最小奇圈长为 r 的无向图的本原指数集*

苗正科　　张克民
(徐州师范学院)　(南京大学)

THE EXPONENT SET OF UNDIRECTED GRAPH WITH MINIMUM ODD CYCLE LENGTH r

Miao Zhengke　　Zhang Kemin
(Xuzhou Normal College)　(Nanjing University)

Abstract

Let $\tilde{E}_{r,n}$ be the primitive exponent set of an undirected graph with order n and minimum odd cycle length r (regard loop as 1−cycle). In this paper, we show that

$$\tilde{E}_{r,n} = \{r-1, r, \cdots, 2n-r-1\} - X_r$$

where X_r is a set of zero and odd number in $[2\lfloor n/2\rfloor - r - 2, 2n-r-1]$. Furthermore, we also describe a characterization of the undirected graph with minimun odd cycle length r which primitive exponent is equal to $2n-r-1$.

§1. 引　言

有向图 D 称为本原的，如果存在一个整数 $k>0$，使得对任意两点 u,v(u,v 可以相同)，在 D 中 u 到 v 有长为 k 的有向通道．这种 k 的最小者称为 D 的本原指数或简称指数．记作 $\gamma(D)$．其它未加说明的符号，定义参见 [1].

设 $L(D)=[l_1,\cdots,l_\lambda\}$ 表示有向图 D 的初等圈长的集合．设 $i,j\in V(D)$，i 到 j 的指数，记作 $\gamma(i,j)$，是指使下述条件成立的最小整数 γ：对任意 $m\geqslant\gamma$，存在 i 到 j 的长为 m 的有向通道．

关于本原性及本原指数，下列命题是已知的：

命题 1[2]　有向图 D 本原当且仅当 D 满足下面两个条件：

(1)　D 是强连通的；

---

* 国家自然科学基金资助项目
1991 年 7 月 7 日收到.

(2) $\mathrm{g.c.d}\{l_1,\cdots,l_\lambda\}=1$, 其中 $L(D)=\{l_1,\cdots,l_\lambda\}$.

命题 2 $\gamma(D)=\max\limits_{i,j\in V(D)}\gamma(i,j)$

命题 3 设 G 是本原无向图 ,$i,j\in V(G)$, 如果存在 i 到 j 的长度分别为 k_1,k_2 的路，且 k_1,k_2 具有不同的奇偶性，则

$$\gamma(i,j)=\max\{k_1,k_2\}-1.$$

2. 主要结果

若 G 为无向图 (对称有向图), 那么 G 必含有 2－ 圈 . 由命题 1 知，如果 G 本原，则 G 连通且含有奇图 (视环为 1－ 圈). 称 G 的最小奇圈长为 G 的奇圈长 . 本文考虑奇圈长为 r 的无向图的指数，并用 $\tilde{E}_{r,n}$ 表示奇圈长为 r 的 n 阶无向图的指数集，下面二节将得到下述定理 1.

定理 1 $\tilde{E}_{r,n}=\{r-1,r,\cdots,2n-r-1\}-X_r$, 其中 X_r 为 0 和 $[2\lfloor n/2\rfloor-r+2,2n-r-1]$ 中奇数所构成的集合 .

定理 2 设 G 是奇围长为 r 的本原无向图，则 $\gamma(G)=2n-r-1$ 当且仅当 $G\simeq G_0$. (见图 1).

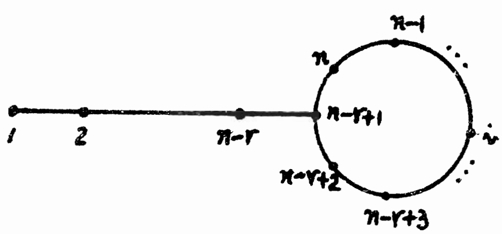

图1 G_0

证明 容易验证对任意 $i,j\in V(G_0)$, 有 $k_1,k_2\leqslant 2n-r$, 其中 k_1,k_2 分别为 i 到 j 的最短奇通道、最短偶通道的长，所以由命题 3 知 :$\gamma(G_0)\leqslant 2n-r-1$. 又因为 G_0 中点 1 到点 1 的最短奇通道长为 $2n-r$, 所以 $\gamma(1,1)=2n-r-1$. 从而 $\gamma(G_0)=2n-r-1$.

