中国科学

1991 年 10 月　　A 辑　　第 10 期

Diophantine 表示中未知数的精减*

孙 智 伟

(南京大学数学系，南京 210008)

摘 要

解决 Hilbert 第十问题最艰难的一步是证明指数关系是 Diophantine（下记为“D 的”）. 在研究只有少量未知数的不定方程是否有解的判定问题时，精减 D 表示中的未知数起了很重要的作用. 本文证明了仅用三个、五个自然数未知量和四个、六个整值未知量就可分别给出 $C=\psi_B(A,1)$，($\psi_0(A,1)=0$，$\psi_1(A,1)=1$，$\psi_{m+1}(A,1)=A\psi_m(A,1)-\psi_{m-1}(A,1)$)，$W=V^B\wedge A_1,\cdots,A_k\in\square\wedge S|T\wedge R>0$ 和 $C=\psi_B(A,1)\left(假定\ 1<|B|<\frac{|A|}{2}-1\right)$，$W=V^B\wedge A_1,\cdots,A_k\in\square\wedge S|T$ 的 D 表示.

关键词：Hilbert 第十问题，Diophantine 表示，Lucas 序列，指数关系，关系组合

一、引 言

Hilbert 第十问题要求找一个算法，用它可判定(整系数)多项式不定方程是否有整数解. 根据 Lagrange 定理，这等价于问是否有可判定多项式不定方程有无自然数解的算法. 1961 年 Davis, Putnam 和 Robinson[1] 证明了每个 r. e. 集W都是指数 D 的，即可表成如下形式：

$$x\in W\Longleftrightarrow\exists x_1,\cdots,x_n\in\boldsymbol{N}(P(x,x_1,\cdots,x_n,2^{x_1},\cdots,2^{x_n})=0),$$

这儿 P 为(整系数)多项式，$\boldsymbol{N}$ 表示自然数集（非负整数集）. 由此寻求可 D 表示的指数式增长的函数便成为解决 Hilbert 第十问题的关键. 1970 年 Matijasevič[2] 成功地证明了 $y=F_{2x}$ 是 D 的，这儿 $\{F_n\}$ 为熟知的 Fibonacci 数列（$F_0=0$，$F_1=1$，$F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$）. 在这之后大家很少采用 F_{2n} 而较多地使用 $\psi_A(n)$ 的 D 表示，其中 $\psi_A(n)$ 为 Pell 方程

$$x^2-(A^2-1)y^2=1\quad(A>0)$$

的第 n 个 y 自然数解. 其实 $\{F_{2n}\}_{n\in N}$ 和 $\{\psi_A(n)\}_{n\in N}$ 都是一种特殊形式的 Lucas 序列.

定义. 设 A, B 为整数，由

$$\psi_0=0,\ \psi_1=1,\ \psi_{n+1}=A\psi_n-B\psi_{n-1}\ (n=1,2,\cdots)$$

和

$$\chi_0=2,\ \chi_1=A,\ \chi_{n+1}=A\chi_n-B\chi_{n-1}\ (n=1,2,\cdots)$$

1990 年 12 月 10 日收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目.

所给出的 $\{\psi_n\}$ ($\{\psi_n(A,B)\}$) 和 $\{\chi_n\}$ ($\{\chi_n(A,B)\}$) 都称为 Lucas 序列.

对 n 归纳易证 $\chi_n(A,B)=2\psi_{n+1}(A,B)-A\psi_n(A,B)$, $F_{2n}=\psi_n(3,1)$, $\psi_A(n)=\psi_n(2A,1)$.

如果考虑未知量个数，自然要问对怎样的 n 不存在判定 n 个未知数的多项式方程有无整数解(相应地，自然数解)的算法. 经过十余年的努力，现在最好的结果是可取 $n=27$ (相应地，$n=9$) (参看文献 [3, 4]). 我们断言对于整数解的情形还可取 $n=11$，本文正是为获此新结果而提供基础的，事实上结合本文和文献[3]中的结果已能看出 n 可以小于 27.

在精减未知数的过程中，最关键的是要减少指数式增长函数的D表示中未知量个数，并用尽量少的未知数来D表示若干关系的合取. 本文证明了摘要中所述的结果，对解的上下界也作了点探讨. 在自然数未知量的情形我们的结果比已知的要强，在整值未知量情形我们的结果比用常规方法(利用 $n\geqslant 0\Longleftrightarrow \exists u\exists v\exists w(4n+1=u^2+v^2+w^2)$，参看文献 [4,5]) 所能得到的要好得多.

本文中多项式都指整系数多项式，$\mathbf{Z}$ (或 $\mathbf{N}$) 表示整数集合(或自然数集)，拉丁字母表示整数，约束变元都用小写，$\square$ 指由完全平方构成的集，(A,B) 表示 A 和 B 的最大公因数.

二、关于 Lucas 序列的若干引理

二阶递归序列的一般形式是

$$\tau_0=C_0,\ \tau_1=C_1,\ \tau_{n+1}=A\tau_n-B\tau_{n-1}\ (n=1,2,\cdots),$$

易证这里 $\tau_n=C_0\psi_{n+1}(A,B)+(C_1-C_0A)\psi_n(A,B)$，可见 Lucas 序列 $\{\psi_n\}$ 极为基本. 下面是 Lucas 序列的几个例子:

$$\psi_n(0,1)=\begin{cases}0 & 若\ 2\mid n,\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & 若\ 2\nmid n.\end{cases}\qquad \chi_n(0,1)=\begin{cases}0 & 若\ 2\nmid n,\\ (-1)^{\frac{n}{2}}2 & 若\ 2\mid n.\end{cases}$$

$$\psi_n(1,1)=\begin{cases}1 & 若\ n\equiv 1,2\ (\mathrm{mod}\ 6),\\ 0 & 若\ 3\mid n,\\ -1 & 若\ n\equiv 4,5\ (\mathrm{mod}\ 6).\end{cases}\qquad \chi_n(1,1)=\begin{cases}2 & 若\ 6\mid n,\\ 1 & 若\ n\equiv 1,5\ (\mathrm{mod}\ 6),\\ -1 & 若\ n\equiv 2,4\ (\mathrm{mod}\ 6),\\ -2 & 若\ n\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 6).\end{cases}$$

$\psi_n(2,1)=n$, $\chi_n(2,1)=2$.

