

⑫  
90-92第15卷 第2期  
1993年 10月

葛洲坝水电工程学院学报

Vol. 15 No. 2  
Oct. 1993

## 关于 Grünbaum 猜想的注记

李光春

(基础课部)

张克民

(南京大学)

0156

**摘要** 本文提出了一个等价于 Grünbaum 猜想的命题, 从而提供了一条解决该猜想的新途径。

**关键词** Grünbaum 猜想; k 正则; 围长; k 色

## 0 引言

1970年 Grünbaum 提出了如下猜想:

Conjecture<sup>[1]</sup>; If  $k \geq 3$  and  $n \geq 3$  are integers, there exist  $k$ -chromatic,  $k$ -valent graphs  $G(k, n)$  that contain no circuits of length  $\leq n$ .

迄今为止, 这个猜想未得以解决。

## 1 定义及引理

**定义 1** 若图  $G$  是围长为  $g$  的  $k$  正则的  $k$  色图, 则称  $G$  是  $(k, k, g)$  一图。

**定义 2** 若图  $G$  是围长为  $g$  的  $k$  正则图, 则称  $G$  是  $(k, g)$  一图。

**定义 3** 若图  $G$  是围长为  $g$ 、最大度为  $\Delta$  的  $\Delta$  色图, 则称  $G$  是  $(\Delta, g)$  一图。

由上述定义, Grünbaum 猜想可以叙述为:

**猜想:** 任给的  $k \geq 3, g \geq 4, k, g \in \mathbb{Z}^+$ , 总存在  $(k, k, g)$  一图。

Tutte 曾在 1966 年证明了如下结果:

**引理 1**<sup>[2][3]</sup> 任给的  $k \geq 3, g \geq 3, k, g \in \mathbb{Z}^+$ , 都存在  $(k, g)$  一图。

下面是著名的 Brooks 定理:

**引理 2**<sup>[4]</sup> 若  $G$  是连通的简单图, 并且它既不是奇圈, 又不是完全图, 则  $\chi \leq \Delta$ 。

## 2 定理及其证明

**定理** 对任意的整数  $k = \Delta \geq 3, g \geq 4$ , 存在  $(k, k, g)$  一图的充要条件是存在  $(\Delta, g)$  一图。

**证明** 必要性是明显的。事实上, 任意一个  $(k, k, g)$  一图都是  $(\Delta, g)$  一图。

收稿日期: 1993年1月15日

下面证明充分性。

设  $G_0$  是  $(\Delta, g)$ -图,  $k = \Delta \geq 3, g \geq 4$ .

记  $\epsilon_0 = \epsilon(G_0), \nu_0 = \nu(G_0)$ ;

当  $2\epsilon_0 = \nu_0\Delta$  时, 显然  $G_0$  是  $(k, k, g)$ -图;

当  $2\epsilon_0 < \nu_0\Delta$  时, 记  $S_0 = \{v | v \in V(G_0), d_{G_0}(v) < \Delta\}$ .

取点集  $S_1$ , 使  $S_1 \cap V(G_0) = \varnothing$ , 且  $|S_1| = \nu_0\Delta - 2\epsilon_0$ .

在  $G_0$  和  $S_1$  的基础上构造  $G_1$ , 使得

$V(G_1) = V(G_0) \cup S_1, E(G_1) = E(G_0) \cup E(G_1[S_0 \cup S_1])$

其中  $E(G_1[S_0 \cup S_1])$  是满足下列条件的边集:

(1)  $\forall v \in S_0, |N_{G_1}(v)| = \Delta, |N_{G_1}(v) \cap S_1| = \Delta - d_{G_0}(v)$

(2)  $\forall v \in S_1, N_{G_1}(v) \subset S_0, |N_{G_1}(v)| = 1$ .

$N_{G_1}(v)$  表示点  $v$  在图  $G_1$  中的邻点集。

将  $G_1$  的 1 度点, 即  $S_1$  内的点给予标号  $i$ , 这里  $1 \leq i \leq |S_1|$ , 使得任意两点无相同的标号。

再取  $G_1$  的两个拷贝  $G_1^{(1)}, G_1^{(2)}$ , 在  $G_1^{(j)}$  中, 将原有的顶点标号作替换  $i \rightarrow ij, (j=1, 2)$ .

记  $G_2 = G_1^{(1)} + G_1^{(2)}$

根据引理 1, 对于给定的正整数  $k = \Delta$  和  $g$ , 存在  $(k, g)$ -图  $H_0$ .

由于  $k = \Delta \geq 3$ , 故  $\epsilon(H_0) \neq \varnothing$  取  $e_0 = u_0v_0 \in \epsilon(H_0), \mu, v \in V(H_0)$ , 作

$H_1 = H_0 - e_0 + u_0\mu + v_0v$

取  $\Delta - 1$  个  $H_1$  拷贝, 使对应的  $u$  重合为一点并赋以标号 1, 使对应的  $v$  重合为一点并赋以标号 2, 所得之图记作  $H_2$ .