反过来，设 G 是最小奇围长为 r 的无向图，其指数 $\gamma(G)=2n-r-1$. 当 $r=n$ 时，显然 $G\simeq G_0$. 以下设 $r<n$. 设 C 为 r－ 圈 ,$\gamma(i,j)=2n-r-1$. 取 P 为 i 到 j 的最短路，长为 l. 若 $P\bigcap C\neq\varnothing$, 设 $P\bigcap C$ 的长为 l_1, 则 l 与 $(l-l_1)+(r-l_1)=l+r-2l_1$, 均为 i 到 j 的路的长，且具有不同的奇偶性，从而 $\gamma(i,j)\leqslant\max\{l+r-2l_1,l\}-1=l+r-2l_1-1\leqslant n-l_1-1\leqslant n-1<2n-r-1$, 与 $\gamma(i,j)=2n-r-1$ 矛盾 . 故 $P\bigcap C=\varnothing$. 设 P' 为 P 到 C 的最短路，其长为 l', 则 l 与 $l+2l'+r$ 是 i 到 j 的通道的长，且具有不同的奇偶性，从而由

命题 3 知

$$\begin{aligned}\gamma(i,j) &\leqslant \max\{l, l+2l'+r\}-1 = l+2l'+r-1 \\ &= 2(l+l')+r-l-1 \leqslant 2(n-r)+r-l-1 \\ &= 2n-r-1-l\end{aligned}$$

因为 $\gamma(i,j)=2n-r-1, l\geqslant 0$ 所以 $l=0$ 且上式中不等号均取等号，从而 $l'=n-r, l=0$. 故 $G\simeq G_0$.

§3 指数的确定

引理 1 $\{1,2,\cdots,n-1\}\subseteq \tilde{E}_{1,n}$.

证明 显然 $1\in\tilde{E}_{1,n}$, 对 $2\leqslant k\leqslant n-1$. 取一个直径为 k 的树 T, 令 G 为在 T 的所有点上加环后所得的图，易见 $\gamma(G)=k$. 引理得证.

引理 2 $\{2,4,\cdots,2n-2\}\subseteq \tilde{E}_{1,n}$.

证明 对 $1\leqslant k\leqslant n-1$, 作 $T=P_k * K_{1,(n-k-1)}$ 为把一个长为 $k-1$ 的路 $P_k=(1,2,\cdots,k)$ 的一端 k 和一个星形图 $K_{1,(n-k-1)}$ 的心两点合并后所得的一棵树. 令 G 为在 T 的点 1 上加环所得的图，则由命题 2, 命题 3 知 $\gamma(G)=2k$. 所以 $\{2,4,\cdots,2n-2\}\subseteq \tilde{E}_{1,n}$.

引理 3 当 $0\leqslant k-1\leqslant[n/2]-r, r\geqslant 3$ 为奇数时, $2(k-1)+r\in\tilde{E}_{r,n}$.

证明 考虑图 2 中的图 G_1. 其中 $1\leqslant k\leqslant[n/2]-r+1$.

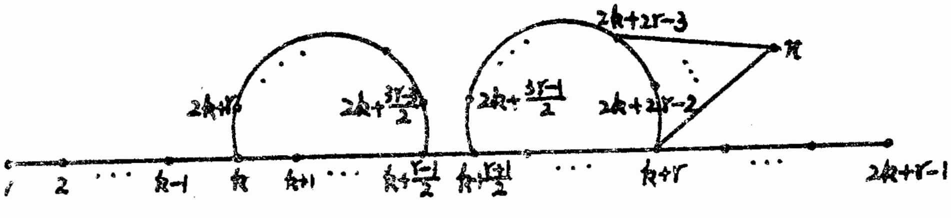

图2 G_1

令

$$V_1=\{1,2,\cdots,k+\frac{r-1}{2}, 2k+r,\cdots,2k+\frac{3r-3}{2}\}$$

$$V_2=\{k+\frac{r+1}{2},\cdots,2k+r-1, 2k+\frac{3r-1}{2},\cdots,n\}$$

当 $i,j\in V_1$ 时，易证 $\gamma(i,j)\leqslant 2(k-1)+r-1$; 同理当 $i,j\in V_2$ 时, $\gamma(i,j)\leqslant 2(k-1)+r-1$; 当 $i\in V_1, j\in V_2$ 时，则 i 到 j 有长为 $d(i,j)$ 以及 $d(i,j)+1$ 的路，故 $\gamma(i,j)\leqslant d(i,j)\leqslant 2(k-1)+r$. 从而 $\gamma(D)\leqslant 2(k-1)+r$. 又因为 $d(1,2k+r-1)=2(k-1)+r$ 所以 $\gamma(D)$

$=\gamma(1,2k+r-1)=2(k-1)+r.$

引理 4 当 $r\geqslant 3$ 为奇数时，$\{r-1,r+1,\cdots,2n-r-1\}\subseteq\tilde{E}_{r,n}$.

