in A$, 再注意到 ②及(5)的④ 于是有 $I(k)=\{1, k-1\}$. 这和[3]中引理 1 矛盾, 故存在某个 $i\in\{2, 3, \cdots, l\}$ 使 $(i, k)\in A$, 于是再由引理 4, 结论成立.

④ $(k, l)\in A$.

事实上, 若 $(l, k)\in A$, 则由引理 4, 对任意的 $i\in\{1, 2, \cdots, l-1\}$, 有 $(k-1, i)\in A$. 否则和假设矛盾. 于是由②及(5)的④, $I(k-1)\subset\{l, k-2\}$, 这又和[3]中引理 1 矛盾, 故结论成立.

⑤ $l>2$.

由③、④知, $l=2$ 的情况不会发生, 故 $l>2$.

⑥ $(1, l)\in A$.

事实上, 若 $(l, 1)\in A$, 注意到①、③及(5)②、(5)③, 于是 $O(1)=\{2, k\}$, 这和[3]中引理 1 矛盾.

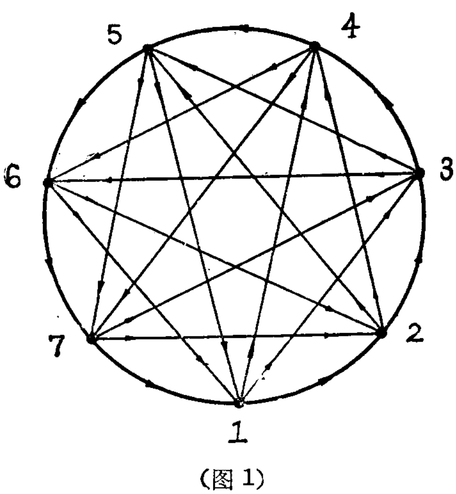
⑦ $(k, 2)\in A$

事实上, 若 $(2, k)\in A$. (A) $l=3$; 由③、④、(5)②、(5)③, 则 $P'_2(1, 2)$ 不存在. (B) $l=4$; 则由⑥存在 $P'_k(a, b)$: $14\cdots(k-1)w'_1w'_2 2k$. (C) $l\geqslant 5$; 则由①、⑥存在 $P'_k(a, b)$: $1l\cdots(k-1)w'_1 3\cdots(l-1)2k$. (A)、(B)、(C)分别与定理假定及反证法假设相矛盾, 故⑦成立.

综合 ①、③、④、⑦ 及(5)的 ②、(5)的 ③, 在 T 中不存在 $P'_2(1, k)$, 这又与定理假定相矛盾, 故(7)成立.

最后由(6)、(7)导出 $v\in\{l+1, \cdots, s-1, s\}$, 这和假设存在满足 $u<l<v<m=s+1$ 的 $(u, v)\in A$ 相矛盾. 故在(四)的条件下, 恒存在 $P'_k(a, b)$.

综合(一)、(二)、(三)、(四)穷举了一切可能情况, 在定理条件下, 总存在 $P'_k(a, b)$. 故定理成立.



(图 1)

注 1 当 $p\geqslant 13$ 时, 总存在满足如下性质的 p 个顶点的竞赛图 T, 它的任一弧在 T 中恒存在对应的 $P_k(k=2, 3, \cdots, p-1)$ 和 $P'_j(j=3, 4, \cdots, p-1)$, 但 T 仍可能不是完备强路连通图.

例 1

将图 1 记为 T_7, 易直接验证, T_7 满足注 1

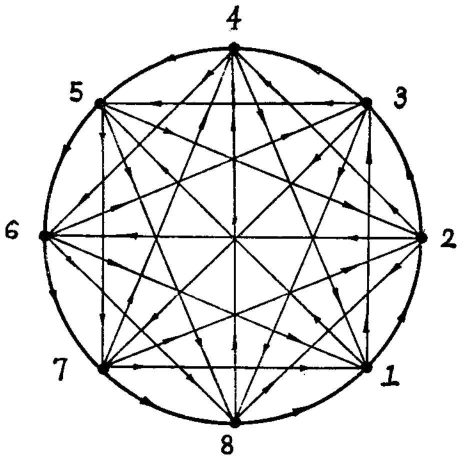
中所述条件. 但在 T_7 中不存在 $P'_2(2, 3)$, 故 T_7 不具有完备强路连通性.