取  $|S_1|$  个  $H_2$  拷贝:  $H_2^{(1)}, H_2^{(2)}, \dots, H_2^{(|S_1|)}$ , 在  $H_2^{(j)}$  中将原有的顶点标号 1 和 2 作替换  $j \rightarrow ij$ , 其中  $j=1, 2, i=1, 2, \dots, |S_1|$ .

记  $H_3 = H_2^{(1)} + H_2^{(2)} + \dots + H_2^{(|S_1|)}$

将  $H_3$  中有标号的点与  $G_2$  中有相同标号的点重合, 记所得之图为  $G$ .

由  $G$  的构造过程, 显见  $G$  是围长为  $g$  的  $\Delta$  正则图。

由于  $G_0 \subset G, \chi(G_0) = \Delta$ , 所以  $\chi(G) \geq \chi(G_0) = \Delta$ ; 另一方面, 由引理 2,  $\chi(G) \leq \Delta$ .

于是, 必有  $\chi(G) = \Delta$ .

所以,  $G$  是  $(\Delta, \Delta, g)$ -图, 即, 由任给的  $(\Delta, g)$ -图, 都存在与之对应的  $(\Delta, \Delta, g)$ -图, 故充分性成立。

### 参 考 文 献

- 1 Grünbaum · B. a problem in graph colouring amer. math. monthly · 77(1970)1088.
- 2 Tutte. W. T. Connectivity in graphs. University press toronto. (1966)81.
- 3 Biggs. N. algebraic graph theory. Cambridge University Press (1974) 154.
- 4 Bondy. J. A and Murty. U. S. R, graph theory with applications the macmillan press LTD (1976).

## A Note of Grunbaum Conjective

**Li Guangchun**  
(Dept. of Basic course)

**Zhang Keming**  
(Nanjing University)

**Abstract** The authors suggest an equivalent proposition about grunbaumconjective and give a new way to solve the conjective.

**Keywords** Grünbaum conjective;  $k$ -chromatic;  $k$ -valent; girth

## 葛洲坝水电工程学院 水电工程建筑勘测设计研究所 简 介

该所由原水电部批准于1984年成立。现隶属于建筑工程系。是学院专门承接以水电工程勘测设计研究任务为主的最早研究所。现有中级职称以上技术人员80人,其中高级技术职称35人。各专业人员结构组成合理。下设6个研究室,3个试验中心。试验设备手段齐全。

该所宗旨是系、所一体,科研和教学相结合,生产和服务相结合,面向市场经济主战场,努力提高科学技术和办学效益。确保质量,信誉至上。

几年来完成的主要成果有:完成了长阳县城区测量;隔河岩水利枢纽区域规划测量;宜昌中包水电站坝区及库区测量;四川万县小洲镇等地形测量;完成了神农架林区娘娘庙水电站;白渔洞水电站规划。措施设计,一次通水并网发电成功。完成了宜昌中包水电站(坝高90m)及四川巫溪双道综合工程(最大水头800多m)的可行性研究。宜昌中包水电站初步设计亦已基本完成。

该所近几年来,完成了葛水院14层主楼、计算中心楼、水工试验大厅(33m跨度),西陵区政府办公大楼,宜昌水电局综合大楼,三峡工区16小区规划和公寓楼群设计等多层、高层工民建建筑设计。完成了“七·五”攻关项目中的子项目5项。已承担电力、水电科学基金及电力部青年教师学术基金项目14项。横向科研及试验任务30余项。在国内外公开发表论文100余篇。

该所持有国家部、委颁发的乙级设计证书和湖北省测绘局颁发的丙级勘测证书。设计方面可承接10万千瓦以下的水电站,20层以下的工民建及城镇规划、公路、桥、隧道、码头等工程的设计和科研任务。勘测方面可承担工程施工中的控制测量、水电工程测量、建筑工程测量、线路测量、地形测量、大坝观测、房屋变形观测等。

该所拥有国际上通用的有限元分析软件。国内通用的专门用于岩土工程的三维弹塑性有限元软件;广义楔形体法计算高边坡稳定的大型通用软件包。成套水工结构分析软件。PK、PM等建筑CAD软件包;水电工程概预算软件包及微机网络系统和成套绘图设备系统。可承接坝工结构,水工水力,施工技术,高边坡,地下工程及环境工程等科研和设计任务。

所 长: 韩国权  
副 所 长: 舒茂修 (兼副总工程师)  
黄文正  
总工程师: 郭其达

电 挂: 7108  
传 真: 225764  
电 话: 447132—470、471  
邮政编码: 443002