数 学 年 刊
13A: 6(1992), 722—727.

Huhn 和 Megyesi 的两个问题的解答*

孙 智 伟
(南京大学数学系，南京 210008)

提 要

本文解决了 Huhn 和 Megyesi 提出的关于不相交剩余类的两个公开问题.

本文用 $a(n)$ 表示剩余类 $\{x\in\mathbf{Z}: x\equiv a(\bmod n)\}$. 设 $A=\{a_i(n_i)\}_{i=1}^k$ 为剩余类系，如果对任何 $i, j(1\leqslant i, j\leqslant k)$ 要么 $i=j$，要么 $a_i(n_i)\cap a_j(n_j)=\varnothing$，则称 A 是不相交的；如果 $\bigcup_{i=1}^k a_i(n_i)=\mathbf{Z}$，则说 A 是个(同余)覆盖系. 显然剩余类系 A 是不相交覆盖系当且仅当它是 $\mathbf{Z}$ 的一个分划. 设 $n_1, \cdots, n_k\in\mathbf{Z}^+$，如果存在整数 $a_1, \cdots, a_k$ 使得 $\{a_i(n_i)\}_{i=1}^k$ 不相交，则称 $n_1, \cdots, n_k$ 是调和的(术语"调和"出自于 Huhn 和 Megyesi 的文[1]).

下面这两个引理是很基本的.

引理 1 $a_1(n_1)\cap a_2(n_2)\neq\varnothing\Leftrightarrow(n_1, n_2)\mid(a_1-a_2)$(本文用 (m, n) 表示正整数 m 和 n 的最大公因数).

证 "$\Rightarrow$"：设 $x\in a_1(n_1)\cap a_2(n_2)$，则 $a_1\equiv x\equiv a_2(\bmod (n_1, n_2))$.

"$\Leftarrow$"：由于 $(n_1, n_2)\mid(a_1-a_2)$，有整数 y 满足

$$n_1y\equiv a_2-a_1(\bmod n_2).$$

令 $x=a_1+n_1y$，则 $x\in a_1(n_1)\cap a_2(n_2)$.

引理 2 a) $n_1, \cdots, n_k$ 调和时 $\sum_{i=1}^k\frac{1}{n_i}\leqslant 1$.

b) $\{a_i(n_i)\}_{i=1}^k$ 为覆盖系时 $\sum_{i=1}^k\frac{1}{n_i}\geqslant 1$.

c) $n_1, \cdots, n_k$ 构成某不相交覆盖系的模当且仅当 $n_1, \cdots, n_k$ 调和且 $\sum_{i=1}^k\frac{1}{n_i}=1$.

证 设 $N\in\mathbf{Z}^+$ 是 $n, \cdots, n_k$ 的公倍数，考虑 $0, 1, \cdots, N-1$ 中被 $a_1(n_1), \cdots, a_k(n_k)$ 所覆盖的数的个数即得欲证.

Š. Znám 教授在给作者的一封信中指出，什么样的 $n_1, \cdots, n_k$ 可构成某个不相交覆盖系的模是个很迷人的未解决问题. 在[2]中我们证明了不相交覆盖系 $A=\{a_i(n_i)\}_{i=1}^k$ 的模 $n_1, \cdots, n_k$ 必满足如下条件：令 $n_0=1$. 任给大于 1 的正整数 d，要么 $d\nmid n_i$ 对每个 $i=1, \cdots, k$ 成立，要么 $n_1, \cdots, n_k$ 中至少有 $\min\limits_{\substack{0\leqslant i\leqslant k\\ d\nmid n_i}}\frac{d}{(d, n_i)}$ ($\geqslant d$ 的最小素因子) 个是 d 的倍

本文 1990 年 4 月 3 日收到，1991 年 4 月 2 日收到修改稿.
* 国家自然科学基金资助的课题.

数. 由引理 2c), Znám 问题可化为 $n_1, \cdots, n_k$ 何时调和的问题.

1982 年 A. P. Huhn 和 L. Megyesi 研究了 $n_1, \cdots, n_k$ 调和的条件, 并提出如下两个未解决问题.

问题 1 下面的条件(A)是 $n_1, \cdots, n_k$ 调和的充分条件吗?([1]中已证明了必要性.)

(A) 对任何至少含两个元素的 $R\subseteq\{1, \cdots, k\}$. 均有

$$(*)\qquad \sum_{i\in R}\frac{1}{\tilde{n}_i(R)}\leqslant 1,$$

这儿 $\tilde{n}_i(R)=(n_i, [n_j]_{j\in R-\{i\}})=[(n_i, n_j)]_{j\in R-\{i\}}$ 符号[ ]用来表示最小公倍数).