证明 考虑图 3 中图 G_2,G_3. 其中 $1\leqslant k\leqslant n-r$.

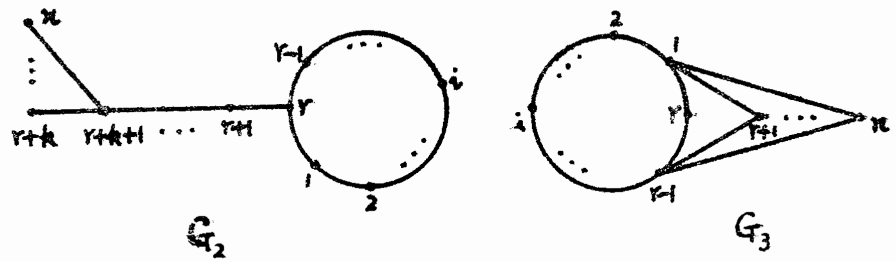

图3 G_2与G_3

容易验证 $\gamma(G_2)=2k+r-1,\gamma(G_3)=r-1$. 从而 $\{r-1,r+1,\cdots,2n-r-1\}\subseteq\tilde{E}_{r,n}$.

4. 缺数的确定及$\tilde{E}_{r,n}$的刻划

引理 5 若 k 为奇数且 $k\geqslant n$，r 为奇数且 $1\leqslant r\leqslant n$，则 $k\notin\tilde{E}_{r,n}$.

此引理证明请参阅 [3].

引理 6 设 k 为 $[2\lfloor n/2\rfloor-r+2,n-1]$ 中奇数，$r\geqslant 3$ 为奇数，则 $k\notin\tilde{E}_{r,n}$.

证明 反证法. 设存在奇围长为 $r\geqslant 3$ 的无向图 G，使得 $\gamma(G)=k$，则存在 $u,v\in V(G)$ 使得 $\gamma(u,v)=k$. 显然由命题 3，$u\neq v$.

由于 u 到 u，v 到 v 有长为 k 的有向通道，且 k 为奇数，所以在 u 到 u，v 到 v 的 $k-$ 通道上必有奇圈，分别设为 C_u,C_v. u 到 C_u. v 到 C_v 的最短路分别设为 P_u,P_v. 则

$$l(C_u)\geqslant r$$

$$l(C_v)\geqslant r$$

$$2l(P_u)+l(C_u)\leqslant k$$

$$2l(P_v)+l(C_v)\leqslant k$$

其中 $l(x)$ 表示通道 x 的长度. 我们分下列四种情形讨论：

1. $C_u\cap C_v\neq\varnothing$. 考虑图 4 中标出的四条通道. 要么 (a),(b) 所示通道长同偶，要么 (c),(d) 所示通道长同偶，从而 u 到 v 有长不超过

$$l(P_n)+l(P_v)+\frac{1}{2}(l(C_u)+l(C_v))\leqslant k$$

的偶通道，这与 $\gamma(u,v)=k$ 矛盾.

