有向图，半完全有向图，连通性，图论





⑤

146-152

# 关于 Lsd 连通性的二个猜想*

卜月华　　张克民**　　O157.5
(浙江师范大学)　　(南京大学)

# ON TWO CONJECTURES OF CONNECTIVITY ABOUT LOCALLY SEMICOMPLETE DIGRAPHS

Bu Yuehua　　Zhang Kemin
(Zhejiang Normal University)　　(Nanjing University)

**Abstract**

In this paper we prove the JΦrgen's conjecture [1]: Let D be a $k$-connected locally semicomplete digraph with minimum in- and out-degree at least $2k$. Then $D$ has a vertex $x$ such that $D-x$ is $k$-connected.

## 1 引 言

有向图 $D$ 具有点集 $V(D)$、弧集 $E(D)$. 如果 $(x,y)\in E(D)$, 就称 $x$ 控制 $y$, 记为 $x\to y$. 设 $A$、$B$ 是 $V(D)$ 的两个子集，如果 $A$ 中每个点控制 $B$ 中每个点，就称 $A$ 完全控制 $B$, 记为 $A\Rightarrow B$. 令 $x\in V(D)$, $S$ 是 $V(D)$ 的子集，记

$$N_s^+(x)=\{u\mid u\in S,\ x\to u\},$$

$$N_s^-(x)=\{u\mid u\in S,\ u\to x\}.$$

如 $S=V(D)$, 就可略去表示顶点子集的下标 $S$, 分别记为 $N^+(x)$ 和 $N^-(x)$. 顶点 $x$ 的出度定义为 $|N^+(x)|$, 入度定义为 $|N^-(x)|$, 分别用 $d^+(x)$ 和 $d^-(x)$ 表示. 分别记 $D$ 中最小出度、入度为 $\delta^+=\min\limits_{x\in V(D)}\{d^+(x)\}$, $\delta^-=\min\limits_{x\in V(D)}\{d^-(x)\}$.

一个有向图 $D$ 称为半完全有向图，如果 $D$ 中任二个不同顶点之间至少有一条弧连接. 一个局部半完全有向图定义为：对 $D$ 中的每个顶点 $x$, 由 $N^+(x)$ 与 $N^-(x)$ 所导出的子图均是半完全有向图. 显然半完全有向图是局部半完全有向图. 为了方便，用 Lsd 表示

* 1992年10月13日收到.
** 国家自然科学基金资助项目

局部半完全有向图.

有向图 $D$ 称为强连通的,如对 $D$ 中任二个不同顶点 $u$、$v$,在 $D$ 中存在从 $u$ 到 $v$ 的有向路(简称 $(u,v)$ 有向路).有向图 $D$ 的强连通分支 $D'$ 是 $D$ 的一个极大强连通子图.$D$ 是 $k-$ 连通的,如对 $V(D)$ 的任意一个点数不超过 $k-1$ 的子集 $S$,$D-S$ 是强连通.如 $D$ 是强连通,$S \subsetneqq V(D)$,使 $D-S$ 非强连通,就称 $S$ 是 $D$ 的一个分离集,点数最少的分离集称为 $D$ 的最小分离集.对一个非强连通有向图 $D$,总可以把 $D$ 的强连通分支排列成 $D_1, D_2, \cdots, D_k$, $k \geqslant 2$, 使对 $i<j$, $D_j$ 中没有点控制 $D_i$ 中的点.

一个有向图 $D$ 称为连通的,如 $D$ 的基础底图连通.我们这里所指的图均是连通有向图,且无自环、无重弧.其它一些术语、概念与[2]相同.

Jφ rgen Bang-Jensen 在[1]中引进了局部半完全有向图,这类图推广了半完全有向图的概念,而且他把半完全有向图及竞赛图中有关的性质扩充到这类图中,得到相应的一些结果,并提出如下二个猜想:

**猜想 A**　设 $D$ 是 $k-$ 连通局部半完全有向图,如 $\delta^-(D)$、$\delta^+(D) \geqslant 2k$, 则 $D$ 中存在一点 $x$, 使 $D-x$ 是 $k-$ 连通 Lsd.

**猜想 B**　设 $T$ 是 $k-$ 连通局部半完全有向图,$T$ 中不存在长为 2 的回路.如 $\delta^-(T)$、$\delta^+(T) \geqslant \{\frac{3k}{2}\}$,则 $T$ 中存在一点 $x$, 使 $T-x$ 是 $k-$ 连通 Lsd.