问题 2 $\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i}\leqslant 1$ 时下述条件(B)是 $n_1, \cdots, n_k$ 调和的充要条件吗?

(B) 对任何至少含两个元素的 $R\subseteq\{1, \cdots, k\}$ 都存在 $i, j\in R$. $i\neq j$ 使得 $(n_i, n_j)\geqslant |R|$ ($|R|$ 表示 R 的基数).

本文将解决这两个问题. 对 $k\leqslant 4$ 我们通过定出 $n_1, \cdots, n_k$ 不调和的充要条件来回答问题 1, 2. 对于 $k\geqslant 5$, 将用例子来说明当 $\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i}\leqslant 1$ 时条件(A)、(B)合在一来还不能保证 $n_1, \cdots, n_k$ 调和.

设 $A=\{a_i(n_i)\}_{i=1}^{k}$ 为覆盖系, 如果 $A_s=\{a_i(n_i)\}_{\substack{i=1\\i\neq s}}^{k}$ 也是覆盖系, 则说 $a_s(n_s)$ (在 A 中)是多余的. 其中每个剩余类均不多余的覆盖系叫做无多余覆盖系.

引理 3 (i) $\{a_1(n_1)\}$ 为(无多余)覆盖系 $\Leftrightarrow n_1=1$.

(ii) $\{a_1(n_1), a_2(n_2)\}$ 为无多余覆盖系 $\Leftrightarrow n_1=n_2=2$ 且 $a_1\not\equiv a_2 \pmod 2$.

(iii) $\{a_i(n_i)\}_{i=1}^{3}(n_1\leqslant n_2\leqslant n_3)$ 为无多余覆盖系的充要条件是: 或有 $n_1=n_2=n_3=3$ 且 a_1, a_2, a_3 过 3 完全系; 或有 $n_1=2$, $n_2=n_3=4$ 且 $a_2, a_3\not\equiv a_1 \pmod 2$, $a_2\not\equiv a_3 \pmod 4$.

证 (i)是显然的. 利用引理 2b) 易得(ii). 今考虑(iii), 充分性是显然的, 现证必要性. 设 $A=\{a_i(n_i)\}_{i=1}^{3}(n_1\leqslant n_2\leqslant n_3)$ 为无多余覆盖余, 易见 $n_1, n_2, n_3\geqslant 2$. 如果 $n_1\geqslant 3$, 则因 $1\leqslant\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}\leqslant\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ 而有 $n_1=n_2=n_3=3$, 这时 a_1, a_2, a_3 必过 3 完全系. 今设 $n_1=2$, n_2 必不等于 2(否则与 A 是无多余覆盖系矛盾), 也不等于 3(依[3]中定理 1, $n_1(=2), n_2, n_3$ 都不能被 $d=3$ 整除). 因此 $n_3\geqslant n_2\geqslant 4$. 由于 $\frac{1}{2}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}\geqslant 1$, 必 $n_2=n_3=4$, 于是 $A=\{a_1(2), a_2(4), a_3(4)\}$. 显然 $a_2, a_3\not\equiv a_1 \pmod 2$, $a_2\not\equiv a_3 \pmod 4$ $\left(\text{不然 } A \text{ 不构成覆盖}\left(\text{注意 } \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\ngeqslant 1\right)\right)$.

定理 1 (1) n_1 调和. (2) n_1, n_2 不调和 $\Leftrightarrow (n_1, n_2)=1$.

(3) n_1, n_2, n_3 不调和 $\Leftrightarrow$ 有 $i, j\in\{1, 2, 3\}$, $i\neq j$ 使得 $(n_i, n_j)=1$ 或者 $(n_1, n_2)=(n_1, n_3)=(n_2, n_3)=2$.

(4) n_1, n_2, n_3, n_4 不调和的充要条件是下述的(4.1)、(4.2)、(4.3)、(4.4)中至少有一个成立.

(4.1) 有 $i, j\in\{1, 2, 3, 4\}$, $i\neq j$ 使得 $(n_i, n_j)=1$.

(4.2) 有两两不同的 $i_1, i_2, i_3\in\{1, 2, 3, 4\}$ 使得

$$(n_{i_1}, n_{i_2})=(n_{i_1}, n_{i_3})=(n_{i_2}, n_{i_3})=2.$$

(4.3) 对任何不同的 i, $j\in\{1, 2, 3, 4\}$ 均有 $(n_i, n_j)=3$.