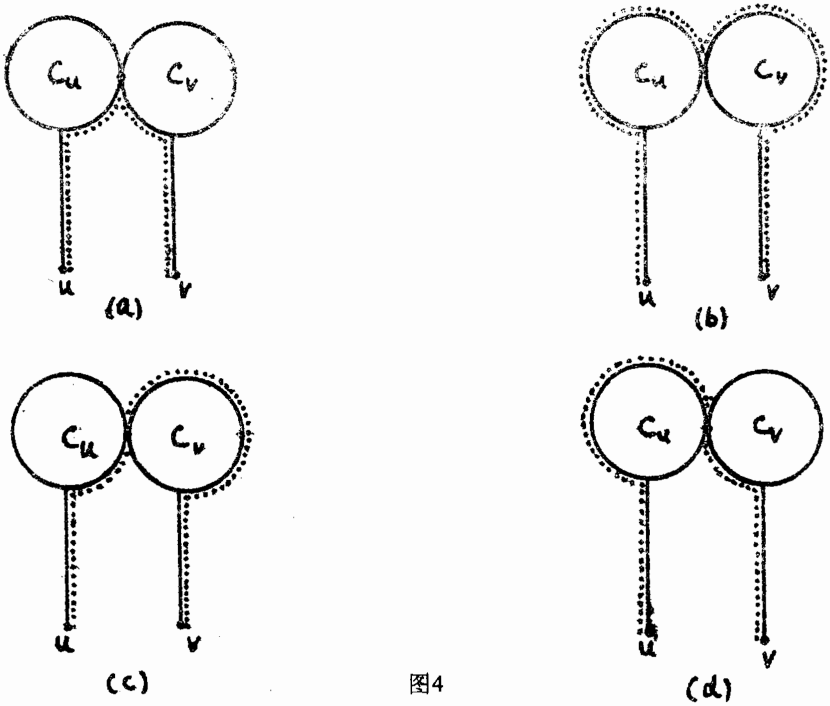

图4

2. $P_n \cap P_v \neq \phi$. 考虑图 5 中标出的三条通道

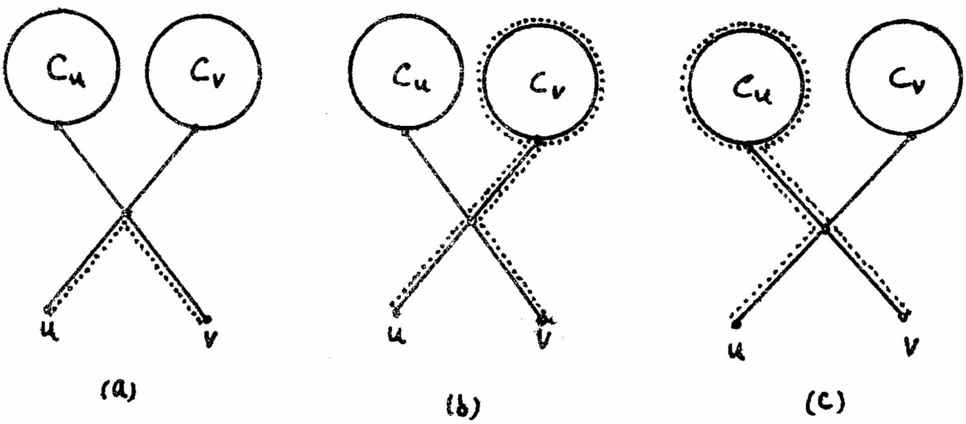

图5

如果 (a) 中所示通道是偶长的，则 u 到 v 有长不超过 $l(P_u)+l(P_v)<\frac{1}{2}(2l(P_u)+l(C_u))+\frac{1}{2}(2l(P_v)+l(C_v))\leqslant k$ 的偶通道，这与 $\gamma(u,v)=k$ 矛盾．否则 (b)、(c) 所示通道均是偶道道．从而 u 到 v 有长不超过$\frac{1}{2}(2l(P_u)+l(C_u)+2l(P_v)+l(C_v))\leqslant k$ 的偶通道，亦与 $\gamma(u,v)=k$ 矛盾．

3. $C_u \cap C_v=\phi$, $P_u \cap P_v=\phi$, $C_u \cap P_v \neq \phi$（或者 $C_v \cap P_u \neq \phi$）. 令 w 是 P_v 上最接近 v 的 $C_u \cap P_v$ 中的点．考虑图 6 中所标出的两条通道．它们之中必有一个为偶数，且

至少有 $l(C_v)$ 个点不在此通道上，故 u 到 v 有长不超过 $n-l(C_v)-1\leqslant n-r-1$ 的偶通道，从而 u 到 v 有 $(k-1)-$ 通道（因为 $n-r-1<k-1$），与 $\gamma(u,v)=k$ 矛盾．

