笼，存在性，(4,5)笼，图论

⑬ 78-72

(4, 5)–笼的唯一性*

O157.5

李光春
(葛洲坝水电工程学院)

张克民 姚天行
(南京大学)

THE UNIQUENESS OF (4, 5)–CAGE

Li Guangchun
(Gezhouba Hydroelectric Engneering College)

Zhang Kemin　Yao Tianxing
(Nanjing University)

Abstract

In this paper, we prove that (4,5)–cage is unique.

1. 引言

W.T.Tutte[1, 2] 在 1966 年证明了：对任意的整数 $k \geqslant 3, g \geqslant 3$ 均存在围长为 g 的 k − 正则图 $G(k,g)$，因而解决了笼的存在性问题．但当 $k \geqslant 3, g \geqslant 5$ 时，笼的构造及唯一性问题并非易事．现在已知的围长为 5 的笼仅有 (3,5) −、(4,5) −、(5,5) −、(6,5) −、(7,5) − 笼五种[3, 4]，[3] 以计算机作为辅助手段，证明了恰有 4 个不同构的 (5,5) − 笼．而本文证明了 (4,5) − 笼的唯一性．

2. (4, 5) − 笼的构造

根据定义，(4, 5) − 笼是围长为 5，阶数尽量少的 4 − 正则图．由 [4] 给出的 (4, 5) − 笼（见图 1）知，其阶数为 19.

本文以 $d(u, v)$ 表示图中点 u, v 的距离，

$$N_k(v) = \{u \mid d(u, v) = k\},$$

其余未说明的符号同 [4].

设 G 为任一个 (4, 5) − 笼，显然 G 具有下述性质：

性质 1　当 $u \neq v$ 时，$|N(u) \cap N(v)| \leqslant 1$.

性质 2　$\forall\, v \in V(G)$，G 含有图 2 所示的子图 $T(v)$，且 $|V(T(v))| = 17$.

* 收稿日期：1993−10−27
国家自然科学基金资助项目.

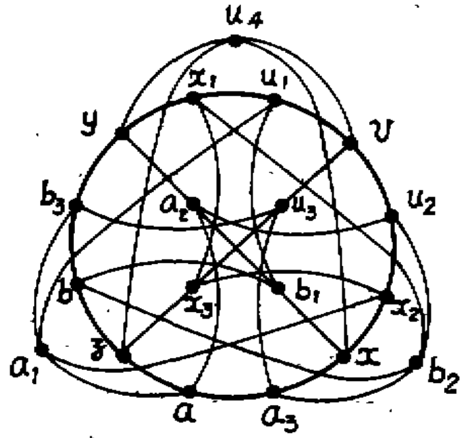

图 1

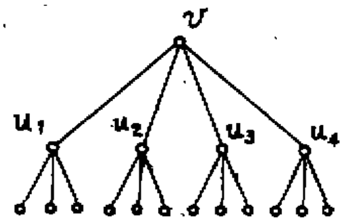

图 2

性质 3　G 的直径为 3，且对任一点 v，恰有两点 a、b，$\{a, b\} = V(G)\setminus V(T(v))$，使得 $d(v, a) = d(v, b) = 3$.

任取 $v \in V(G)$，命 $N(v) = N_1(v) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$，$V_i = N(u_i)\setminus\{v\}$，$i = 1, 2, 3, 4$. 由性质 3，下面就 $d(a, b) = 1, 2, 3$ 三种情形讨论.

情形 1.　$d(a, b) = 1$.

显然，$N_2(v)$ 中任一点不同时与 a, b 邻接，为叙述方便，把 $N_2(v)$ 中与 a(或 b) 邻接的点称为红点（或蓝点），其余点称为白点. 红点与蓝点统称为有色点，有色点之间没有边，我们有

断言 1　在 $G[N_2(v)]$ 中每个有色点的度为 2，恰与两个白点邻接.

由性质 1 知，每个白点最多与一个红点，一个蓝点邻接. 在 $N_2(v)$ 中，有色点与白点各 6 个，于是有

断言 2　每个白点恰与红、蓝、白各一点邻接.