(4.4) 有 1, 2, 3, 4 的置换 i_1, i_2, i_3, i_4 使得

$$(n_{i_1}, n_{i_2})=(n_{i_1}, n_{i_3})=(n_{i_1}, n_{i_4})=2 \text{ 且 } (n_{i_2}, n_{i_3})=(n_{i_2}, n_{i_4})=(n_{i_3}, n_{i_4})=4.$$

证　由定义, (1)成立. 由引理 1 立得(2). 今考虑(3).

"$\Leftarrow$": 若有 i, $j\in\{1, 2, 3\}$, $i\neq j$ 使得 $(n_i, n_j)=1$, 则 n_i, n_j 不调和, 从而 n_1, n_2, n_3 不调和. 如果 $(n_1, n_2)=(n_1, n_3)=(n_2, n_3)=2$, 则对任何 a_1, a_2, $a_3\in\mathbf{Z}$ 总有不同的 i, j 使得 $a_i\equiv a_j \pmod 2$, 从而 $(n_i, n_j)\mid(a_i-a_j)$, $a_i(n_i)\cap a_j(n_j)\neq\varnothing$, 因此 n_1, n_2, n_3 不调和.

"$\Rightarrow$": 设 n_1, n_2, n_3 不调和且 $i\neq j$ 时 $(n_i, n_j)>1$. 对任何的 a_1, $a_2\in\mathbf{Z}$ 有

$$(n_1, n_2)\nmid(a_1-a_2)\Rightarrow \text{不存在 } a_3\in\mathbf{Z} \text{ 使得}\begin{cases} a_3\not\equiv a_1(\bmod\,(n_1, n_3))\\ a_3\not\equiv a_2(\bmod\,(n_2, n_3))\end{cases}\text{成立(由引理 1)}$$

$$\Rightarrow\{a_i((n_i, n_3))\}_{i=1}^{2} \text{ 为无多余覆盖系(注意 } (n_i, n_3)>1)$$

$$\Rightarrow(n_1, n_3)=(n_2, n_3)=2 \text{ 且 } a_1\not\equiv a_2 \pmod 2 \text{(由引理 3)}$$

让 $a_1=0$, $a_2=1$, 则 $(n_1, n_2)\nmid(a_1-a_2)$, 从而由上应有 $(n_1, n_3)=(n_2, n_3)=2$. 再取 $a_1=0$, $a_2=2$, 则 $a_1\equiv a_2 \pmod 2$, 从而由上能有 $(n_1, n_2)\nmid(a_1-a_2)$, 于是 $(n_1, n_2)\mid(0-2)$, 因而 $(n_1, n_2)=2$.

现在来证明(4). 由(2)、(3)可知(4.1)、(4.2)均可推出 n_1, n_2, n_3, n_4 不调和. 由引理 1 易见 n_1, n_2, n_3, n_4 调和时(4.3)和(4.4)都不成立. 因此充分性正确, 下证必要性.

设 n_1, n_2, n_3, n_4 不调和且(4.1)、(4.2)不成立, 则对任何的 a_1, a_2, $a_3\in\mathbf{Z}$ 均有

$$(**)\begin{cases}(n_1, n_2)\nmid(a_1-a_2)\\(n_1, n_3)\nmid(a_1-a_3)\\(n_2, n_3)\nmid(a_2-a_3)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\{a_i((n_i, n_4))\}_{i=1}^{3} \text{ 为覆盖系(因为 } n_1, n_2, n_3, n_4 \text{ 不调和)}$$

$\Rightarrow$有不同的 i_1, $i_2\in\{1, 2, 3\}$ 使得 $\{a_{i_1}((n_{i_1}, n_4)), a_{i_2}((n_{i_2}, n_4))\}$ 为无多余覆盖系, 或者 $\{a_i((n_i, n_4))\}_{i=1}^{3}$ 为无多余覆盖系 (注意 $i\neq j$ 时 $(n_i, n_j)>1$)

$\Rightarrow$下面的 ①、②、③ 中至少有一个成立(由引理 3).

① 有 1, 2, 3 的置换 i_1, i_2, i_3 使得

$$(n_{i_1}, n_4)=(n_{i_2}, n_4)=2 \text{ 且 } a_{i_1}\not\equiv a_{i_2} \pmod 2.$$

② $(n_1, n_4)=(n_2, n_4)=(n_3, n_4)=3$ 且 a_1, a_2, a_3 过模 3 的完全系.