在以下引理中 $\psi_n(A,B)$, $\chi_n(A,B)$ 分别省写为 ψ_n, χ_n.

引理 1. (i) $(\alpha-\beta)\psi_n=\alpha^n-\beta^n$, $\chi_n=\alpha^n+\beta^n$ $(n\geqslant 0)$. 这里 $\alpha=\dfrac{A+\sqrt{A^2-4B}}{2}$ 和 $\beta=\dfrac{A-\sqrt{A^2-4B}}{2}$ 为二次方程 $\theta^2-A\theta+B=0$ 的两个根.

(ii) $\chi_n^2-(A^2-4B)\psi_n^2=4B^n$, $\psi_{n+1}^2-A\psi_{n+1}\psi_n+B\psi_n^2=B^n$ $(n\geqslant 0)$.

证明极易(注意 $\chi_n=2\psi_{n+1}-A\psi_n$).

引理 2. $\psi_{kn+r}=\sum\limits_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(\psi_{k+1}-A\psi_k)^{n-i}\psi_k^i\psi_{r+i}$ $(k,n,r\in\mathbf{N})$.

证. 先就 $n=1$ 的情形(对 k 归纳)证明，再利用 $k(n+1)+r=kn+(k+r)$、$(k+r)+i=k+(r+i)$ 以及 $\binom{n+1}{i}=\binom{n}{i}+\binom{n}{i-1}$ $(i\geqslant 1)$ 对 n 进行归纳.

引理 3. 设 $(A, B)=1$, 则 $(\psi_m, \psi_n)=|\psi_{(m,n)}|$ $(m, n\in\mathrm{N})$.

证. 由引理 1(ii) $(\psi_{n+1}, \psi_n)|B^n$, 而 $\psi_{n+1}\equiv A^n \pmod B$, 故 $(\psi_{n+1}, \psi_n)=1$, $(\psi_{kn+r}, \psi_n)=((\psi_{n+1}-A\psi_n)^k\psi_r, \psi_n)=(\psi_r, \psi_n)$. 由此利用 Euclid 辗转相除法即可证得 $(\psi_m,\psi_n)=|\psi_{(m,n)}|$.

引理 4. 设 $\Delta=A^2-4B\geqslant 0$. 则 $\{\psi_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ 单调不减的充要条件是 $A\geqslant 1$, 当 $A\geqslant 1$ 时 $\psi_{n+1}=\psi_n\Longleftrightarrow A=1\wedge n>0\wedge(n-1)B=0$. 因而 $\{\psi_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ 严格递增的充要条件是 $A\geqslant 2$.

证. $B>0$ 时注意使用等式 $\psi_{n+1}-\alpha\psi_n=\beta^n$.

引理 5. 设 $\Delta=A^2-4B\geqslant 0$. 则 $\{\chi_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ 单调不减的充要条件是 $A\geqslant 2$, 当 $A\geqslant 2$ 时 $\chi_{n+1}=\chi_n\Longleftrightarrow A=2\wedge n(B-1)=0$. 因而 $\{\chi_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ 严格递增当且仅当 $A\geqslant 3$.

证. 注意使用引理 1(ii) 和引理 4.

引理 6. 设 $M\neq 0$, 则 $(B, M)=1$ 当且仅当存在正整数 λ 使得

$$\psi_\lambda\equiv 0 \pmod M \text{ 且 } \psi_{\lambda+1}\equiv 1 \pmod M.$$

$(B, M)=1$ 时还可要求 $\lambda\leqslant M^2$.

证. "$\Leftarrow$": 将 $\psi_{\lambda+1}^2-A\psi_{\lambda+1}\psi_\lambda+B\psi_\lambda^2=B^\lambda$ 两边模 M.

"$\Rightarrow$": 在本证明中, 对整数 ζ, 我们用 $\bar\zeta$ 表示 ζ 的模 $|M|$ 最小非负剩余. 由于

$$\{\langle\bar\psi_i, \bar\psi_{i+1}\rangle: i=0, 1, \cdots, M^2\}\subseteq\{\langle s, t\rangle: s, t=0, 1, \cdots, |M|-1\},$$

必存在 i, j 使得 $0\leqslant i<j\leqslant M^2$ 并且 $\langle\bar\psi_i, \bar\psi_{i+1}\rangle=\langle\bar\psi_j, \bar\psi_{j+1}\rangle$. 取 λ 为最小的正整数 j 使有 $i<j$ $(i\geqslant 0)$ 满足 $\langle\bar\psi_i, \bar\psi_{i+1}\rangle=\langle\bar\psi_j, \bar\psi_{j+1}\rangle$, 则 λ 不超过 M^2 并且相应的 i 等于零 (若 $i>0$, 则

$$\langle\overline{B\psi_{i-1}}, \overline{B\psi_i}\rangle=\langle\overline{A\psi_i-\psi_{i+1}}, \overline{B\psi_i}\rangle=\langle\overline{A\psi_\lambda-\psi_{\lambda+1}}, \overline{B\psi_\lambda}\rangle=\langle\overline{B\psi_{\lambda-1}}, \overline{B\psi_\lambda}\rangle,$$

从而 $\langle\bar\psi_{i-1}, \bar\psi_i\rangle=\langle\bar\psi_{\lambda-1}, \bar\psi_\lambda\rangle$ (因为 $(B, M)=1$), 这与 λ 的最小性相矛盾).

引理 7. 设 $A\neq 0$, $(A, B)=1$, $\Delta=A^2-4B\geqslant 0$. 则 $\psi_k^2|\psi_m\Longleftrightarrow k\psi_k|m$ $(k, m\in\mathrm{N})$, 除非 $|A|=1$, $(k-2)B=0$ 且 $k\nmid m$.

证. 注意 $\psi_{kn}\equiv n\psi_{k+1}^{n-1}\psi_k \pmod{\psi_k^2}$, $|\psi_n|=|\psi_n(|A|, B)|=\psi_n(|A|, B)$. $|A|=1\wedge(k-2)B=0\wedge k\nmid m$ 不成立时 $\psi_k|\psi_m\Longrightarrow k|m$.

引理 8. 设 $A>B\geqslant 0$, 则 $(A-B)^n\leqslant\psi_{n+1}\leqslant A^n$ $(n\in\mathrm{N})$.