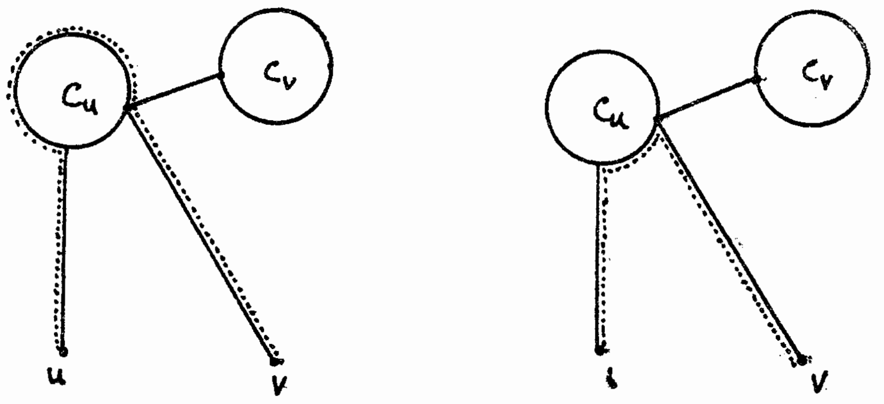

图 6

4. $(P_u\bigcup C_u)\bigcap(P_v\bigcup C_v)=\phi$．因为 G 连通，所以存在路 P，连接 $(P_u\bigcup C_u)$ 与 $(P_v\bigcup C_v)$.

4.1. P 连接 P_u 与 P_v．考虑图 7 所标出的三条通道．如果 (a) 中所示通道是偶长的，则 u 到 v 有长 $\leqslant n-2r$ 的偶路．由 $n-2r<k$ 知 u 到 v 有 $(k-1)$ 通道，与 $\gamma(u,v)=k$ 矛盾．否则 (b)、(c) 所示通道均为偶通道．此时，比较 $l(u_2P_uu_1)$ 与 $l(v_2P_vv_1)$ 的大小知 (b)、(c) 中所示通道必有一个长不超过

$$n-r+1\leqslant 2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-r+2\leqslant k,$$