③ 有 1, 2, 3 的置换 i_1, i_2, i_3 使得

$$(n_{i_1}, n_4)=2,\ (n_{i_2}, n_4)=(n_{i_3}, n_4)=4,$$

并且 $$a_{i_2}, a_{i_3}\not\equiv a_{i_1} \pmod 2,\ a_{i_2}\not\equiv a_{i_3} \pmod 4.$$

因为(4.1)、(4.2)不成立, 由(3)知 n_1, n_2, n_3 调和, 于是存在整数 a_1, a_2, a_3 使(**)成立, 从而由上可知下述三种情形中至少有一个发生.

情形 1　有 1, 2, 3 的置换 i_1, i_2, i_3 使得 $(n_{i_1}, n_4)=(n_{i_2}, n_4)=2$.

此时必 $(n_{i_1}, n_{i_2})>2$ (因为(4.1)、(4.2)不成立). 令 $a_{i_1}=0$, $a_{i_2}=2$, $a_{i_3}=1$. 则(**)成立(注意 $i\neq j$ 时 $(n_i, n_j)>1$), 从而 ①、②、③ 中至少有一个成立. 在现在的情形下 ②、③ 显

然不成立. 若$(n_{i_2}, n_4)\neq 2$, 则 ① 也不成立, 因为 $a_{i_2}=0\equiv 2=a_{i_3}(\bmod 2)$. 可见必有$(n_{i_2}, n_4)=2$.

由于(4.1)、(4.2)不成立, (n_{i_1}, n_{i_2})、(n_{i_1}, n_{i_3})、(n_{i_2}, n_{i_3})全大于 2. 对于 $a_{i_1}=0$, $a_{i_2}=4$, $a_{i_3}=2$, ①、②、③ 全不成立(注意 $0\equiv 4\equiv 2(\bmod 2)$), 从而(**)不能成立, 于是必$(n_{i_1}, n_{i_2})\mid(0-4)$. 但$(n_{i_1}, n_{i_2})>2$, 故$(n_{i_1}, n_{i_2})=4$. 类似可证$(n_{i_1}, n_{i_3})=(n_{i_2}, n_{i_3})=4$. 由上可见(4.4)成立.

情形 2　$(n_1, n_4)=(n_2, n_4)=(n_3, n_4)=3$.

这时 3 整除每个 n_i. 令 $a_1=0$, $a_2=3$, $a_3=1$, 则 ①、②、③ 均不成立(注意 $a_1=0\equiv 3=a_2(\bmod 3)$), 从而(**)不真, 于是必$(n_1, n_2)\mid(0-3)$(注意 $3\mid(n_1, n_3)$, $3\mid(n_2, n_3)$). 而 $3\mid(n_1, n_2)$, 故$(n_1, n_2)=3$. 类似易证$(n_1, n_3)=(n_2, n_3)=3$. 因此(4.3)成立.

情形 3　有 1, 2, 3 的置换 i_1, i_2, i_3 使得

$$(n_{i_1}, n_4)=2,\ (n_{i_2}, n_4)=(n_{i_3}, n_4)=4.$$

这时 2 整除 n_{i_1}, 4 整除 n_{i_2}, n_{i_3}, n_4. 令 $a_{i_1}=0$, $a_{i_2}=1$, $a_{i_3}=5$, 则 ①、②、③ 都不成立(注意 $a_{i_2}=1\equiv 5=a_{i_3}(\bmod 4)$), 从而不能有(**)式, 于是必$(n_{i_2}, n_{i_3})\mid(1-5)$. 因为 $4\mid n_{i_2}$, $4\mid n_{i_3}$, 故有$(n_{i_2}, n_{i_3})=4$.

取 $a_{i_1}=0$, $a_{i_2}=2$, $a_{i_3}=1$, 则 ①、②、③ 全不成立(注意 $a_{i_2}=2\equiv 0=a_{i_1}(\bmod 2)$), 从而(**)不真, 故必$(n_{i_1}, n_{i_2})\mid(0-2)$, $(n_{i_1}, n_{i_2})=2$. 类似可证$(n_{i_1}, n_{i_3})=2$. 于是(4.4)成立.

综上, 定理 1 获证.

推论 1　$k\leqslant 4$ 时条件(A)是 $n_1, \cdots, n_k$ 调和的充分条件, 从而是充要条件([1]中已证了必要性). $k\leqslant 3$ 时条件(B)是 $n_1, \cdots, n_k$ 调和的充要条件, 当 $k=4$ 时 (B) 连同 $\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i}<1$ 为 $n_1, \cdots, n_k$ 调和的必要条件但不是充分条件.