证. $A\geqslant B+1\geqslant 2\sqrt{B}$, 于是依引理 4 可得

$$(A-B)\psi_{n+1}\leqslant\psi_{n+2}=A\psi_{n+1}-B\psi_n\leqslant A\psi_{n+1}.$$

引理 9. 设 $A\geqslant 2$, 则有

$$Y^2=(A^2-4)X^2+4\wedge X\geqslant 0\wedge Y\geqslant 0\Longleftrightarrow\exists n\in\mathrm{N}\ (X=\psi_n(A, 1)\wedge Y=\chi_n(A, 1)).$$

$$X^2-AXY+Y^2=1\wedge Y\geqslant X\geqslant 0\Longleftrightarrow\exists n\in\mathrm{N}\ (X=\psi_n(A, 1)\wedge Y=\psi_{n+1}(A, 1)).$$

证. "$\Leftarrow$": 利用引理 1、引理 4 和引理 5.

"$\Rightarrow$": 先对 $X\geqslant 0$ 归纳证明下式

$$Y^2=(A^2-4)X^2+4\wedge Y\geqslant 0\Rightarrow\exists n\in\mathrm{N}\ (X=\psi_n(A, 1)\wedge Y=\chi_n(A, 1)). \qquad (*)$$

$X=0$ 时上式是显然的(因为 $0=\psi_0(A, 1)$, $2=\chi_0(A, 1)$).

假定 $X>0$ 且 (*) 式对更小的 X 已成立. 设 $Y\geqslant 0$ 满足 $Y^2=(A^2-4)X^2+4$. 显

然 $Y \equiv AX \pmod 2$，$A^2X^2 \geqslant Y^2$，$A^2Y^2 \geqslant (A^2-4)^2X^2$，于是 $X' = \frac{AX-Y}{2}$ 和 $Y' = \frac{AY-(A^2-4)X}{2} = 2X - AX'$ 均为自然数。易见 $X' < X$（因为 $Y^2 > (A-2)^2X^2$），$(A^2-4)X'^2 + 4 - Y'^2 = (A^2-4)X^2 + 4 - Y^2 = 0$。根据归纳假定有 $n \in \mathrm{N}$ 使得 $X' = \psi_n(A,1)$ 且 $Y' = \chi_n(A,1)$，于是

$$X = \frac{1}{2}(AX'+Y') = \frac{1}{2}(A\psi_n(A,1)+\chi_n(A,1)) = \psi_{n+1}(A,1),$$

$$Y = AX - 2X' = A\psi_{n+1}(A,1) - 2\psi_n(A,1) = 2\psi_{n+2}(A,1) - A\psi_{n+1}(A,1) = \chi_{n+1}(A,1).$$

由上(*)式对所有 $X \geqslant 0$ 均成立，这就证明了引理中前一式的"⇒"部分。

今假定 $X^2 - AXY + Y^2 = 1$，$Y \geqslant X \geqslant 0$。由 $AY \geqslant AX \geqslant 2X$ 及 $(AY-2X)^2 = (A^2-4)Y^2 + 4$ 可知存在 $k \in \mathrm{N}$ 使得

$$\begin{cases} AY - 2X = \chi_k(A,1) = 2\psi_{k+1}(A,1) - A\psi_k(A,1), \\ Y = \psi_k(A,1), \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} X = -(\psi_{k+1}(A,1) - A\psi_k(A,1)), \\ Y = \psi_k(A,1). \end{cases}$$

因 $X \geqslant 0$，故 $k > 0$。令 $n = k-1$，则 $X = \psi_n(A,1)$，$Y = \psi_{n+1}(A,1)$。"⇒"部分证完。

注. 对于 $B \neq 0, 1$，B^n 随 n 变动而且是 n 的指数函数。对固定的 $n \in \mathrm{N}$，$y^2 - (A^2-4B)x^2 = 4B^n$ 在 $A^2 - 4B \in \mathrm{N}\backslash\square$ 时有无穷多组解（$x = \psi_n(A,B)$，$y = \chi_n(A,B)$ 是一解），但其通解很难明确地给出。

我们指出，在一些特殊情形（如 A 为正偶数且 $B = 1$）下引理 1—9 或多或少地被前人探讨过（参看文献 [6, 7]）。

三、主要结果

从引理 9 和其后的注可知 Lucas 序列 $\{\psi_n(A,1)\}_{n>0}$ 在 D 表示中是重要的。对于这种 $B = 1$ 的情形，我们还可用同样的递推关系把 Lucas 序列下标扩展到全体整数。$A \neq 0$ 时 $\psi_k = \psi_k(A,1)$ 和 $\chi_k = \chi_k(A,1)$ $(k \in \mathrm{Z})$ 也可由下式决定：

$$\psi_{-1} = -1,\ \psi_1 = 1,\ \psi_{m-1} + \psi_{m+1} = A\psi_m\ (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots);$$

$$\chi_{-1} = \chi_1 = A,\ \chi_{m-1} + \chi_{m+1} = A\chi_m\ (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

归纳易证 $\psi_{-n}(A,1) = -\psi_n(A,1) = (-1)^n\psi_n(-A,1)$，$\chi_{-n}(A,1) = \chi_n(A,1) = (-1)^n \cdot \chi_n(-A,1)$。可见 $\psi_m(|A|,1) = \psi_m(A,1)$ 或 $\psi_{-m}(A,1)$[1)]，再利用引理 9 即得 $(A^2-4) \cdot X^2 + 4 \in \square \Longleftrightarrow \exists m(X = \psi_m(A,1))$。

针对 $B = 1$ 这种特殊情形，我们还有

引理 10. 设 $|A| > 2$，$n > 3$ 且 $2 \mid \chi_n(A,1)$，则

$$\psi_s(A,1) \equiv \psi_t(A,1) \left(\bmod \frac{\chi_n(A,1)}{2}\right) \Longleftrightarrow s \equiv t \pmod{4n} \vee s + t \equiv 2n \pmod{4n}.$$

---

1) $\psi_m(-A,1) = (-1)^m\psi_{-m}(A,1) = (-1)^{m-1}\psi_m(A,1)$.