从而 u 到 v 有长为 $k-1$ 的通道，与 $\gamma(u,v)=k$ 矛盾．

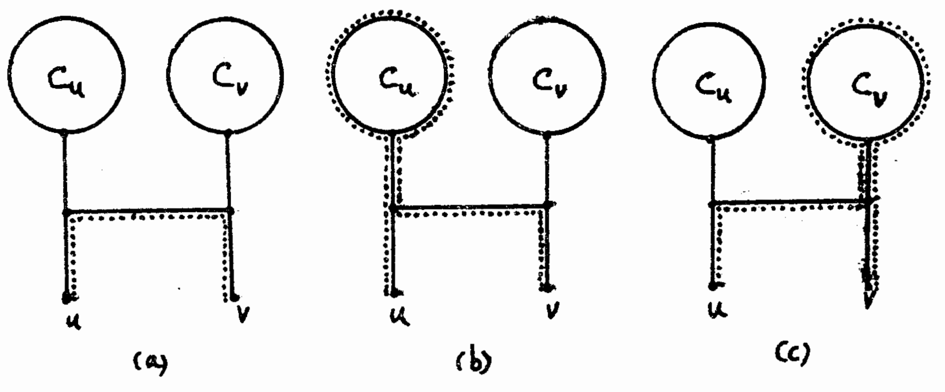

图7

4.2. P 连接 P_u 与 C_v（或 P_v 与 C_u）．这时图 8 所示的通道必有一个为偶通道，且长度 $\leqslant n-r<k$ 从而与 $\gamma(u,v)=k$ 矛盾．

4.3 P连接C_u与C_v.考虑图9所标出的四条通道.容易验证它们之中必有一条是长不超过 $n-r<k$ 的偶通道，从而 u 到 v 有长 $k-1$ 的通道．此与 $\gamma(u,v)=k$ 矛盾．

至此，完成了引理 6 的证明．

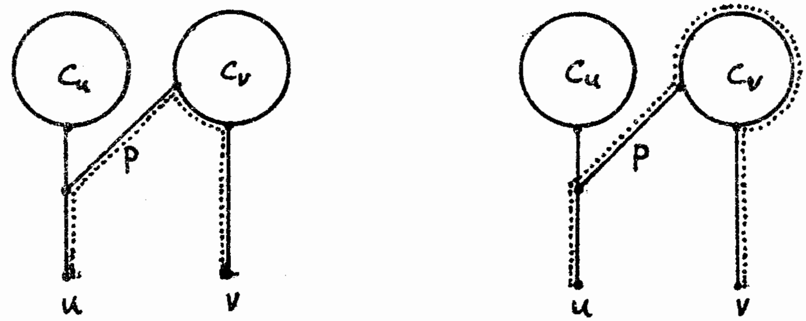

图8

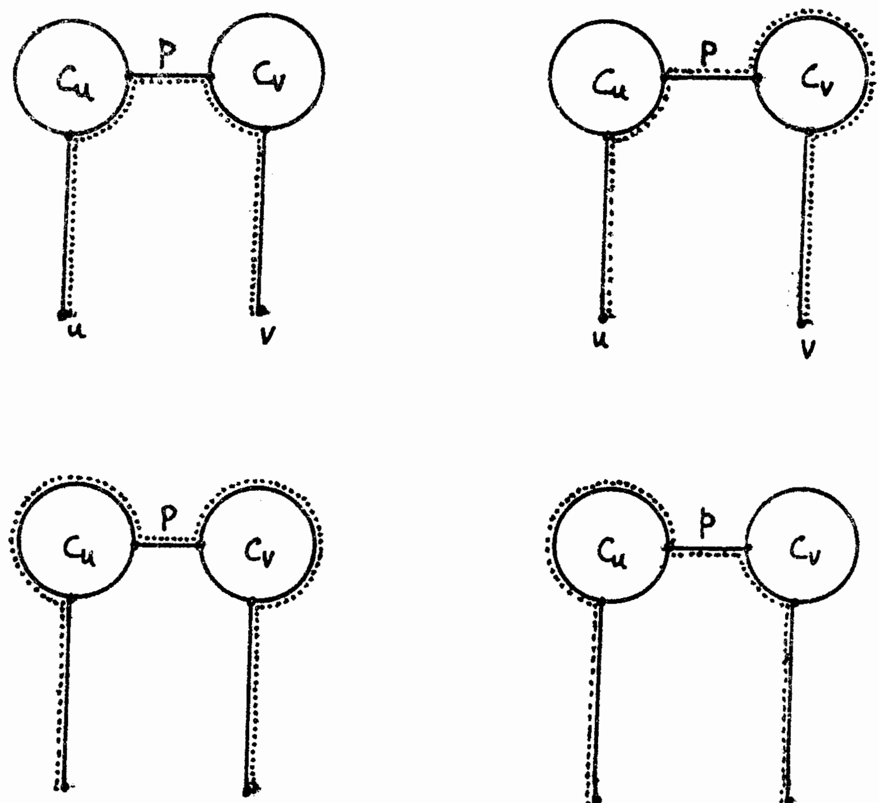

图9

下面的命题是已知的．

命题 4 设 i,j 为本原有向图 D 中的任意两点，$R\subseteq L(D)$，且 $\mathrm{g.c.d}\{x|x\in R\}=1$，记 F_R

为 R 中数的 Frobenius 数，则 $\gamma(i,j)\leqslant d_R(i,j)+F_R$. 其中 $d_R(i,j)$ 为 i 到 j 接触到以 R 中每个数为圈长的圈的最短有向通道的长.

设 G 是奇圈长为 $r(1\leqslant r\leqslant n)$ 的无向图，取 $R=\{2,r\}$, 则对任意 $u,v\in V(G)$, 要么 $d_R(u,v)=d(u,v)$, 要么 $d_R(u,v)\leqslant 2(n-r)$. 当 $d_R(u,v)=d(u,v)$ 时，设长为 $d_R(u,v)=d(u,v)$ 的 u 到 v 路与某 $r-$ 圈公共部分长为 x, 则

$$\begin{aligned}\gamma(u,v)&=(d(u,v)-x)+(r-x)-1\\&\leqslant n-r+r-x-1\\&=n-x-1\\&\leqslant n-1\\&\leqslant 2n-r-1\end{aligned}$$

当 $d_R(u,v)\leqslant 2(n-r)$ 时，由命题 4 知 $\gamma(u,v)\leqslant 2n-r-1$, 再由命题 2 得 $\gamma(G)\leqslant 2n-r-1$. 另一方面，对于 $3\leqslant r\leqslant n$, 若 $\gamma(G)\leqslant r-2$, 则对任意 $u\in V(G)$,u 到 u 有长为 $r-2$ 的通道，从而 G 有一个长不超过 $r-2$ 的奇圈. 矛盾. 故对 $1\leqslant r\leqslant n$ 有

$$\tilde{E}_{r,n}\subseteq\{r-1,r,\cdots,2n-r-1\}$$

由上式，结合引理 1 至引理 6, 即完成定理 1 的证明.

参 考 文 献

1 J.A. Bondy and U. S. R. Murty, Graph Theory with Applications, Macmillan, London, 1976.

2 A. Berman and R. J. Plemmons, Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences, Academic Press, Nwe York, 1979.

3 邵嘉裕.对称本原矩阵的指数集,中国科学, A辑, 9(1986). 931–939.