证　如果 $k\leqslant 3$, 则用定理 1 易证

$$\text{条件(B)不成立}\Leftrightarrow n_1, \cdots, n_k\text{ 不调和}\Rightarrow\text{条件(A)不成立}.$$

下设 $k=4$, 假若(B)不成立, 则有至少含两个元素的 $R\subseteq\{1, 2, 3, 4\}$ 使得对任何不同的 i, $j\in R$ 均有$(n_i, n_j)<|R|$, 取基数最小的这样的 R.

如果$|R|=2$, 则对 R 中的两个元 i, j 有$(n_i, n_j)=1$, 从而定理 1 中的(4.1)成立, 于是 n_1, n_2, n_3, n_4 不调和.

如果$|R|=3$, 则由 R 的选取知对 R 的三个元素 i_1, i_2, i_3 有

$$(n_{i_1}, n_{i_2})=(n_{i_1}, n_{i_3})=(n_{i_2}, n_{i_3})=2,$$

从而定理 1 中的(4.2)成立, 于是 n_1, n_2, n_3, n_4 不调和.

如果$|R|=4$, 则 $R=\{1, 2, 3, 4\}$且 $i\neq j$ 时$(n_i, n_j)<4$. 由 R 的基数最小性可知(4.1)、(4.2)不成立, 于是 n_1, n_2, n_3, n_4 中任两数的最大公因数大于 1 而不超过 3, 而且这些最大公因数不全为 2. 因为诸 n_i 不都是偶数(不然只要 $i\neq j$ 就有$(n_i, n_j)=2$), 对每个 n_i 总有 $j\neq i$ 使得$(n_i, n_j)\neq 2$ 从而$(n_i, n_j)=3$, 于是 3 整除每个 n_i. 由此可见 n_1, n_2, n_3, n_4 中任两数的最大公因数都必为 3, 从而定理 1 中的(4.3)成立, 于是 n_1, n_2, n_3, n_4 不调和.

由上可看到当 $k=4$ 时, 条件(B)不满足$\Rightarrow n_1, \cdots, n_k$ 不调和.

对于 $k=4$，当(4.4)成立时，n_1, n_2, n_3, n_4 不调和但条件(B)满足；当 $n_1=2, n_2=4, n_3=8, n_4=12$ 时，$\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{n_i}$ 不大于1而且(4.4)成立.

至此我们已明所欲证.

引理4 设正整数 n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 满足

$$(n_1, n_3)=(n_1, n_4)=(n_1, n_5)=2,$$
$$(n_2, n_3)=(n_2, n_4)=(n_2, n_5)=3,$$
$$(n_3, n_4)=(n_3, n_5)=(n_4, n_5)=6,$$

则 n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 不调和.

证 设有整数 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 使得 $\{a_i(n_i)\}_{i=1}^{5}$ 不相交，则利用引理1和已知条件可得

$$a_3, a_4, a_5\not\equiv a_1(\bmod 2), \ a_3, a_4, a_5\not\equiv a_2(\bmod 3), \ a_3, a_4, a_5 \bmod 6 \text{ 两两不同}.$$

由上面的第一式和第三式可推出 $a_3, a_4, a_5 \bmod 3$ 两两不同(注意 a_3, a_4, a_5 的奇偶性相同)，而这与上面的第二式相冲突.

矛盾表明 n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 不可能调和.

定理2 令 k 为不小于5的正整数，设 $a, b, c, d\in \mathbf{Z}^+$ 且 $a\geqslant 5$，并假定 $6, a, b, c, d$ 两两互素. 令

$$n_1=2a, n_2=3a, n_3=6b, n_4=6c, n_5=6d, n_6=\cdots=n_k=6kabcd,$$

则 $\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i}\leqslant 1$ 且(A)、(B)成立，但 $n_1, \cdots, n_k$ 不调和.

证 显然

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i}=\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{3a}\right)+\frac{1}{6b}+\frac{1}{6c}+\frac{1}{6d}+\frac{k-5}{6kabcd}$$
$$\leqslant\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}<1.$$

任取至少含有两个元素的 $\{1, \cdots, k\}$ 的子集 R.

情形 I R 中至少有两个大于5的数.