证. 对 $k\in\mathbb{N}$ 归纳易证 $\phi_{k+r}(A,1)=\phi_r(A,1)\chi_k(A,1)+\phi_{k-r}(A,1)$, 于是对任何 r 均有

$$\phi_{n+r}(A,1)\equiv\phi_{n-r}(A,1),\ \phi_{2n+r}(A,1)\equiv\phi_{-r}(A,1)=-\phi_r(A,1),$$
$$\phi_{4n+r}(A,1)\equiv-\phi_{2n+r}(A,1)\equiv\phi_r(A,1)\qquad(\mathrm{mod}\ \chi_n(A,1)).$$

由此可见 $\phi_{4nq+r}(A,1)\equiv\phi_r(A,1)\left(\mathrm{mod}\,\frac{\chi_n(A,1)}{2}\right)$, 而且整数 $\phi_0(A,1),\ \phi_1(A,1),\cdots,\ \phi_{4n-1}(A,1)$ 依次与下面的数同余 $\mathrm{mod}\,\frac{\chi_n(A,1)}{2}$:

$$0,\phi_1(A,1),\cdots,\phi_{n-1}(A,1),\phi_n(A,1),\phi_{n-1}(A,1),\cdots,\phi_1(A,1),$$
$$0,-\phi_1(A,1),\cdots,-\phi_{n-1}(A,1),-\phi_n(A,1),-\phi_{n-1}(A,1),\cdots,-\phi_1(A,1).$$

由于 $|\chi_n(A,1)|=|\chi_n(|A|,1)|$, $\{\phi_i(A,1),-\phi_i(A,1)\}=\{\phi_i(|A|,1),-\phi_i(|A|,1)\}$ 我们只需就 $A=|A|>2$ 的情形证明

$$0,\phi_1,-\phi_1,\phi_2,-\phi_2,\cdots,\phi_n,-\phi_n$$

$\mathrm{mod}\,\frac{\chi_n}{2}$ 互不同余,这里 $\phi_i=\phi_i(A,1)$, $\chi_i=\chi_i(A,1)$.

$0,\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_n$ $\mathrm{mod}\,\frac{\chi_n}{2}$ 互不同余,因为

$$0<\phi_1<\phi_2<\cdots<\phi_n,\quad \chi_n>\left(\frac{A+\sqrt{A^2-4}}{2}\right)^n-\left(\frac{A-\sqrt{A^2-4}}{2}\right)^n$$
$$=\sqrt{A^2-4}\,\phi_n\geqslant\sqrt{5}\,\phi_n>2\phi_n.$$

如果 $1\leqslant s,\ t<n$, 则 $\phi_s+\phi_t\not\equiv0\left(\mathrm{mod}\,\frac{\chi_n}{2}\right)$, 因为

$$\phi_n=\frac{A+\sqrt{A^2-4}}{2}\phi_{n-1}+\left(\frac{A-\sqrt{A^2-4}}{2}\right)^{n-1}$$
$$>\frac{A+\sqrt{A^2-4}}{2}\phi_{n-1}\geqslant\frac{3+\sqrt{5}}{2}\phi_{n-1},$$
$$0<\phi_s+\phi_t\leqslant2\phi_{n-1}\leqslant\frac{4}{3+\sqrt{5}}\phi_n<\frac{4}{3+\sqrt{5}}\cdot\frac{\chi_n}{\sqrt{5}}\leqslant\frac{\chi_n}{2}.$$

设 $1\leqslant r\leqslant n$. 因为 $0<\phi_n+\phi_r\leqslant2\phi_n<\chi_n$, 故有

$$\phi_n+\phi_r\equiv0\left(\mathrm{mod}\,\frac{\chi_n}{2}\right)\Rightarrow\phi_n+\phi_r=\frac{\chi_n}{2}.$$

如果 $1\leqslant r<n-2$, 则 $\phi_n+\phi_r\not\equiv0\left(\mathrm{mod}\,\frac{\chi_n}{2}\right)$, 因为

$$\phi_n>\frac{3+\sqrt{5}}{2}\phi_{n-1}>\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2\phi_{n-2}>\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^3\phi_{n-3},$$
$$\phi_n+\phi_r\leqslant\phi_n+\phi_{n-3}<\left(1+\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{-3}\right)\phi_n\leqslant\frac{\sqrt{5}}{2}\phi_n<\frac{\chi_n}{2}.$$

由上我们只需再证

(a) $\phi_n+\phi_n\neq\frac{\chi_n}{2}$, (b) $\phi_n+\phi_{n-1}\neq\frac{\chi_n}{2}$, (c) $\phi_n+\phi_{n-2}\neq\frac{\chi_n}{2}$.

由于 $|(20-A^2)\psi_n^2|\geqslant\psi_n^2\geqslant\psi_2^2=A^2>4$，(a) 成立，因为

$$4\neq(20-A^2)\psi_n^2=(4\psi_n)^2-(A^2-4)\psi_n^2,\ \chi_n\neq 4\psi_n.$$

如果 (b) 不成立，则 $\chi_n=2\psi_n+(A\psi_n-\chi_n)$ 从而得不可能之式：

$$(A+2)^2\psi_n^2=4(A^2-4)\psi_n^2+16,\ (3A-10)(A+2)\psi_n^2+16=0.$$

如果 (c) 不成立，则有

$$\chi_n=2A\psi_{n-1}=A(A\psi_n-\chi_n),\ (A^2\psi_n)^2=(A+1)^2((A^2-4)\psi_n^2+4),$$

$$((2A+1)(A+1)(A-3)-1)\psi_n^2+4(A+1)^2=0.$$

由于 $\psi_n>\psi_3=A^2-1\geqslant 8$，不论 $A=3$ 还是 $A>3$ 上式都不真.

综上引理 10 得证.

引理 11. $K>0\wedge M\in\square\backslash\{0\}\Longleftrightarrow\exists z>0\ ((z-KM)^2=K^2M)$，对 z 还可附加要求 $KM\leqslant z\leqslant 2KM$.

证. 假设 $z>0$ 满足 $(z-KM)^2=K^2M$. 显然 $K\neq0, M\neq0, K|z, M=\left(\dfrac{z}{K}-M\right)^2\in\square$. 若 $K<0$ 则得 $M\geqslant(-1-M)^2>M^2\geqslant M$.

如果 $K>0$ 且 $M=m^2\ (m>0)$，取 $z=K(m^2+m)$.