本文证明了上述两个猜想成立.

## 2　主要结果

为了方便证明,先叙述三条引理.

引理 1　([1], 定理 3.1)　设 $D$ 是连通 Lsd 但非强连通,则具有性质:

(1)　$D$ 的任意二个强连通分支 $A$、$B$, 或者 $A$ 与 $B$ 之间无弧连接,或其中一个完全控制另一个,

(2)　如 $A$、$B$ 是 $D$ 的二个强连通分支,$A \Rightarrow B$, 则 $A$ 与 $B$ 都是半完全有向图;

(3)　$D$ 的强连通分支能排成唯一的一个序列 $D_1, D_2, \cdots, D_k$, 使 $D_i \Rightarrow D_{i+1}$, $i=1,2,\cdots,k-1$. 而对 $j>i$, $D_j$ 中没有点控制 $D_i$ 中的点.把 $D_1$ 称为 $D$ 的第一分支,$D_k$ 称为 $D$ 的最后分支.

(4)　在 $D$ 的强连通分支序列 $D_1, D_2, \cdots, D_k$ 中如存在 $1 \leqslant i_0 < j_0 \leqslant k$, $x \in D_{i_0}$、$y \in D_{j_0}$, 使 $x \rightarrow y$, 则 $D_i \Rightarrow D_j$, 对一切 $i$、$j$, $i_0 \leqslant i < j \leqslant j_0$, 成立.

引理 2　设 $D$ 是强连通的 Lsd, $S$ 是 $D$ 的一个最小分离集,则 $D-S$ 连通.

证　如 $D-S$ 的基础底图 $G$ 非连通,设 $G_1$、$G_2$ 为 $G$ 的两个分支.$\forall x \in S$, 由于 $S$ 是最小分离集,所以 $D-(S-\{x\})=D_1$ 是强连通,因而在 $D_1$ 中,存在从 $V(G_i)$ 到 $V(G_{3-i})$ $(i=1,2)$ 的有向路,这两条有向路必通过 $x$, 即在 $D$ 中,$N_D^+(x)$ 同时含有 $G_1$、$G_2$ 中的点,由 Lsd 定义,这二个点在 $D$ 中有弧连接,这条弧所对应的边含在 $G$ 中.这与 $G_1$、$G_2$ 在 $G$ 中无边连接矛盾.所以 $D-S$ 连通.

引理 3 ([1]、定理 4.1) 设 $D$ 是 2－连通 Lsd. $\delta^-(D)$、$\delta^+(D)\geqslant 4$，则 $D$ 中存在一个点 $x$，使 $D-x$ 是 2－连通 Lsd.

**定理 1** 设 $D$ 是 $k$－连通 Lsd，$\delta^-(D)$、$\delta^+(D)\geqslant 2k$，则 $D$ 中存在一个点 $x$，使 $D-x$ 是 $k$－连通 Lsd. $(k\geqslant 2)$

证 如 $\mathcal{K}(D)\geqslant k+1$，定理自然成立.

下面对 $D$ 的连通度 $\mathcal{K}(D)=k$ 的情况进行归纳.

当 $k=2$ 时，由引理 3 知成立.

现设 $D$ 是连通度为 $k(\geqslant 3)$ 的 Lsd. 取 $D$ 的一个 $k$－分离集 $S$，使 $D-S$ 的第一分支所含的点数最多.

由引理 2，$D-S$ 连通. 设 $D-S$ 的强连通分支序列为

$$D_1, D_2, \cdots, D_l \qquad l\geqslant 2$$

记

$$S=\{u_1, u_2, \cdots, u_k\}$$

因为 $\delta^-(D)$、$\delta^+(D)\geqslant 2k$，故 $|D_1|\geqslant k+1$，$|D_l|\geqslant k+1$. 由于 $D$ 是 $k$－连通的，利用 Menger 定理，存在 $k$ 条不交的有向路

$$b_i\to u_i\to a_i \qquad i=1,2,\cdots,k$$

其中 $a_i\in D_1$，$b_i\in D_l$，$i=1,2,\cdots,k$，且 $\{a_i\}$、$\{b_i\}$ 互不相同.