设 $s, t\in R$ 且 $s>t>5$，则 $(n_s, n_t)=6kabcd\geqslant k\geqslant |R|$. 对每个 $i\in R$，s, t 中至少有一个属于 $R-\{i\}$，从而 $\tilde{n}_i(R)=(n_i, [n_j]_{j\in R-\{i\}})=(n_i, 6kabca)=n_i$. 因此

$$\sum_{i\in R}\frac{1}{\tilde{n}_i(R)}=\sum_{i\in R}\frac{1}{n_i}\leqslant\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i}\leqslant 1.$$

情形 II R 中恰有一个大于5的数.

这时 $|R|\leqslant 6$ 且 $\{1, 2, 3, 4, 5\}\cap R\neq\varnothing$. 设 $s\in\{1, 2, 3, 4, 5\}\cap R$ 且 t 为 R 中大于5的数，则 $(n_s, n_t)=(n_s, 6kabcd)=n_s\geqslant 6\geqslant |R|$ (注意 $a\geqslant 5$). 任给 $i\in R$. 如果 $i\in\{1, 2, 3, 4, 5\}$，则 $t\in R-\{i\}$ 从而 $\tilde{n}_i(R)=(n_i, 6kabcd)=n_i$. 如果 $i=t$，则 $\tilde{n}_i(R)=\tilde{n}_t(R)=(6kabcd, [n_j]_{j\in R-\{t\}})=[n_j]_{j\in R-\{t\}}\geqslant n_s\geqslant 6$. 因此

$$\sum_{i\in R}\frac{1}{\tilde{n}_i(R)}\leqslant\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{n_i}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6a}+\frac{1}{6b}+\frac{1}{6c}+\frac{1}{6d}+\frac{1}{6}\leqslant\frac{1}{6}\times 5<1.$$

情形 III $R\subseteq\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

若 $R=\{s, t\}(1\leqslant s<t\leqslant 5)$，则 $(n_s, n_t)\geqslant 2=|R|$ 且

$$\sum_{i\in R}\frac{1}{\tilde{n}_i(R)}=\frac{1}{(n_s,\ n_t)}+\frac{1}{(n_t,\ n_s)}\leqslant 1.$$

以下讨论 $|R|>2$ 的情况.

如果 $R\supset\{1,\ 2\}$, 则 $(n_1,\ n_2)=a\geqslant 5\geqslant|R|$ 并且

$$\sum_{i\in R}\frac{1}{\tilde{n}_i(R)}=\frac{1}{2a}+\frac{1}{3a}+(|R|-2)\times\frac{1}{6}\leqslant\frac{5}{6a}+3\times\frac{1}{6}\leqslant\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\leqslant 1.$$

如果 R 中恰有一个数取自 $\{1,\ 2\}$, 则 $|R|<5$ 且 R 中至少有两个数选自 $\{3,\ 4,\ 5\}$, 于是 $(n_3,\ n_4)=(n_3,\ n_5)=(n_4,\ n_5)=6>|R|$ 而且

$$\sum_{i\in R}\frac{1}{\tilde{n}_i(R)}\leqslant\max\left\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}\right\}+(|R|-1)\times\frac{1}{6}\leqslant\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{6}=1.$$

如果 $R\cap\{1,\ 2\}=\varnothing$, 则因 $R\subseteq\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 和 $|R|>2$ 而有 $R=\{3,\ 4,\ 5\}$, 显然 $(n_3,\ n_4)=(n_3,\ n_5)=(n_4,\ n_5)=6>|R|$ 并且

$$\sum_{i\in R}\frac{1}{\tilde{n}_i(R)}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\leqslant 1.$$

综合以上讨论, 可看到 $\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i}\leqslant 1$ 而且(A)、(B)成立.

另一方面, 根据引理 4 可得 $n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4,\ n_5$ 不调和, 从而 $n_1,\ \cdots,\ n_k$ 不调和.

推论 2　设 $k\geqslant 5$, 当 $\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i}\leqslant 1$ 时, (A)、(B)合在一起还不是 $n_1,\ \cdots,\ n_k$ 调和的充分条件.

最后指出, (B)是否恒为 $n_1,\ \cdots,\ n_k$ 调和的必要条件尚属未知.

参 考 文 献

[1]　Huhn, A. P. and Megyesi, L., On disjoint residue classes, *Discrete Math.*, **41**: 3(1982), 327—330.
[2]　Sun Zhiwei(孙智伟), Several results on systems of residue classes, 数学进展, **18**: 2(1989), 251—252.
[3]　孙智伟、孙智宏, 关于覆盖同余式的若干结果, 西南师范大学学报(自然科学), **1** (1987), 10—15.