现在我们给出

定理 1. 设 $A>2, B\geqslant 0$. 则

$$C=\psi_B(A,1)\Longleftrightarrow C\geqslant B\wedge\exists x>0\exists y>0\ (DFI\in\square)$$

$$\Longleftrightarrow\exists x,y,z>0\ ((z-DFI(C-B+1))^2=DFI(C-B+1)^2),$$

这里 $D=(A^2-4)C^2+4,\ E=C^2Dx,\ F=4(A^2-4)E^2+1,$

$G=1+CDF-2(A+2)(A-2)^2E^2,\ H=C+BF+(2y-1)CF,$

$I=(G^2-1)H^2+1.$

$B\neq0$ 时对任给 $N>0$ 我们还可要求

$$N\leqslant x\leqslant A^{16N^2C^4D^2-1},\ N\leqslant y\leqslant(2CDF)^{B+2CNF^2-1},\ N\leqslant z\leqslant 2CDFI,\ N^2\leqslant DFI.$$

证[1]. a) 假设 $x\neq0$ 和 y 使得 $DFI\in\square$. 考虑到 $|A|>2$，我们有 $D\geqslant4>0, F>0$，$G\neq0$（因为 $G\equiv1\ (\mathrm{mod}\ D)$），$I>0$；$F\equiv G\equiv I\equiv1\ (\mathrm{mod}\ D)$，$(D,F)=(D,I)=1$；$H\equiv C$，$2G\equiv A$，$4I=((2G)^2-4)H^2+4\equiv(A^2-4)C^2+4=D\ (\mathrm{mod}\ F)$，$(4I,F)=(D,F)=1$. 可见 D,F,I 为两两互素的正整数，故由 $DFI\in\square$ 可得 $D,F,I\in\square$.

由于 $(A^2-4)C^2+4,\ (A^2-4)(4E)^2+4,\ ((2G)^2-4)H^2+4\in\square$，存在 s,m,t 使得 $C=\psi_s(A,1),\ 4E=\psi_m(A,1),\ H=\psi_t(2G,1)$.

假定 $C\neq0$. 令 $n=|m|$，则 $n>3$，因为

$$|4E|=4C^2D|x|\geqslant D\geqslant A^2-4+4>A^2-1$$

$$=|\psi_3(A,1)|>|\psi_2(A,1)|>|\psi_1(A,1)|>0.$$

显然 $4F=(A^2-4)\psi_m^2(A,1)+4=(A^2-4)\psi_n^2(A,1)+4=\chi_n^2(A,1)$，故 $2|\chi_n(A,1)$.
由于 $2G\equiv A, H\equiv C(\mathrm{mod}\ F)$，我们有（注意利用引理 10）

$$\psi_s(A,1)\equiv\psi_t(2G,1)\equiv\psi_t(A,1)\left(\mathrm{mod}\ \frac{\chi_n(A,1)}{2}\right),\ s\equiv t\ \text{或}\ -t\ (\mathrm{mod}\ 2n).$$

1）为便于仿此证明定理 2，我们先使用较宽松的条件（如 $|A|>2$）作推导.

由 $C^2|E$ 可得 $\psi_{t|s|}^2(A,1)|\psi_n(A,1)$，利用引理 7 又得 $\psi_t(A,1)|n$，于是 $s\equiv t$ 或 $-t(\bmod 2\psi_t(A,1))$。因为 $F\equiv 1$，$2G\equiv 2$，$H\equiv B\ (\bmod 2C)$，故

$$B\equiv\psi_t(2G,1)\equiv\psi_t(2,1)=t\equiv s \text{ 或 } -s(\bmod 2\psi_t(A,1)).$$

如果 $|B|\leqslant|C|$，则必 $|s|=|B|$，因为

$$|s|\neq|B|\Rightarrow 0<|B\pm s|\leqslant|B|+|s|<2|\psi_t(A,1)|.$$

由上可见，若 $C\geqslant B(\geqslant 0)$ 且有 $x,y>0$ 使得 $DFI\in\square$，则必 $C=\psi_B(A,1)$。($C=0$ 时 $C=B=0=\psi_B(A,1)$；$C\neq 0$ 时 $C>0$，$0<s\neq -B$（注意 $A>2$，$B\geqslant 0$））。

b) 假定 $C=\psi_B(A,1)\neq 0$。由于 $|A|>2$，$D>0$。任给 $N>0$，依引理 6 存在 n 使得 $0<n\leqslant(4NC^2D)^2$ 并且 $\psi_n(A,1)\equiv\psi_0(A,1)=0\ (\bmod 4NC^2D)$。令 $x=\dfrac{\psi_n(A,1)}{4C^2D}$，则 $N|x$ 且 $x\neq 0$（注意 $|\psi_n(A,1)|=\psi_n(|A|,1)\geqslant n>0$)。让 $E=C^2Dx=\dfrac{\psi_n(A,1)}{4}$，$F=4(A^2-4)E^2+1=\dfrac{\chi_n^2(A,1)}{4}$，$G=1+CDF-2(A+2)(A-2)^2E^2$。由引理 6 知存在正整数 $\lambda\leqslant F^2$ 使得 $\psi_\lambda(A,1)\equiv 0$，$\psi_{\lambda+1}(A,1)\equiv 1\ (\bmod F)$，从而对任何 i,j 均有

$$i\equiv j\,(\bmod\lambda)\Rightarrow\psi_i(A,1)\equiv\psi_j(A,1)\,(\bmod F).$$

若 $\lambda>F$ 就让 $\lambda=\lambda N$，否则取 $\lambda=\lambda NF$。令 $j=B+2\lambda C$，$H=\psi_j(2G,1)$。由于 $2G\equiv A\ (\bmod F)$，$G\equiv 1\ (\bmod C)$，$F\equiv 1(\bmod 2C)$，我们有

$$\begin{aligned}&H\equiv\psi_j(A,1)\equiv\psi_B(A,1)=C\equiv C+(B-C)F\ (\bmod F),\\&H\equiv\psi_j(2,1)=j\equiv B\equiv C+(B-C)F\ (\bmod 2C),\\&2CF|H-(C+(B-C)F).\end{aligned}$$

令 $y=\dfrac{H-C-(B-C)F}{2CF}$，则 $H=C+BF+(2y-1)CF$。再让 $I=(G^2-1)H^2+1$，则有

$$D=(A^2-4)\psi_B^2(A,1)+4=\chi_B^2(A,1),\quad F=\left(\frac{\chi_n(A,1)}{2}\right)^2,$$

$$I=\frac{1}{4}(((2G)^2-4)\psi_j^2(2G,1)+4)=\left(\frac{\chi_j(2G,1)}{2}\right)^2,$$