因 $S$ 是 $D$ 的最小分离集，所以 $\forall u_i\in S$，$D-u_i$ 是 $(k-1)$－连通 Lsd，而且 $\delta^-(D-u_i)\geqslant\delta^-(D)-1>2(k-1)$，$\delta^+(D-u_i)\geqslant\delta^+(D)-1>2(k-1)$，因此由归纳假设，对 $D-u_i$，$i=1,2,\cdots,k$，定理结论成立.

注意到取 $D-u_i$ 的一个最小分离集 $S'(|S'|=k-1)$ 使 $(D-u_i)-S'$ 的第一分支 $T_1$ 的点数最多，易见 $S'\cup\{u_i\}$ 也为 $D$ 的一个 $k$－分离集，而 $T_1$ 是 $D-S'\cup\{u_i\}$ 的第一分支，由 $D_1$ 的假设，$|T_1|\leqslant|D_1|$. 另一方面，$S''=S-\{u_i\}$ 也为 $D-u_i$ 的一个 $(k-1)$－分离集，而对 $(D-u_i)-S''$ 来说，它的第一分支就是 $D_1$，所以 $|D_1|\leqslant|T_1|$，即 $|D_1|=|T_1|$. 故不失一般性可假设 $S'=S''$. 因而由引理 3 的证明过程和归纳假设，$\forall x_0\in D_l-\{b_1,b_2,\cdots,b_k\}$，$(D-u_i)-x_0$ 是 $(k-1)$－连通 Lsd，$i=1,2,\cdots,k$.

下面将证明 $D-x_0$ 是 $k$－连通 Lsd. 首先 $D-x_0$ 是 Lsd 是显然的，其次根据 $k$－连通的定义，只要证明，对 $D-x_0$ 的任一 $(k-1)$－子集 $S_0$，$(D-x_0)-S_0=D-S_0\cup\{x_0\}$ 是强连通.

用反证法：假设存在 $S_0\subseteq V(D-x_0)$，$|S_0|=k-1$，使 $D-(S_0\cup\{x_0\})$ 不是强连通的. 记

$$D_i'=D_i-S_0 \qquad i=1,2,\cdots,l.$$

$$A=\bigcup_{i=1}^{l-1}D_i', \qquad S'=S-S_0.$$

$S_1=\{y|y\in S'\bigcup(D_l'-\{x_0\})$, 在 $D-(S_0\bigcup\{x_0\})$ 中存在一条从 $y$ 到 $A$ 的有向路$\}$

$$S_1'=S_1\bigcap S', \qquad B=S_1\bigcap D_l'$$

因为 $|S_0|=k-1$, 因而至少有一条路 $b_i\to u_i\to a_i$ $(i=1,2,\cdots,k)$ 含在 $D-(S_0\bigcup\{x_0\})$ 中, 所以 $S_1'\neq\varnothing$, $B\neq\varnothing$.

1. 如存在 $1<i_0<j_0\leqslant l$, 使 $D_{i_0}'\neq\varnothing$, $D_{j_0}'\neq\varnothing$, $D_t'=\varnothing$, $t=i_0,i_0+1,\cdots,j_0-1$, 则 $D_{i_0-1}\Rightarrow D_{j_0}$, 因而 $D_{i_0-1}'\Rightarrow D_{j_0}'$.

如 $D_{i_0-1}$ 不完全控制 $D_{j_0}$, 则由引理 1, $D_{i_0-1}$ 与 $D_{j_0}$ 之间无弧连接, 因而 $D_{i_0-1}$ 与 $D_m$ 之间也无弧连接 ($j_0\leqslant m\leqslant l$). 记

$$D_{i_0j_0}=D_{i_0}\bigcup D_{i_0+1}\bigcup\cdots\bigcup D_{j_0-1}$$

因为 $D_t'=D_t-S_0=\varnothing$, $t=i_0,i_0+1,\cdots,j_0-1$, 所以 $D_{i_0j_0}\subseteq S$, 则 $|D_{i_0j_0}|\leqslant k-1$, $D-D_{i_0j_0}$ 强连通, 在 $D-D_{i_0j_0}$ 中存在从 $D_{i_0-1}$ 到 $D_j$ 的有向路, 此路必通过 $S$, 即存在 $a\in D_{i_0-1}$, $u_t\in S$, 使 $a\to u_t$, 但 $b_t\to u_t$, 由 Lsd 的定义, $a$ 与 $b_t$ 之间有弧连接, 即 $a\to b_t$, 由引理 1, $D_{i_0-1}\Rightarrow D_l$, 因而 $D_{i_0-1}\Rightarrow D_{j_0}$. 矛盾.