记 $F = N_3(a)\bigcup N_3(b)$，因 $|F| \leqslant 4$，$v \notin F$，故 $N(v)$ 中至少有一点，不妨设为 u_1，使得 $u_1 \notin F$. 故 $d(u_1, a) = d(u_1, b) = 2$. 于是 V_1 中恰含红、蓝、白各一点. 由性质 1 及断言 1、2 知 $N_2(v)\setminus V_1$ 中五个白点均与 V_1 中某个点邻接. 因此，u_1 到 6 个白点的距离均小于 3. 所以，$N_3(u_1)$ 中两点均为有色点，它们不邻接. 将 u_1 代替 v，由性质 2、3 知，本情形可归结为 $d(a, b) > 1$ 的情形.

情形 2.　$d(a, b) = 3$.

红、蓝、白及有色点同上定义，并设 $V_i = \{a_i, b_i, x_i\}$，$i = 1, 2, 3, 4$. $N(a) = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$，$N(b) = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$. 显然 V_i 中恰有红、蓝、白各一点，$i = 1, 2, 3, 4$.

因每个白点最多与一个红点、一个蓝点邻接，每个有色点至少与一个白点邻接. 又因红、蓝、白各有 4 个点，故有

断言 3　每个白点恰与红、蓝、白各一点邻接，每个红（或蓝）点恰与蓝（或红）、白

各一点邻接.

由性质 1 及断言 3, 不失一般性设 x_1 与 a_2、b_3、x_4 邻接. 于是与 a_2 邻接的蓝点不属于 V_1 或 V_3, 否则将出现 4－ 圈或 3－ 圈. 故 a_2 与 b_4 邻接. 同理 b_3 与 a_4 邻接. 所以 a_4 与 b_4 不与 $N(u_1)$ 中任一点邻接, 从而有 $N_3(u_1)=\{a_4, b_4\}$. 因 $d(a_4, b_4)=2$、将 u_1 代替 v, 问题归结为 $d(a, b)=2$ 的情形.

情形 3. $d(a, b)=2$.

设 $V_i=\{a_i, b_i, x_i\}$, $i=1, 2, 3$, $V_4=\{x, y, z\}$, $N(a)=\{a_1, a_2, a_3, z\}$, $N(b)=\{b_1, b_2, b_3, z\}$. 除点 z 外, 红、蓝、白及有色点定义同情形 1. 显然在 $N_2(v)$ 中除点 z 外, 有 3 个红点, 3 个蓝点, 5 个白点. z 只能与一个白点邻接, 不妨设 z 与 x_3 邻接. 由性质 1, x_3 不能与有色点邻接, 故 x_3 与 x_1、x_2 邻接. 因 x 必与 a_3、b_3 中一点邻接, 不妨设 x 与 a_3 邻接. 同理推知 y 与 b_3 邻接. 因 x 与 a_3 邻接, 则 x 不与 a_1、a_2 邻接. 故 x 必与 $\{b_1, x_1\}$ 中一点, $\{b_2, x_2\}$ 中一点邻接, 但 x 不能同时与 x_1, x_2 邻接, 不失一般性设 x 与 b_1、x_2 均邻接. 同理可得 y 与 a_2、x_1 邻接. 因 a_1 至少与一个白点邻接, 故必与 x_2 邻接. 同理 b_2 与 x_1 邻接. 这样所有白点的邻域集均已确定.

由性质 1, a_1 不能与 b_2 邻接, 必与 b_3 邻接. 同理 b_2 与 a_3 邻接. 最后 a_2 与 b_1 邻接. 至此得到一个 (4,5)－ 笼. 由以上讨论知, 在同构意义下, (4,5)－ 笼是唯一的.

图 1 中顶点标记为情形 3 讨论中所得到的.

参 考 文 献

1 Tutte, W.T., Connectivity in graphs, University press, Toronto (1966).

2 Biggs, N., Algebraic graph theory, Combridge University press (1974).

3 杨元生、张成学, 一个新发现的(5,5)–笼及(5,5)–笼的个数, 数学研究与评论, 9(4), 1989, 628

4 Bondy, J. A. and Murty, U.S.R., 图论及其应用, 北京: 科学出版社, 1984.