可见 $DFI\in\square$。

因为 $A>2$，$B\geqslant 0$，故 $C=\psi_B(A,1)\geqslant B$。若 $B=0$，取 $x=y=N$ 则得 $DFI=4\times 1\times 1=2^2$。现设 $B\neq 0$，于是 $C\geqslant B>0$。如上选取 x,y，则 $DFI\in\square$。显然

$$0<N\leqslant x\leqslant\psi_n(A,1)\leqslant A^{n-1}\leqslant A^{16N^2C^4D^2-1}.$$

因为 $E\neq 0$，$F>1$，$1\leqslant G\leqslant CDF$，$1<\lambda\leqslant F^2$，$NF<\lambda\leqslant NF^2$，$H\geqslant j\geqslant B+2(NF+1)C$，$y\leqslant\dfrac{H+CF}{2CF}<H+1$，所以

$$0<N\leqslant y\leqslant H=\psi_j(2G,1)\leqslant(2G)^{j-1}\leqslant(2CDF)^{B+2CNF^2-1}.$$

由于 $A>2$，$2G\geqslant 2$，$B>0$，$j\geqslant 0$。我们有

$$\chi_B(A,1)\cdot\frac{\chi_n(A,1)}{2}\cdot\frac{\chi_j(2G,1)}{2}\geqslant\chi_0(A,1)\cdot\frac{\chi_n(A,1)}{2}\cdot\frac{\chi_0(2G,1)}{2}=\chi_n(A,1)$$

$$> \left(\frac{A+\sqrt{A^2-4}}{2}\right)^n - \left(\frac{A-\sqrt{A^2-4}}{2}\right)^n$$
$$= \sqrt{A^2-4}\,\psi_n(A,1) \geqslant \psi_n(A,1) \geqslant x \geqslant N,$$

可见 $DFI \geqslant N^2 > 0$. 依引理 11 我们可取到 $z > 0$ 使得

$$(z - DFI(C-B+1))^2 = DFI(C-B+1)^2$$

并且 $$N^2 \leqslant DFI(C-B+1) \leqslant z \leqslant 2DFI(C-B+1) \leqslant 2CDFI.$$

综合 a), b) 并注意利用引理 11, 定理 1 获证.

注. 设 $A > 2$, $B \geqslant 0$. Matijasevič 曾考虑过用自然数未知量来给出 $C = \psi_B(A, 1)$ 的 D 表示，但其方法甚为复杂，且所用的未知量相当多. 对于 A 为偶数的情形，Matijasevič 和 Robinson[6] 从理论上证明了仅用三个自然数未知量便可 D 表示 $C = \psi_B(A, 1)$. 我们的定理 1 仅用三个正整数未知量就明确地给出 $C = \psi_B(A, 1)$（A 不必限定为偶数）的 D 表示（若想用自然数未知量，可以 $x+1$, $y+1$, $z+1$ 分别替换 x, y, z.）. 不仅如此，定理 1 还表明存在 Kalmar 初等函数 φ，使得 $B \neq 0$ 时对任给 $N > 0$，可附加要求 $N \leqslant x, y, z \leqslant \varphi(A, B, C, N)$.

为方便起见，以下提到 D, F, I 时其表达式均如定理 1 中给出的那样.

引理 12. (i) $K \neq 0$ 时 $K \mid L \wedge M \in \square \Longleftrightarrow \exists z\ ((Kz+L)^2 = K^2M)$.

(ii) $X \neq 0 \Longleftrightarrow \exists u \exists v\ (X = (2u-1)(3v-1))$.

证. (i) 是显然的，关于 (ii) 可参看文献[4].

定理 2. 设 $2 < 2|B| < |A| - 2$, 则

$$C = \psi_B(A,1) \Longleftrightarrow A-2 \mid C-B \wedge \exists x \neq 0 \exists y (DFI \in \square)$$
$$\Longleftrightarrow \exists u, v, y, z((A-2)z + C - B)^2 = (A-2)^2 DF'I').$$

这里 F', I' 是将 F, I 中的 x 换以 $(2u-1)(3v-1)$ 而得的.

证. 根据引理 12 我们只需就第一个“$\Longleftrightarrow$”来证明.

“$\Rightarrow$”: 假设 $C = \psi_B(A, 1)$，于是 $C \equiv \psi_B(2, 1) = B \pmod{A-2}$. 因为 $1 < |3| < |A| - 2 \leqslant |A-2|$，故 $C \neq 0$. 象定理 1 证明过程 b) 中那样选取 x, y，则有 $x \neq 0$, $DFI \in \square$.

“$\Leftarrow$”: 假定 $A - 2 \mid C - B$ 而且 $x \neq 0$ 和 y 使得 $DFI \in \square$. 依定理 1 证明过程 a)，存在 s 使得 $C = \psi_s(A, 1)$. 显然

$$0 < |B| - 1 < |B| < |B| + 1 < 2|B| < |A| - 2 \leqslant |A-2|,$$
$$B \equiv C \equiv \psi_s(2,1) = s \pmod{A-2},\ C \neq 0,\ |s| > 1,\ s \neq -B,$$
$$|B| < |A| = |\psi_2(A,1)| \leqslant \psi_s(A,1)| = |C|.$$

再依定理 1 证明过程 a) 可得 $|s| = |B|$，故 $s = B$, $C = \psi_B(A, 1)$.

注. 以前没有人直接用整值未知量给出过 $C = \psi_B(A, 1)$ 的 D 表示.

为处理带指数关系的关系组合，我们需要

引理 13. 设 $B > 0$，则

$$V^{B-1}\psi_B(A,1) \equiv 1 + V^2 + \cdots + V^{2(B-1)} \pmod{AV - V^2 - 1}.$$

证. 对 B 归纳即得.

引理 14. 设 $B > 0$, $|V| > 1$. 若有 A 满足 $|A| \geqslant \max\{V^{4B}, W^4\}$ 和

$$(V^2-1)W\psi_B(A,1)\equiv V(W^2-1)\ (\bmod\ AV-V^2-1), \qquad (**)$$

则必有 $W=V^B$.