2. $A$ 中任二个不同点 $x$、$y$, 在 $D-(S_0\bigcup\{x_0\})$ 中存在 $(x,y)$ 有向路.

我们只要证明在 $D-x_0$ 中存在 $k$ 条内部不交的 $(x,y)$ 有向路.

首先 $D$ 是 $k-$ 连通的, 存在 $k$ 条内部不交的 $(x,y)$ 有向路 $P_1,P_2,\cdots,P_k$. 如它们无一条通过 $x_0$, 则结论 2. 成立, 现不妨设 $P_1$ 通过 $x_0$.

根据引理 1, 可设 $|V(P_i)\bigcap D_l|\leqslant 1$, $i=1,2,\cdots,k$. 不妨设 $|V(P_i)\bigcap D_l|=1$, $i=1,2,\cdots,k_0$, $1\leqslant k_0\leqslant k$. $|V(P_i)\bigcap D_l|=0$, $k_0<i\leqslant k$. 这些 $P_1,P_2,\cdots,P_{k_0}$ 必通过 $S$. 记 $P_j$ 与 $D_l$ 的公共点为 $v_j$, $j=1,2,\cdots,k_0$. 沿 $P_j$ 把 $v_j$ 的前一个点记为 $x_j$, 后一个点记为 $u_{i_j}$, $j=1,2,\cdots,k_0$. 则 $u_{i_j}\in S$, $j=1,2,\cdots,k_0$.

如存在 $j_0\leqslant k_0$, 使 $x_{j_0}\in S$, 因 $x,y\in A$, 所以在 $V(P_{j_0}(x,x_{j_0}))\bigcap A$ 中存在一点 $w$ 控制 $S$ 中一个点 $u_t$. 由于 $b_t\to u_t$, 所以 $w$ 与 $b_t$ 之间有弧连接, 因而 $w\to b_t$, $\{w\}\Rightarrow D_l$, 我们可把 $P_{j_0}$ 改为

$$P_{j_0}'=P_{j_0}(x,w)\bigcup\{(w,v_{j_0})\}\bigcup P_{j_0}(v_{j_0},y).$$

再用 $P_{j_0}'$ 作为 $P_{j_0}$. 因而总可假设 $x_j\in\bigcup_{i=1}^{l-1}D_i$, $j=1,2,\cdots,k_0$.

由 $x_j$ 的选取可知 $\{x_j\} \Rightarrow D_j$. 根据前面假设 $b_{i_j} \to u_{i_j}$, $j = 1, 2, \cdots, k_0$. $\{i_1, i_2, \cdots, i_{k_0}\} \subseteq \{1, 2, \cdots, k\}$. 现在可把 $P_j$ 改为

$$P_j' = P_j(x, x_j) \bigcup \{(x_j, b_{i_j}), (b_{i_j}, u_{i_j})\} \bigcup P_j(u_{i_j}, y), j = 1, 2, \cdots k_0.$$

则 $P_1', P_2', \cdots, P_{k_0}', P_{k_0+1}, \cdots, P_k$ 就是 $D - x_0$ 中 $k$ 条内部不相交的 $(x,y)$ 有向路.

3. $S \bigcap S_0 = \varnothing$

如果 $S \bigcap S_0 \neq \varnothing$, 取 $u_i \in S \bigcap S_0$, $1 \leqslant i \leqslant k$, 则 $D - u_i$ 是 $(k-1)-$ 连通 Lsd, 由归纳假设 $(D - u_i) - x_0$ 是 $(k-1)-$ 连通. 在 $D - S_0 \bigcup \{x_0\}$ 中任取两点 $u$、$v$, 在 $D - \{u_i, x_0\}$ 中至少存在 $(k-1)$ 条内部不相交的 $(u,v)$ 有向路, 因 $S_0 - \{u_i\}$ 只含 $k-2$ 个点, 所以至少有一条路与 $S_0 - \{u_i\}$ 不相交, 这条路就是 $D - (S_0 \bigcup \{x_0\})$ 上的 $(u,v)$ 有向路, 这与 $D - (S_0 \bigcup \{x_0\})$ 不是强连通矛盾. 因而 $S \bigcap S_0 = \varnothing$.