为了给出顶点数 $p>7$ 的不具有完备强路连通性的竞赛图的例子, 引进下述概念, 设 $T_0=(V_0, A_0)$、$T_1=(V_1, A_1)$ 是任意两个竞赛图. $V_0\cap V_1=\emptyset$, $v_0\in V_0$, 令 $V=(V_0\backslash\{v_0\})\cup V_1$, $A=\{(v', v'')\mid v', v''\in V, (v', v'')\in A_0\cup A_1$ 或 $v''\in O_{T_0}(v_0)$, $v'\in V_1$, 或 $v'\in I_{T_0}(v_0)$, $v''\in V_1\}$, 所得的竞赛图 $T=(V, A)$ 称为 T_0 在 v_0 点的 T_1 扩张. 记为 $T=T_0[v_0; T_1]$.

对于任意给定的正整数 $p\geqslant 13$, 由(3)知, 存在 $p-6(\geqslant 7)$ 个顶点的完备强路连通图 T_1, 于是 $T=T_7[1; T_1]$ 是 p 个顶点的竞赛图, 类似于[3]中引理 5 的证明, 知 T 满足注 1 中所述的条件, 且在 T 中 $P'_2(2, 3)$ 仍不存在. 故 T 不具有完备强路连通性.

注 2 当 $p\geqslant 14$ 时, 总存在满足如下性质的 p 个顶点的竞赛图 T, 它的任一弧恒存在对应的 $P_k(k=3, 4, \cdots, p-1)$ 和 $P'_j(j=2, 3, \cdots, p-1)$, 但 T 仍可能不是完备强路连通竞赛图.

例 2

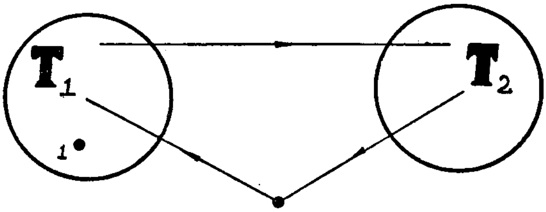


(图 2)

将图 2 记为 T_8. 易直接验证 T_8 满足注 2 所述的条件, 但在 T_8 中不存在 $P'_2(7, 8)$. 对于任意给定的整数 $p\geqslant 14$. 设 T_1 为某个 $p-7(\geqslant 7)$ 个顶点的完备强路连通的竞赛图, 类似[3]中引理 5 的证明, $T=T_8[1, T_1]$ 是 p 个顶点的竞赛图, 且满足注 2 中所述的条件, 但在 T 中不存在 $P'_2(7, 8)$. 故 T 不具有完备强路连通性.

注 3 当 $p\geqslant 15$ 时, 总存在满足如下性质的 p 个顶点的竞赛图 T, 它的任一弧在 T 中恒存在对应的 $P_k(k=2, 3, \cdots, p-1)$ 和 P'_2, 但 T 仍可能不是完备强路连通图.

例 3



(图 3)

在图3中，$T_1=(V_1, A_1)$、$T_2=(V_2, A_2)$分别为7个和$p-8(\geqslant 7)$个顶点的完备强路连通竞赛图．$V_1\cap V_2=\emptyset$，顶点$O\in V_1\cup V_2$．在T_1、T_2、O之间以如下方式添加弧：(V_1, V_2)、(V_2, O)、(O, V_1)．最后所得的图记为T．显然T是$p(\geqslant 15)$个顶点的竞赛图，易直接验证T满足注3中所述的条件，但$P'_8(0, 1)$在T中不存在，其中$1\in V_1$，故T不具有完备强路连通性．

综合注1、2、3知，定理2在某种意义下，是最好的结果．剩下来的问题，提出如下的猜测：

猜测1 若p个顶点的竞赛图T中任意弧，在T中恒存在对应这弧的P_2、P'_2、P'_{p-1}，则竞赛图T具有完备强路连通性．

这一猜测的更一般提法是：

猜测2 若p个顶点的竞赛图T中任一弧，在T中恒存在对应的P'_2、P'_{p-1}，则竞赛图T具有强路连通性．

参 考 文 献

[1] Faudree, R. J. and Schelp, R. H., The square of a block is strongly path connected., *J. Comb. Theory, Ser. B*, **20** (1976), 47—61.

[2] 朱永津、田丰, On the strong path connectivity of a tournament., *Scientia Sinica. Special Issue (II)*, (1979), 18—28.

[3] 张克民、吴正声、邹园，一类具有完备强路连通性的竞赛图的存在性，南京大学学报(自然科学版)(1981)第三期，303—307

[4] 吴正声、张克民、邹园，竞赛图具有弧泛回路性的一个充要条件，中国科学，**8**(1981)，915—919; A necessary and sufficient condition for arc-pancyclicity of tournaments., *Scientia Sinica (Series A)*, Vol XXV, 3 (1982), 249—252.

[5] Bondy J. A. and Murty, U. S. R., Graph theory with applications., Am Elsevier, New york, (1976)