证. 设 $|A|\geqslant\max\{V^{4B},W^4\}$ 且 (**) 式成立，利用引理 13 可得

$$V^B(W^2-1)\equiv V^{B-1}(V^2-1)W\psi_B(A,1)\equiv W(V^{2B}-1)\ (\bmod\ AV-V^2-1),$$

$$(V^BW+1)(W-V^B)\equiv 0\ (\bmod\ AV-V^2-1).$$

由于 $|A|^{\frac{1}{4}}\geqslant|V|^B\geqslant 2,\ 1+|A|^{\frac{1}{4}}+|A|^{\frac{1}{2}}\leqslant|A|^{\frac{3}{4}}-1<|A|^{\frac{3}{4}}$，我们有

$$\begin{aligned}|(V^BW+1)(W-V^B)|&\leqslant 2|A|^{\frac{1}{4}}(1+|A|^{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}})<2|A|^{\frac{1}{4}}(|A|^{\frac{3}{4}}-|A|^{\frac{1}{4}})\\&=2|A|-2|A|^{\frac{1}{2}}\leqslant|V||A|-2V^2\\&\leqslant|AV|-(V^2+1)\leqslant|AV-V^2-1|,\end{aligned}$$

从而必有 $(V^BW+1)(W-V^B)=0$. 显然 $W\neq 0$, $|V^BW|\geqslant 2$, 故 $W=V^B$. 证毕.

注. 类似于引理 14 的第一个结果属于 Robinson 和 Jones (根据 Robinson 的想法, Jones[9] 证明了 $B,V,W>0$ 时 $W=V^B$ 当且仅当有偶数 $A>\max\{2V^{3B},2W^3\}$ 满足(**)式).

引理 15. 令 $Q(x,y,m)=4m(mx+2)x^3y^2+1$ 并设 $MX>0$.

(i) 如果 $Q(X,Y,M)\in\square$, 则 $Y=0$ 或者 $|Y|>|X|^{|X|}$.

(ii) 任给 $N>0$, 存在 Y 使得 $Q(X,Y,M)\in\square$ 并且

$$Y\equiv L\ (\bmod\ M),\ N\leqslant Y\leqslant(2MX+2)^{2(|M|+N)|X|-1}.$$

证. i) 设 $Y\neq 0$ 满足 $Q(X,Y,M)\in\square$, 于是有 $n>0$ 使得

$$2|XY|=\psi_n(2MX+2,1),\ 0\equiv\psi_n(2,1)=n\ (\bmod\ 2X),\ n\geqslant 2|X|.$$

(注意 $((2MX+2)^2-4)(2|XY|)^2+4\in\square$). $|X|=1$ 时 $2|Y|\geqslant\psi_2(2MX+2,1)>2$, $|X|\geqslant 2$ 时 $2|XY|\geqslant(2MX+1)^{n-1}>(2|X|)^{|X|+1}\geqslant 2|X|\cdot|X|^{|X|}$. 可见 $|Y|>|X|^{|X|}$.

ii) 取 $Y=\psi_{2KX}(2MX+2,1)/(2X)$, 这里 K 满足 $M\mid K-L$, $N\leqslant K<N+|M|$. (注意 $\psi_{2KX}(2MX+2,1)\equiv\psi_{2KX}(2,1)=2KX\equiv 2LX\ (\bmod\ 2MX)$).

注. 该引理有点类似于文献[8]中的指数级第二引理，但这里的多项式 Q 比文献 [8] 中的 V 更为简明.

引理 16. $S\neq 0$ 时

$$A_1,\cdots,A_k\in\square\wedge S\mid T\wedge R>0\Longleftrightarrow\exists n\geqslant 0(M_k(A_1,\cdots,A_k,S,T,R,n)=0),$$

这里

$$\begin{aligned}M_k(A_1,\cdots,A_k,S,T,R,n)=\prod(&S^2n+T^2-S^2(2R-1)\\&\cdot(T^2+W^k\pm\sqrt{A_1}W^0\pm\cdots\pm\sqrt{A_k}W^{k-1}))\end{aligned}$$

$\left(W=1+\sum_{i=1}^{k}A_i^2,\ \prod\text{过所有的正负号配置}\right)$. 事实上我们还可要求

$$W^k\leqslant n\leqslant(2R-1)(T^2+W^k+A_1+A_2W+\cdots+A_kW^{k-1}).$$

证. 引理的前一部分即为文献[8]中的关系组合定理，后一部分是显然的.

关于带指数关系的关系组合，我们有

定理 3. 存在 (整系数) 多项式 P_k 和 Kalmar 初等函数 φ_k 使得只要 $B>1$, $S\neq 0$, $|V|>1$ 就有

$$W=V^B\wedge A_1,\cdots,A_k\in\square\wedge S\mid T\wedge R>0$$

$$\Longleftrightarrow \exists n, w \geqslant 0\ \exists x, y, z > 0$$
$$(P_k(A_1, \cdots, A_k, S, T, R, W, V, B, n, w, x, y, z) = 0).$$

任给 $N > 0$，我们还可进一步要求

$$N \leqslant n, w, x, y, z \leqslant \varphi_k(A_1, \cdots, A_k, |S|, |T|, R, |W|, |V|, B, N).$$

证．设多项式 Q, M_i 由引理 15，16 所给出．令

$$P_k(A_1, \cdots, A_k, S, T, R, W, V, B, n, w, x, y, z)$$
$$= M_{k+2}(DFI, Q(X, A, M), A_1, \cdots, A_k, (AV - V^2 - 1)S, U, R, n),$$

其中 $X = 2B + V^2 + W^2$, $M = S^2V^2$, $A = V + zM$, $U = ((V^2 - 1)WC - V(W^2 - 1))S + (AV - V^2 - 1)T$, $C = B + w$（关于 D, F, I，参看定理 1）．下证 P_k 符合要求（初等函数 φ_k 的存在可从下面的证明中看出）．

假定 $B > 1$, $S \neq 0$, $|V| > 1$．因 $S \neq 0$, $AV - V^2 = zS^2V^3 \neq 1$，故 $(AV - V^2 - 1)S \neq 0$, $(AV - V^2 - 1, S) = 1$，从而

$$(AV - V^2 - 1)S|U \Longleftrightarrow S|T \wedge AV - V^2 - 1|(V^2 - 1)WC - V(W^2 - 1).$$