4 $D_j' - (B \bigcup \{x_0\}) \neq \varnothing$

如果 $D_j' - (B \bigcup \{x_0\}) = \varnothing$, 则 $B = D_j - (D_j \bigcap S_0) \bigcup \{x_0\}$. 现记

$S_2 = \{u \mid u \in S_1'$, 在 $D - (S_0 \bigcup \{x_0\})$ 中存在从 $u$ 到 $A \bigcup B$ 和从 $A \bigcup B$ 到 $u$ 的有向路$\}$.

因为 $|S_0| = k-1$, 所以至少有一条有向路 $b_i \to u_i \to a_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ 含在 $D - (S_0 \bigcup \{x_0\})$ 中, 故 $S_2 \neq \varnothing$. 由 $A$、$B$、$S_1, S_2$ 的结构和结论 2, 在 $D - (S_0 \bigcup \{x_0\})$ 上, $A$ 中任二点之间的有向路和 $\forall\, b \in B$, 从 $b$ 到 $A$ 的有向路及 $\forall\, u \in S_2$ 从 $u$ 到 $A \bigcup B$ 和从 $A \bigcup B$ 到 $u$ 的有向路全含在 $D[A \bigcup B \bigcup S_2]$ 中. (注: $D[A \bigcup B \bigcup S_2] = D - (S_0 \bigcup \{x_0\} \bigcup (S - S_2))$), 再由结论 1. 知 $D[A \bigcup B \bigcup S_2]$ 强连通.

由于 $D - (S_0 \bigcup \{x_0\})$ 非强连通, 设第一分支为 $T_1$, 最后分支为 $T_m$, 则由 $\delta^- \geqslant 2k$、$\delta^+ \geqslant 2k$ 可得 $|T_1| \geqslant k+1$ 和 $|T_m| \geqslant k+1$. 因 $D[A \bigcup B \bigcup S_2]$ 强连通, 故 $T_1$ 与 $T_m$ 至少有一个与 $A \bigcup B \bigcup S_2$ 不相交. 因此 $(D - S_0 \bigcup \{x_0\}) - A \bigcup B \bigcup S_2$ 至少有 $k+1$ 个点. 但明显地

$$|(V(D) - S_0 \bigcup \{x_0\} \bigcup A \bigcup B \bigcup S_2| = |S - S_2| \leqslant k - 1,$$

矛盾. 这就证明了 $D_j' - (B \bigcup \{x_0\}) \neq \varnothing$.

现在由 $|S_0 \bigcap D_1| = d$ 可得 $|S_0 \bigcap \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}| \leqslant d$, 及 $|\{a_1, a_2, \cdots, a_k\} \bigcap A| \geqslant k - d$, 不妨设 $\{a_1, a_2, \cdots, a_{k-d}\} \subseteq A$. 由结论 3, $S \bigcap S_0 = \varnothing$, 可得 $\{u_1, u_2, \cdots, u_{k-d}\} \subseteq S_1'$. 因而

$$|S - S_1'| = |S| - |S_1'| \leqslant k - (k - d) = d,$$

$$|S_0 \bigcap D_j| \leqslant |S_0| - |S_0 \bigcap D_1| = k - 1 - d,$$

$$|(S-S_1')\bigcup(S_0\bigcap D_l)\bigcup\{x_0\}|\leqslant d+k-1-d+1=k.$$

由 $S_1$ 构造可知，在 $D-((S-S_1')\bigcup(S_0\bigcap D_l)\bigcup\{x_0\})$ 中，不存在从 $D_l'-(B\bigcup\{x_0\})$ $(\neq\emptyset)$ 到 $B\bigcup S_1'$ 的有向路，即 $D-((S-S_1')\bigcup(S_0\bigcap D_l)\bigcup\{x_0\})$ 非强连通，所以 $(S-S_1')\bigcup(S_0\bigcap D_l)\bigcup\{x_0\}$ 是 $D$ 的一个 $k$ 分离集，但 $D-((S-S_1')\bigcup(S-S_1')\bigcup\{x_0\})$ 的第一分支为 $(\bigcup_{i=1}^{l-1}D_i)\bigcup S_1'\bigcup B$, 其点数显然比 $D_1$ 多，这与 $D_1$ 的假设矛盾．这就证明了 $D-(S_0\bigcup\{x_0\})$ 强连通，即 $D-x_0$ 是 $k-$ 连通 Lsd. 证毕．

**定理 2**　设 $T$ 是无 2－ 回路的 $k-$ 连通 Lsd, 若 $\delta^-(T)$、$\delta^+(T)\geqslant\{\frac{3k}{2}\}$, 则 $T$ 中存在一个点 $x$, 使 $T-x$ 是 $k-$ 连通 Lsd.