由于 $A \neq 0$, $B > 1$，从引理 15(i) 可得

$$Q(X, A, M) \in \square \Rightarrow |A| > X^X \geqslant \max\{V^{4B}, W^4\}.$$

由此利用引理 16、定理 1 和引理 14 易证"$\Leftarrow$"部分．

下设 $W = V^B$, $A_1, \cdots, A_k \in \square$, $S|T$, $R > 0$．任给 $N > 0$, $K = V + (B + N)S^2V^2 > 0$．依引理 15(ii) 有 z 使得 $Q(X, A, M) \in \square$，并且

$$K \leqslant A \leqslant (2MX + 2)^{2(M+K)X-1},\ 2 < B + N \leqslant z \leqslant A \leqslant (2MX + 2)^{2(M+K)X-1}.$$

令 $w = \psi_B(A, 1) - B$，则 $N \leqslant w \leqslant A^{B-1}$（因为 $B + N \leqslant A = \psi_2(A, 1) \leqslant \psi_B(A, 1) \leqslant A^{B-1}$）．依定理 1 存在 $x, y > 0$ 使得 $DFI \in \square$ 并且

$$N \leqslant x \leqslant A^{16N^2C^4D^2-1},\ N \leqslant y \leqslant (2CDF)^{B+2CNF^2-1},\ N^2 \leqslant DFI$$

（其中 $C = B + w = \psi_B(A, 1) \leqslant A^{B-1}$）．由于 $S|T$, $W = V^B$，利用引理 13 可得 $(AV - V^2 - 1)S|U$．根据引理 16 存在 $n \geqslant 0$ 使得

$$M_{k+2}(DFI, Q(X, A, M), A_1, \cdots, A_k, (AV - V^2 - 1)S, U, R, n) = 0,$$

并且 $N \leqslant N^2 \leqslant DFI \leqslant \overline{W}^{k+2} \leqslant n \leqslant (2R - 1)(U^2 + \overline{W}^{k+2} + DFI + Q(X, A, M)\overline{W} + A_1\overline{W}^2 + \cdots + A_k\overline{W}^{k+1})$，其中 $\overline{W} = 1 + D^2F^2I^2 + Q^2(X, A, M) + \sum_{i=1}^{k} A_i^2$．定理证完．

注．D表示 $W = V^B(B, V > 1, W > 0)$ 时可只用五个自然数未知量是已知的[8,9]，但以前的两种方法都证明不了定理 3．具体地说，若不增加未知量个数，用文献 [8] 中办法无法将 $R > 0$ 再组合进去（作为合取项）（文献[8]中已用了不等式 $E2$），用 Robinson 指出的办法（参看文献[9]）无法将 $S|T$ 再组合进去（V 奇 A 偶时 $AV - V^2 - 1$ 为偶数，它与偶的 S 不互素）．

引理 17．存在（整系数）多项式 H_k 使得 $S \neq 0$ 时

$$A_1, \cdots, A_k \in \square \wedge S|T \Longleftrightarrow \exists z(H_k(A_1, \cdots, A_k, S, T, z) = 0).$$

证．设 $J_k(A_1, \cdots, A_k, x) = \prod(x \pm \sqrt{A_1} \pm \sqrt{A_2}W \pm \cdots \pm \sqrt{A_k}W^{k-1})$
$$= x^{2^k} + C_1x^{2^k-1} + \cdots + C_{2^k-1}x + C_{2^k},$$

其中 $W = 1 + \sum_{i=1}^{k} A_i^2$，$\prod$过所有可能的正负号配置．令

$$H_k(A_1, \cdots, A_k, S, T, z) = (Sz + T)^{2k} + C_1 S(Sz + T)^{2k-1} + \cdots + C_{2k-1} S^{2k-1}(Sz + T) + C_{2k} S^{2k}.$$

易见 $J_k(A_1, \cdots, A_k, x)$ 的有理零点均为整零点，从而 $S \neq 0$ 时

$$A_1, \cdots, A_k \in \square \wedge S | T \overset{[8]}{\Longleftrightarrow} \exists x(J_k(A_1, \cdots, A_k, x) = 0) \wedge S | T \Longleftrightarrow \exists z(H_k(A_1, \cdots, A_k, S, T, z) = 0).$$

定理 4. 存在(整系数)多项式 Q_k 使得 $B > 1, S \neq 0$ 且 $|V| > 1$ 时

$$W = V^B \wedge A_1, \cdots, A_k \in \square \wedge S | T$$
$$\Longleftrightarrow \exists x \neq 0 \exists m, w, y, z(Q_k(A_1, \cdots, A_k, S, T, W, V, B, m, w, x, y, z) = 0)$$
$$\Longleftrightarrow \exists m, w, u, v, y, z(Q_k(A_1, \cdots, A_k, S, T, W, V, B, m, w, (2u - 1)(3v - 1), y, z) = 0).$$

(取 $A_1 = \cdots = A_k = S = T = 1$ 可知仅用六个整值未知数就可 D 表示出 $W = V^B$).

证. 设多项式 Q, H_i 由引理 15, 17 所给出．令

$$Q_k(A_1, \cdots, A_k, S, T, W, V, B, m, w, x, y, z) = H_{k+2}(DFI, Q(X, A, M), A_1, \cdots, A_k, (AV - V^2 - 1)S, U, m),$$

这里 X, A, M, D, F, I, U 的表达式都同定理 3 证明中的一样，但其中 $C = B + w(A - 2)$. 考虑到 $|A| > X^X \Rightarrow |A| > \max\{V^{4B}, W^4\} \wedge 2 < 2B < |A| - 2$，仿照定理 3 证明可证 Q_k 符合要求(注意利用定理 2 和引理 12, 17).

注. 直接用整值未知数来 D 表示指数关系在此是第一次，用文献[4]中那样的常规方法至少需要 15 个(整值)未知数.

导师莫绍揆教授对本文的写作给予了直接的指导和鼓励，在此表示衷心的感谢.

参 考 文 献

[1] Davis, M. et al., *Ann. Math.*, 74(1961), 425—436.
[2] Matijasevič. Ju V., *Soviet Math. Doklady*, 11(1970), 354—358.
[3] Jones, J P., *J. Symbolic Logic*, 47(1982), 549—571.
[4] Tung Shih Ping, *Japan. J. Math.*, 11(1985), 203—232.
[5] Robinson, R. M., *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2(1951), 279—284.
[6] Davis, M., *Amer. Math. Monthly*, 80(1973), 233—269.
[7] 莫绍揆，递归论，科学出版社，北京，1987，97—106。
[8] Matijasevič, Ju. V. & Robinson, J., *Acta Arith.*, 27(1975), 521—553.
[9] Jones, J. P., *ibid.*, 35(1979), 209—221.