证　如 $\mathcal{K}(T)\geqslant k+1$, 定理自然成立．

当 $\mathcal{K}(T)=k=2$ 时，由 [1] 中推论 4.2, 知结论成立．

下面对 $\mathcal{K}(T)=k$ 用归纳法．假设 $\mathcal{K}(T)<k$ $(k\geqslant 3)$ 时，结论成立．

现设 $T$ 是连通度为 $k$ 的 Lsd, 且 $\delta^-(T)$、$\delta^+(T)\geqslant\{\frac{3k}{2}\}$、无 2－ 回路．取 $T$ 的一个最小分离集 $S$, 使 $T-S$ 的第一分支 $T_1$ 的点数最多．设 $T-S$ 的连通分支序列为 $T_1, T_2, \cdots, T_l$, $(l\geqslant 2)$ 令

$$S=\{u_1,u_2,\cdots,u_k\},\quad |T_1|=m_1,\ |T_l|=m_l$$

则 $\forall\, a\in T_1$, $N^-(a)\subseteq T_1\bigcup S$, $d^-(a)=d^-_{T_1}(a)+d^-_s(a)$, 因 $T_1$ 是竞赛图，所以

$$\frac{m_1(m_1-1)}{2}=\varepsilon(T_1)=\sum_{a\in T_1}d^-_{T_1}(a)=\sum_{a\in T_1}(d^-(a)-d^-_s(a))\geqslant m_1(\{\frac{3k}{2}\}-k),$$

即得 $|T_1|=m_1\geqslant k+1$, 同理 $|T_l|\geqslant k+1$.

因为 $T$ 是 $k-$ 连通，所以存在互不相同的 $2k$ 个顶点 $a_i\in T_1$, $b_i\in T_l$, $(i=1,2,\cdots,k)$ 使

$$b_i\to u_i\to a_i$$

现对 $(k-1)-$ 连通 Lsd $T-u_i$, 有

$$\delta^-(T-u_i)\geqslant\delta^-(T)-1\geqslant\{\frac{3}{2}(k-1)\},$$

$$\delta^+(T-u_i)\geqslant\delta^+(T)-1\geqslant\{\frac{3}{2}(k-1)\}.$$

完全类似定理 1 的证明，对 $x\in T_l-\{b_1,b_2,\cdots,b_k\}$, $T-x$ 是 $k-$ 连通 Lsd. 证毕．

上述两个结论在某种意义下都是最好可能的．给定自然数 $k,r$.

$D_{k,r}$ 表示用完全对称有向图 $K_k^*$ 去代替长为 $r$ 的回路 $C$ 中每个顶点，并且每个 $K_k^*$ 完全控制它后面的 $K_k^*$．则 $D_{k,r}^*$ 是 $k-$ 连通 Lsd, $\delta^-=\delta^+=2k-1$, 但 $\forall\, x\in V(D_{k,r}')$, $D_{k,r}'$

$-x$ 是 $(k-1)-$ 连通 Lsd.

$D^*_{k,r}$ 表示用一个 $k-$ 正则竞赛图 $T_k$ 去代替 $r-$ 回路 $C$ 中每个顶点，且每个 $T_k$ 完全控制它后面的 $T_k$. 明显地，$D^*_{k,r}$ 是 Lsd, $3k+1$ 正则，连通度为 $2k+1$, 无 $2-$ 回路. 但 $\forall x \in V(D^*_{k,r})$, $D^*_{k,r}-x$ 是 $2k-$ 连通 Lsd.

## 参考文献


1 Jφrgen Bang-Jensen. Locally Semicomplete Digraphs: A Generalization of Tournaments. J. Graph Theory, 14 (1990); 371-390.

2 Bondy J. A and Murty U. S. R. Graph Theory with Applications. Amer Elsevier, New York; 1976.